6.62. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ con AD perpendicolare alle basi, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Dimostrate che i due triangoli in cui la diagonale divide il trapezio sono simili. Nella prima riga della seguente tabella abbiamo posto i lati di un triangolo; Completate la seconda riga con i lati omologhi dell'altro triangolo e quindi la proporzione $CB : \ldots = AC : \ldots = AB : \ldots$.

ABC	CB	AC	AB
ADC	...	...	...

6.63. ABC e $A'B'C'$ sono due triangoli simili, CR e $C'R'$ sono le bisettrici rispettivamente degli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$ ($R \in AB$ e $R \in A'B'$). Dimostrate che $CR : C'R' = AB : A'B'$. Se CR e $C'R'$ sono rispettivamente le altezze relative ad AB e $A'B'$, vale la stessa proporzione? È possibile dimostrare, utilizzando il primo criterio di similitudine, che tale proporzione sussiste anche se CR e $C'R'$ fossero le mediane relative ad AB e $A'B'$?

6.64. In un trapezio $ABCD$ di basi $AB = 4$ cm, $DC = 8$ cm, traccia le diagonali AC e BD sapendo che esse misurano rispettivamente 7,62 cm e 5,83 cm. Indicato con K il punto di intersezione delle diagonali, determina le misure in cui ciascuna diagonale resta divisa dall'altra.

6.65. Nel triangolo ABC traccia le altezze AH e BK. Dimostra che il triangolo $4CHK$ è simile al triangolo ABC. Osserva che BKA e AHB sono inscrivibili in una semicirconferenza.

6.66. Siano BH e CK due altezze del triangolo ABC. Dimostra che AKH è simile ad ABC. Osserva che BCK e BCH sono inscrivibili in una semicirconferenza.

6.67. Un trapezio ha le basi di 4 cm e 10 cm, i lati obliqui di 4,57 cm e 5,94 cm. Prolungandoli si ottiene un triangolo che ha in comune con il trapezio la base minore. Determina il perimetro del triangolo.

6.68. Dimostra che due triangoli sono simili se hanno i lati del primo triangolo rispettivamente perpendicolari ai lati del secondo triangolo.

6.69. In un trapezio rettangolo la base minore CD è doppia del lato obliquo BC e questo è i 5/4 del lato AD perpendicolare alle due basi. Sapendo che l'area del trapezio è 184 cm^2, calcolare la misura della distanza di D dalla retta BC.

6.70. Nel triangolo ABC, traccia da un punto M del lato AB la parallela a BC; essa incontra AC in N. Traccia poi la bisettrice AL del triangolo; essa incontra MN in K. Dimostra che AMK è simile ad ABL.

6.71. Da un punto P dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC invia le parallele ai cateti del triangolo. Esse individuano Q au AB e R su AC. Dimostra che sono simili i triangoli ABC, QBP e RPC.

6.72. Due circonferenze, di centri O ed O' e raggi di misura rispettivamente 6 cm e 12 cm, sono tra loro tangenti esternamente in A; da O si tracci una tangente alla circonferenza di centro O' e sia B il punto di tangenza. Indicato con M il punto in cui il segmento BO incontra la circonferenza di centro O, calcolare le misure dei lati del triangolo AOM.

6.73. Il rapporto tra l'altezza AH e la base BC del triangolo isoscele ABC è $2 : 3$. Indicata con D la proiezione ortogonale di C sulla retta AB, dimostrare che D è un punto interno al segmento AB. Si costruisca poi il triangolo ECD, isoscele su base CD e simile ad ABC, in modo che il punto E si trovi dalla stessa parte di A rispetto a BC. Si dimostri che CE è parallelo ad AH, che i triangoli CDB e CEA sono simili e che il quadrilatero $ECDA$ è inscrivibile in una circonferenza.

6.74. Dimostrate che in due triangoli simili le mediane relative a due lati omologhi rispettano il rapporto di similitudine.

6.75. Due segmenti AB e CD si tagliano in un punto P in modo che $AP : PD = CP : PB$. Dimostra che $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{C}$.

6.76. Sui segmenti consecutivi AB e AC si prendano rispettivamente i punti H e K in modo che $AH \cong \frac{3}{4}AB$ e $AK \cong \frac{3}{4}AC$. Dimostrate che HK è parallelo a BC.

6.77. Prolungate, dalla parte di A, i lati congruenti AB e AC del triangolo isoscele ABC, di due segmenti congruenti AE e AF. Dimostrate che FE è parallelo a BC.

6.78. Da un punto A su una circonferenza traccia le corde AB e AC. Prolunga quindi AB di un segmento BD pari alla metà di AB e prolunga AC di un segmento CE pari alla metà di AC. Dimostra che il triangolo ABC è simile al triangolo ADE.

6.79. I lati del triangolo ABC misurano $AB = 8$ cm, $AC = 7{,}5$ cm e $BC = 5$ cm. A che distanza da B bisogna prendere sul lato BC un punto D in modo che la somma di DF parallelo a BA e DE parallelo a CA sia 7,8 cm? Individua i triangoli simili.

6.80. In quali dei seguenti casi due triangoli sono simili?

a) se hanno due coppie di lati in proporzione $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) se hanno due coppie di angoli in proporzione $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) se hanno due coppie di angoli congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) se hanno una coppia di lati in proporzione e una coppia di angoli congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) se sono rettangoli e hanno un angolo acuto congruente $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

6.81. In un trapezio $ABCD$ di basi $AB = 3$ cm e $DC = 7$ cm, traccia le diagonali AC e BD e indica con E il punto di intersezione delle diagonali. Da E traccia la parallela alle basi del trapezio e indica con F e G i punti di intersezione di questa parallela con i lati obliqui AD e BC. Determina la lunghezza di FG. ($ABE \sim DEC$, $AFE \sim ADC, \dots$).

6.82. Dimostra che due triangoli sono simili se hanno le mediane che sono proporzionali.

6.83. Dimostra che congiungendo i punti medi di un triangolo equilatero si ottiene un triangolo equilatero simile.

6.84. Nel trapezio $ABCD$ rettangolo in A e in D, le diagonali BD e AC sono perpendicolari. Sapendo che $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm e $BD = 5$ cm, calcola la lunghezza della base maggiore DC. (Utilizza la similitudine dei triangoli ABD e …)

6.85. Il rapporto fra le basi di due triangoli isosceli è 2/5 e la somma delle loro aree è 435 cm^2; sapendo che l'altezza relativa alla base del primo triangolo misura 10 cm, calcolare i perimetri dei due triangoli.

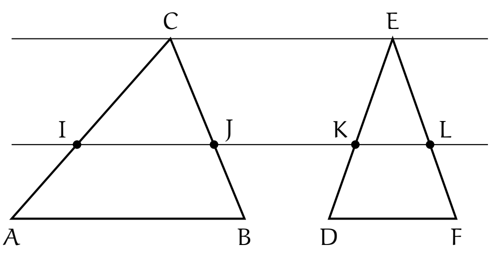


FIGURA 6.5: Esercizio 6.86

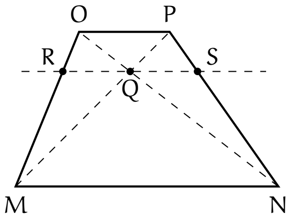


FIGURA 6.6: Esercizio 6.90

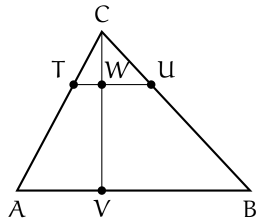


FIGURA 6.7: Esercizio 6.91

6.86. Due triangoli ABC e DEF (figura 6.5) hanno le basi AB e DF e i vertici C ed E su rette parallele. Dimostrate che $IJ : KL = AB : DF$, dove IJ e KL sono le corde intercettate dai lati dei due triangoli su una retta parallela alle basi (tracciate le altezze CP e EQ).

6.87. Se in un trapezio il rapporto tra le basi è $\frac{2}{7}$ e l'altezza è di 18 m, determinate la misura delle due parti nelle quali l'altezza risulta divisa dal punto di intersezione delle diagonali. Quanto dista dalla base minore il punto d'incontro dei lati obliqui del trapezio?

6.88. Il rapporto tra le aree dei due triangoli simili ABC e $A'B'C'$ è $\frac{25}{9}$ e il perimetro di ABC è 15 m. Determinate il perimetro di $A'B'C'$.

6.89. In un triangolo rettangolo ABC i cateti AB ed AC misurano rispettivamente 15 cm e 20 cm. Si consideri la circonferenza con il centro sull'ipotenusa del triangolo e tangente ai due cateti. Siano O e T rispettivamente il centro di tale circonferenza e il punto in cui essa tange AC. Calcolare l'area del triangolo TCO. (Nel triangolo ABC, AO è la bisettrice ...)

6.90. In base alla figura 6.6 dimostrate quanto richiesto nella tesi date le ipotesi indicate.
Ipotesi: $OP \parallel MN \parallel RS$.
Tesi: $RQ \cong QS$.

6.91. Considerate la figura 6.7. È sufficiente sapere che $VW = 2CW$ per stabilire il rapporto di similitudine tra ABC e CTU? Se $\mathcal{A}rea(ABC) = 54$ rispetto al metro quadrato, quanto è l'area di CTU? Completate: «Il rapporto tra le due parti in cui ABC rimane diviso dal segmento TU è ...».

6.92. A che distanza dal vertice A di un triangolo deve essere posto un punto P sul lato AB di 12 cm, in modo che la parallela condotta da P al lato BC determini un triangolo APR che sia i $9/16$ del trapezio $PRCB$?

6.93. Nel triangolo ABC, rettangolo in C, il cateto AC è $3/4$ del cateto BC. Da un punto D dell'ipotenusa si traccino le parallele al cateti. Il perimetro del rettangolo che si viene a formare è $11/6$ del cateto BC. Individua il rapporto di ciascuno dei lati del rettangolo con il cateto BC.

6.94. Dal punto medio M dell'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC, traccia la perpendicolare all'ipotenusa che incontra il cateto AB in D. Determina il rapporto tra le aree dei triangoli DMB e ABC.

6.95. In una circonferenza di centro O e raggio di misura 30 cm, è inscritto un triangolo ABC isoscele su base BC con la base che è i $2/3$ della relativa altezza. Calcolare le misure dei lati di tale triangolo e il perimetro del triangolo BCD, essendo D la proiezione ortogonale di C sulla tangente in B alla circonferenza. (Per rispondere alla seconda domanda tracciare l'altezza del triangolo ABC relativa ad AC e osservare la similitudine dei triangoli ...).

6.96 (Olimpiadi della Matematica - Gara di II livello, febbraio 2012). Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P e Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC. Dimostrare che

a) gli angoli $B\widehat{A}P$ e $Q\widehat{A}C$ sono congruenti;
b) i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;
c) detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero ABPC vale quattro volte l'area del quadrilatero AMON.

6.97 (Olimpiadi della Matematica - gara di II livello, febbraio 2006)**.** Sia ABC un triangolo e sia A' il simmetrico di A rispetto a BC; sia poi DAA' simile ad ABC e sia D il simmetrico di D rispetto ad AA'. Sapendo che il prodotto delle aree dei quadrilateri $ABA'C$ e $ADA'D'$ è 16, la misura di AA' è

a) 1;
b) $2\sqrt[4]{2}$;
c) 2;
d) $2\sqrt{2}$;
e) non è univocamente determinata dai dati.

(Nota: la similitudine tra DAA' e ABC va intesa in modo ordinato: $DA : AB = AA' : BC = A'D : CA$)

6.98 (Olimpiadi della Matematica - gara di II livello, febbraio 2007)**.** In un triangolo isoscele ABC, con $AC = BC \neq AB$, si fissi un punto P sulla base AB. Quante posizioni può assumere, nel piano, un punto Q se vogliamo che i punti A, P e Q, presi in ordine qualsiasi, siano i vertici di un triangolo simile ad ABC?

a) 0; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

6.7 - Proprietà di secanti e tangenti ad una circonferenza

6.99. Nella figura 6.8, applicando il teorema delle corde, individua tutte le possibili relazioni di proporzionalità tra i segmenti.

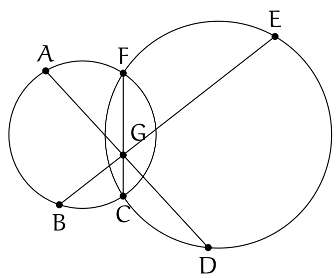


FIGURA 6.8: Esercizio 6.99

6.100. Individua tutte le possibili relazioni di proporzionalità tra i segmenti della figura 6.9, applicando il teorema delle corde.

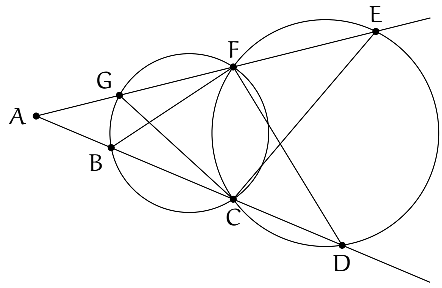


FIGURA 6.9: Esercizio 6.100

6.101. Siano A, B, C e D quattro punti di una circonferenza, presi nell'ordine indicato. Sia E il punto di intersezione di AC con BD. Dimostra che i triangoli AEB e DEC sono simili.

6.102. Dato un angolo acuto di vertice A e lati le semirette r e s, traccia un punto M interno all'angolo. Da M traccia la perpendicolare a r che la incontra in B e che taglia s in C. Sempre da M traccia la perpendicolare a s che la incontra in D e che taglia r in E. Dimostra che i punti B, D, C ed E stanno su una stessa circonferenza.

6.103. Sia ABC un triangolo circoscritto a una circonferenza γ, sia D il punto di tangenza del lato AB ed E il punto di tangenza del lato AC. Sia F il punto di intersezione della secante BE con la circonferenza. Dimostra che i triangoli DBF e BDE sono simili. (Applica il teorema della secante e della tangente).

6.104. In una circonferenza di centro O, due corde AB e CD si incontrano in un punto P. Sapendo che $\overline{PO} = 2$ cm e che $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 14{,}02$ cm^2, calcola il raggio della circonferenza.

6.105. Una corda AB di una circonferenza misura 3 cm. Dal punto medio M della corda passa un'altra corda della stessa circonferenza, tale che $MD = CM + 2$ cm. Determina la lunghezza della corda CD.

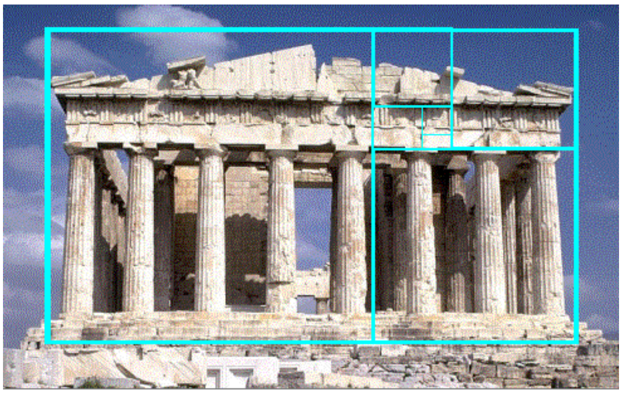
6.106 (Olimpiadi della Matematica - gara di II livello, febbraio 2007)**.** È data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto della circonferenza (diverso da A e da B) e si tracci la retta r per O parallela ad AC. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB. Dimostrare che DO è bisettrice dell'angolo $C\widehat{D}B$ e che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD. (La similitudine è dimostrabile in due modi …).

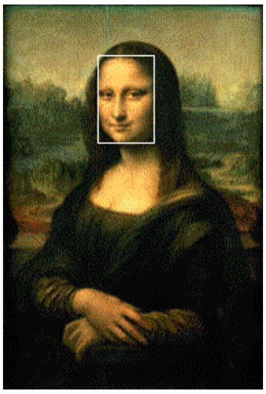
6.8 - La sezione aurea

6.107. Assegnato un segmento AB, costruite il rettangolo avente per lati la sezione aurea del segmento e la diagonale del quadrato avente AB come lato.

6.108. Un rettangolo ABCD ha il lato AD che è la sezione aurea del lato AB; verificate che, dopo aver costruito all'interno del rettangolo il quadrato AEFD di lato AD (E su AB e F su DC), il segmento EB è sezione aurea di AD. Costruite ora entro EBCF il quadrato di lato EB e verificate che il rettangolo che rimane ha il lato minore che è sezione aurea del lato maggiore. Potete affermare che tutti i rettangoli che via via si possono costruire sono tra loro simili? Calcolate il valore esatto del rapporto aureo, supponendo unitaria la misura del lato AB del rettangolo aureo descritto nell'esercizio precedente: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\dots} \simeq 1, \dots$

Il rettangolo dell'esercizio 6.108 viene chiamato *rettangolo aureo* in quanto risulterebbe, tra gli infiniti rettangoli che si possono disegnare, quello che dà la maggiore "soddisfazione visiva"; il rapporto tra AB e AD viene chiamato *numero aureo*. Negli oggetti quotidiani possiamo trovare alcuni esempi di rettangolo aureo: le schede telefoniche, le carte di credito e bancomat, le SIM dei cellulari, sono tutti rettangoli aurei. Ritroviamo il rettangolo aureo anche in opere architettoniche e pittoriche: il grande scultore greco Fidia, collaborando alla costruzione del Partenone, seguì il rapporto aureo; il viso della Gioconda di Leonardo da Vinci può essere racchiuso in un rettangolo aureo; nella "Parade", opera del pittore francese Seurat, vari punti delimitano rettangoli aurei; "Place de la Concorde", un'astrazione lineare di Piet Mondrian, è costituita da rettangoli aurei che si sovrappongono.





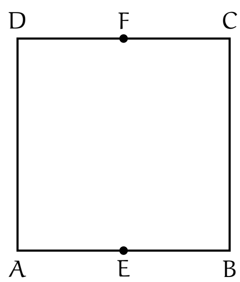
6.109. Il numero aureo è solitamente indicato con la lettera greca ϕ; esso è un numero irrazionale con alcune caratteristiche: se considerate l'approssimazione $\phi = 1{,}618\,033\,989\ldots$ e determinate ϕ^2 e $1/\phi$ potete notare che ......

6.110. Dimostrate che nel triangolo isoscele ABC di base BC e con angolo al vertice di $108°$, il lato è la sezione aurea della base. (Tracciate una semiretta di origine A che spezzi l'angolo in due parti di cui una doppia dell'altra ...).

6.111. Dimostrate che il lato del pentagono regolare è la sezione aurea della diagonale.

6.112. Dal quadrato $ABCD$ nella figura a fianco, costruiamo un rettangolo aureo:

1. congiungete i punti medi E ed F rispettivamente dei lati AB e CD;
2. descrivete l'arco di circonferenza di raggio EC e centro in E che interseca in G il prolungamento di AB (dalla parte di B);
3. da G innalzate la perpendicolare ad AG che interseca in H il prolungamento del lato DC.



Il rettangolo $AGHD$ è un rettangolo aureo. Infatti l'arco di circonferenza passa anche per il vertice D; H è un punto esterno da cui esce la secante ... e il segmento di tangente ...... Si ha la proporzione .... da cui si deduce la suddetta conclusione.

6.9.2 Risposte

6.10. $AB = \frac{7}{3}CD$.

6.64. 2,54 cm, 5,08 cm, 3,89 cm, 1,94 cm.

6.67. 21,52 cm.

6.69. 16 cm.

6.72. 6 cm, 4 cm, ...

6.79. $DB = 2$ cm.

6.81. 4,2 cm.

6.84. 5,33 cm.

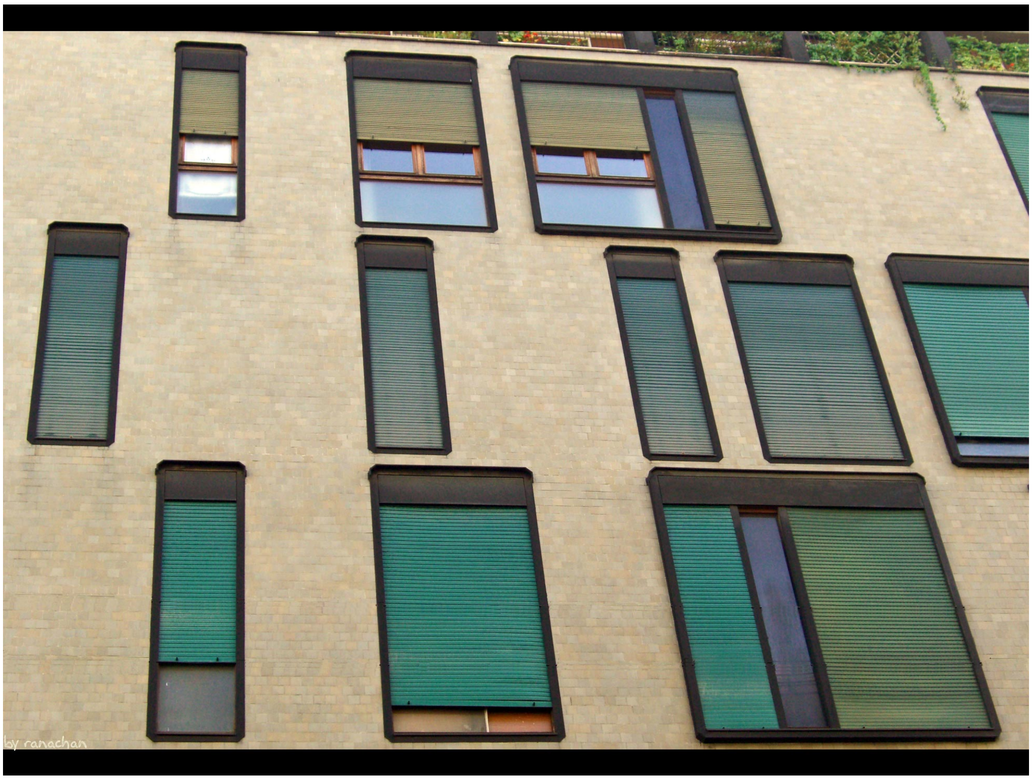
6.87. $h_1 = 4$ m, $h_2 = 14$ m, $d = 7{,}2$ m.

6.93. 33/42, 44/21.

6.104. 4,24 cm.

6.105. 3,6 cm.

7 Equiestensione e aree



"Window geometry"
Foto di midori.no.kerochan
http://www.flickr.com/photos/28661972@N05/2751042868/
Licenza: Creative Commons Attribution 2.0

7.1 Estensione superficiale

Il *tangram* è un antichissimo gioco cinese. Il nome con cui lo conosciamo si pensa derivato dall'unione della parola *tang* o *tan*, che significa *cinese*, e *gram* che significa *immagine*. Anticamente in Cina era chiamato "schema intelligente a sette pezzi" o anche "le sette pietre della saggezza" poiché si riteneva che la padronanza del gioco fosse la chiave per ottenere saggezza e talento. Il gioco è costituito da un quadrato ritagliato in 7 pezzi poligonali aventi in comune solo punti del loro contorno (figura 7.1).

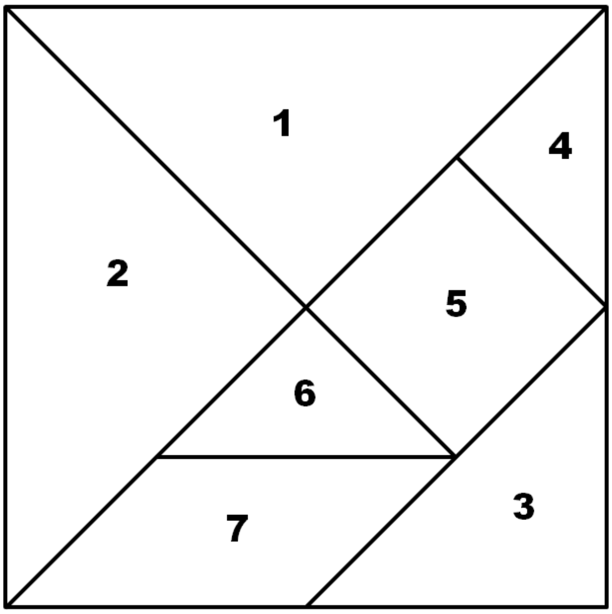


FIGURA 7.1: Il gioco del tangram

I pezzi possono essere disposti e accostati gli uni agli altri senza sovrapposizioni in modo da ottenere una grande varietà di figure; la regola base è che devono essere utilizzati tutti i 7 pezzi. Si possono così formare alcuni disegni come mostrato nella figura 7.2.

Potete osservare che si forma un poligono quando i singoli pezzi vengono accostati mediante un lato: l'uomo seduto è un poligono, ma non la candela; i due poligoni rappresentati sono l'uno concavo e l'altro convesso.

Con tutti i 7 pezzi del gioco si possono costruire 13 poligoni convessi, compreso il quadrato iniziale, provate a costruirli: fotocopiate la pagina precedente e ritagliate i 7 pezzi del tangram.

Evidentemente i 13 poligoni che avrete costruito non sono congruenti, né hanno la stessa forma; potete dire che sono formati dalle stesse parti poligonali, ciascuno può cioè essere pensato come unione dei *tan* aventi in comune almeno un punto del loro perimetro, ma nessun punto interno.

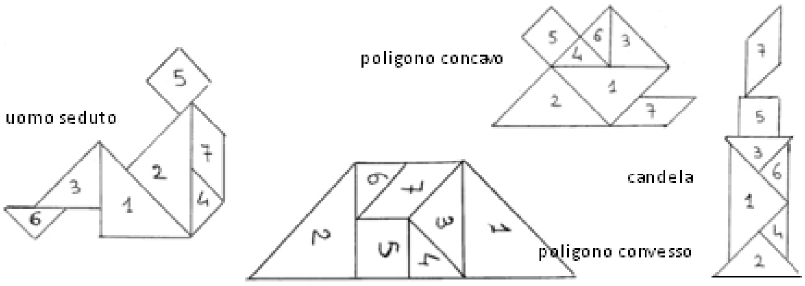


FIGURA 7.2: Alcune figure realizzabili con il tangram

Definizione 7.1. Con *somma* di due *figure piane* X e Y, non aventi punti comuni o aventi in comune solo punti del loro contorno, intendiamo la figura Z unione dei punti di X e Y e la indicheremo con

$$\boxed{Z = X + Y}$$

Diremo inoltre che X è la *differenza* tra Z e Y e scriveremo

$$\boxed{X = Z - Y}$$

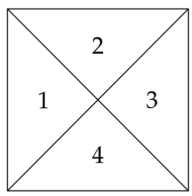
Definizione 7.2. Due poligoni p_1 e p_2 sono *equicomposti* se sono formati dalle stesse parti poligonali (figure piane). Sono *equiscomponibili* se è possibile decomporre uno di essi in un numero finito di parti poligonali con le quali si possa ricoprire l'altro. In simboli

$$\boxed{p_1 \doteq p_2}$$

che si legge "p_1 equicomposto p_2"

Tutte le figure poligonali costruite con i pezzi del tangram $p_1, p_2, \ldots$ sono dunque poligoni equicomposti, ma possono anche essere considerati poligoni equiscomponibili, quindi $p_1 \doteq p_2 \doteq \ldots$

Esempio 7.1. Ritagliate da un quadrato i quattro triangoli rettangoli isosceli che si ottengono tracciando le sue diagonali (fotocopia e ritaglia la figura a fianco). Disponendo fianco a fianco i triangoli ottenuti in modo che i due lati comuni abbiano la stessa lunghezza, si ottengono 14 figure diverse. Due di esse sono riportate nella figura 7.3. Realizzate tutte le altre figure.



Le figure ottenute sono .... perché sono formate da ....
(da: Prova di allenamento della gara di "Matematica senza frontiere" del 9/02/1994)

Esempio 7.2. Nella figura 7.4 sono disegnati un quadrato ABCD, un rettangolo PQRS avente $PQ = 2AB$ e $SP = AB/2$ e un rombo FGHK avente una diagonale uguale al lato del quadrato e

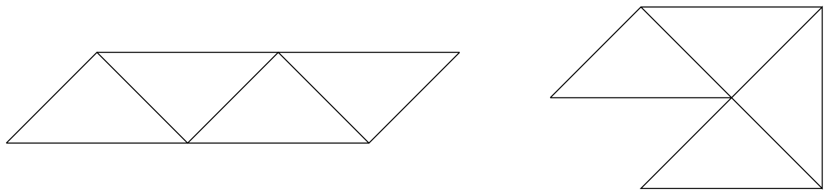


FIGURA 7.3: Alcune figure realizzabili (esempio 7.1)

l'altra il doppio. Mostra come sia possibile scomporre ciascuno dei tre poligoni in parti tali da poter ricoprire gli altri due. Puoi concludere che i tre poligoni assegnati sono equiscomponibili? ......

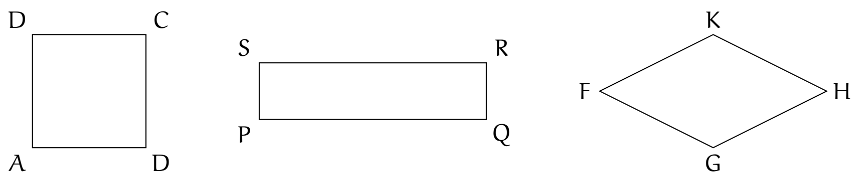


FIGURA 7.4: Esempio 7.2

Esempio 7.3. Dato l'insieme $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ delle figure poligonali disegnate a lato, segui le seguenti istruzioni:

ripeti:

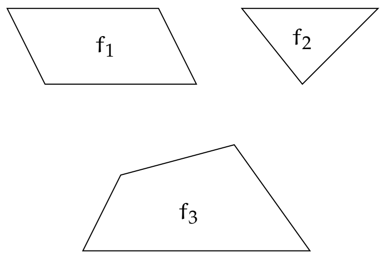
scegli una figura dell'insieme F*;*

traccia alcuni segmenti che la decompongano in parti poligonali;

forma con le parti ottenute altre 3 figure poligonali;

finché non hai esaurito le figure.

Costruisci l'insieme G di tutti i poligoni ottenuti con questa procedura e indica con simboli arbitrari i suoi elementi.



Nell'insieme $S = F \cup G$ (dove F e G sono gli insiemi definiti nell'esempio 7.3) la relazione R espressa dal predicato: «essere equicomposti» gode della proprietà

- riflessiva, infatti ....
- simmetrica, infatti ....
- transitiva, infatti ....

Si può dunque concludere che R è una relazione di equivalenza e quindi si possono costruire sia l'insieme delle parti $P(S)$, sia l'insieme quoziente $E = S/R$ avente come elementi le tre classi di equivalenza, ciascuna rappresentata dal poligono iniziale (figura 7.5):

$$[f_1] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_1\};$$

$$[f_2] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_2\};$$

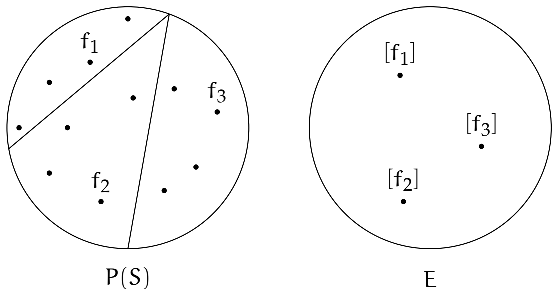


FIGURA 7.5: Rappresentazione dell'insieme delle parti di S e del quoziente $E = S/R$

$$[f_3] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_3\}.$$

Definizione 7.3. Diciamo che due qualunque poligoni p_1 e p_2 appartenenti alla stessa classe sono *equivalenti* e useremo la scrittura $p_1 \doteq p_2$ per esprimere questa caratteristica (*equivalenza per scomposizione*); essi hanno una caratteristica comune che chiamiamo *estensione superficiale* (ES).

I poligoni costruiti con i pezzi del tangram appartengono alla stessa classe di equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato iniziale. Anche i 14 poligoni realizzati nell'esempio 7.1 appartengono alla stessa classe di equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato assegnato.

❑ **Osservazione** Sin dalla scuola elementare avete usato termini come "superficie", "estensione" e "area" quando vi siete accostati allo studio dei poligoni, probabilmente ritenendoli sinonimi. Lo studio di una particolare relazione di equivalenza vi ha mostrato che il concetto di estensione di un poligono si ottiene attraverso il procedimento di passaggio al quoziente nell'insieme dei poligoni piani.

Definizione 7.4. Chiamiamo *area* di un poligono p il numero reale positivo $A(p)$ che esprime la misura della sua estensione superficiale.

Possiamo concludere che ad ogni classe di equivalenza, generata con la relazione «essere equicomposti» o «essere equiscomponibili», può essere associato un numero: l'area della figura scelta come rappresentante della classe di equivalenza. In tal modo trasformeremo una relazione di equivalenza tra poligoni, espressa con il simbolo $\doteq$ in una relazione di uguaglianza tra numeri. Ad esempio, riferendoci ai poligoni costruiti con i pezzi del tangram possiamo trasformare la relazione di equivalenza $p_1 \doteq p_2 \doteq p_3 \doteq \dots$ in un'uguaglianza tra le aree scrivendo $A(p_1) = A(p_2) = A(p_3) = \dots$

7.2 Poligoni equivalenti

Premettiamo alcuni assiomi:

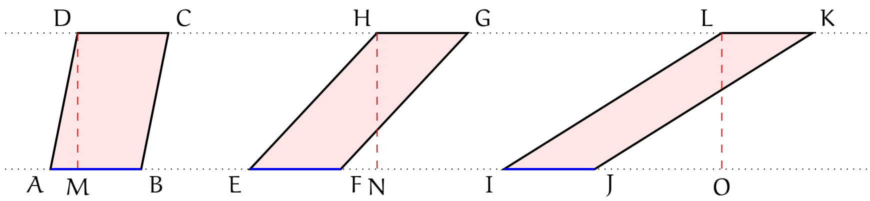
1. Poligoni congruenti sono equivalenti.
2. Un poligono non è equivalente ad una sua parte propria.
3. Somma e differenza di poligoni equivalenti originano poligoni equivalenti.

Teorema 7.1. *Due parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le rispettive altezze, sono equivalenti.*

Nella figura sottostante sono rappresentati alcuni degli infiniti parallelogrammi aventi basi e altezze congruenti; le loro basi appartengono a rette parallele.

Ipotesi: $AB \cong EF \cong IJ$, $DM \perp AB$, $HN \perp EF$, $LO \perp IJ$, $DM \cong HN \cong LO$.

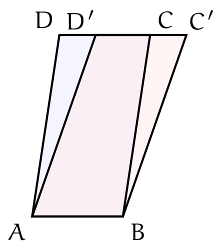
Tesi: $ABCD \doteq EFGH \doteq IJLK$.



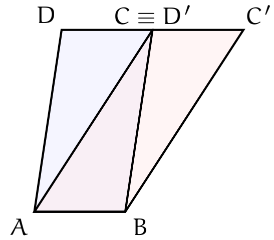
Dimostrazione. Per dimostrare l'equivalenza tra questi parallelogrammi, costruiamo su $ABCD$ un altro parallelogramma, facendo sovrapporre le loro basi. Avremo tre casi:

Primo caso

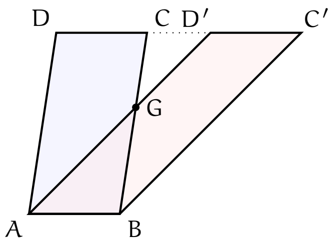
Costruiamo su $ABCD$ il parallelogramma $ABC'D'$ avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice D' è un punto interno a DC. $ABCD$ è scomposto in $ADD' + ABCD'$; $ABC'D'$ è scomposto in $BCC' + ABCD'$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli ADD' e BCC' potremo concludere che i due parallelogrammi, essendo equicomposti, sono equivalenti. Consideriamo i due triangoli ADD' e BCC', essi sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, infatti: $AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$; $AD' \cong BC'$ perché lati opposti del parallelogramma $ABC'D'$; $DD' \cong CC'$ perché differenza di segmenti congruenti, precisamente $DD' = DC - D'C$ e $CC' = C'D' - CD'$. Dalla congruenza dei triangoli segue anche la loro equivalenza $ADD' \cong BCC' \Rightarrow ADD' \doteq BCC'$. Possiamo allora concludere che $ABCD \doteq ABC'D'$.



Secondo caso
Costruiamo su $ABCD$ il parallelogramma $ABC'D'$ avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice C coincide con D' e $ABCD$ è scomposto in $ADC + ACB$; $ABC'D'$ è scomposto in $ABD' + BC'D'$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli ADC e $BC'D'$ possiamo concludere che i due parallelogrammi, essendo equicomposti, sono equivalenti. Infatti, ADC e $BC'D'$ hanno $AD \cong CB$ perché lati opposti di uno stesso parallelogramma, $DC \cong C'D'$, $AC \cong BC'$, pertanto ADC e $BC'D'$ sono triangoli congruenti.



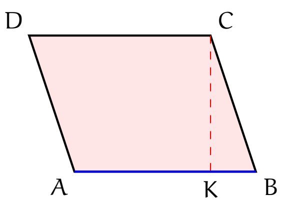
Terzo caso
Costruiamo su $ABCD$ il parallelogramma $ABC'D'$ avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice D' è esterno al lato DC e i lati AD' e BC si intersecano nel punto G. $ABCD$ è scomposto in $ADCG + AGB$ mentre $ABC'D'$ è scomposto in $BGD'C' + AGB$, inoltre $ADCG$ si può scomporre in $ADD' - CGD'$ come $BGD'C'$ si può scomporre in $BCC' - CGD'$. Quindi $ABCD$ è scomposto in $ADD' - CGD' + AGB$ e $ABC'D'$ è scomposto in $BCC' - CGD' + AGB$. Basta allora dimostrare la congruenza dei triangoli ADD' e BCC' per dire che $ABCD$ e $ABC'D'$ sono equiscomposti e dunque equivalenti. Infatti ADD' e BCC' sono congruenti perché hanno $AD \cong BC$, lati opposti del parallelogramma, analogamente $AD' \cong BC'$ e $DD' \cong CC'$ perché somma di segmenti congruenti.

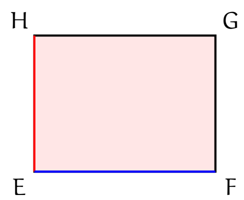


□

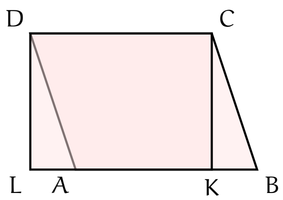
Corollario 7.2. *Ogni parallelogramma è equivalente al rettangolo avente un lato congruente alla sua base e l'altro lato congruente alla sua altezza.*

Ipotesi: $AB \cong EF$, $CF \perp AB$, $CK \cong HE$.
Tesi: $ABCD \doteq EFGH$.





Dimostrazione. Dal vertice D tracciamo l'altezza DL relativa alla base AB; il quadrilatero $DLKC$ è un rettangolo congruente a $EFGH$; dimostrando che $ABCD \doteq DLKC$ si ottiene la tesi.
Completate la dimostrazione.
Osserviamo che $ABCD$ è composto da .... e $DLKC$ è composto da .... Consideriamo i triangoli ....
Sono congruenti perché .... quindi .... □



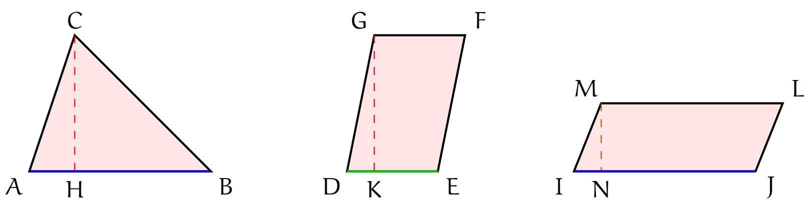
Il teorema 7.1 e il suo corollario 7.2 ci assicurano che i parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le relative altezze formano una classe di equivalenza avente come rappresentante il rettangolo che ha un lato congruente alla base del parallelogramma e l'altro lato congruente alla sua altezza. Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq EFGH \Rightarrow A_{ABCD} = A_{EFGH}$.

Teorema 7.3. *Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente:*

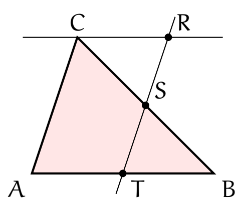
a) base congruente alla metà della base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, oppure
b) base congruente alla base del triangolo e altezza congruente alla metà dell'altezza del triangolo.

Nella figura sono rappresentati il triangolo ABC, il parallelogramma DEFG avente base congruente alla metà della base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, il parallelogramma IJLM avente altezza congruente alla metà dell'altezza del triangolo e base congruente alla base del triangolo.

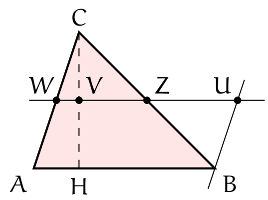
Ipotesi: $AB \perp CH$, $DE \cong \frac{1}{2}AB$, $GK \perp DE$, $GK \cong CH$, $IJ \cong AB$, $MN \perp IJ$, $MN \cong \frac{1}{2}CH$.
Tesi: a) $ABC \doteq DEFG$; b) $ABC \doteq IJLM$.



Dimostrazione.
Caso a.
Dal punto medio T della base AB tracciamo la parallela al lato AC che incontra CB in S; dal vertice C tracciamo la parallela alla base AB che interseca in R la retta ST; il parallelogramma ATRC soddisfa le ipotesi del caso a) ed è equivalente a DEFG per il teorema 7.1. Confrontiamo il triangolo e il parallelogramma: possiamo pensare ABC composto da $CATS + BST$ e ATRC composto da $CATS + CSR$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CSR e BST potremo concludere che triangolo e parallelogramma, essendo equicomposti, sono equivalenti. $TB \cong CR$ infatti .... $SB \cong CS$ infatti .... $T\widehat{B}S \cong S\widehat{C}R$ infatti .... Allora per il primo criterio di congruenza $TBS \cong SCR$ e quindi $ATRC \doteq BST$.



Caso b.
Dal punto medio V dell'altezza CH tracciamo la parallela alla base AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente in W e Z; da B tracciamo la parallela al lato AC che interseca la retta WZ in U; il parallelogramma $AWUB$ soddisfa le ipotesi del caso b) ed è equivalente a $IJLM$ per il teorema 7.1. Confrontiamo il triangolo e il parallelogramma: possiamo pensare ABC composto da .... e $AWUB$ composto da .... Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CWZ e ZBU potremo concludere che triangolo e parallelogramma, essendo equicomposti, sono equivalenti. $CW \cong \ldots$ infatti .... $CZ \cong \ldots$ infatti .... $\ldots \cong Z\widehat{B}U$ infatti .... Pertanto ....

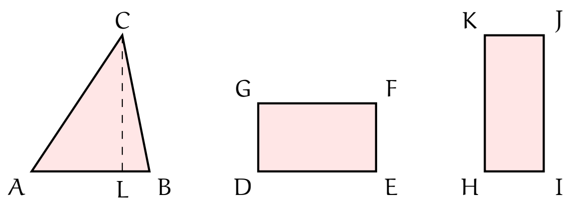


□

Corollario 7.4. *I triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questa proprietà.

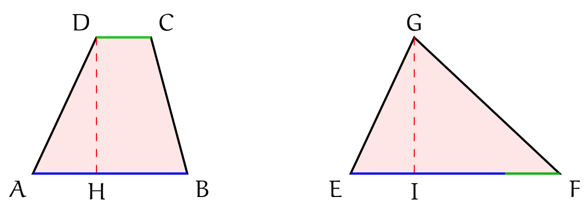
Il teorema 7.3 e il suo corollario (7.4) ci assicurano che i triangoli aventi rispettivamente congruenti la base e la rispettiva altezza formano una classe di equivalenza avente come rappresentante il rettangolo con un lato congruente alla base del triangolo e l'altro lato congruente a metà della sua altezza, oppure un lato congruente all'altezza del triangolo e l'altro lato congruente a metà della base.



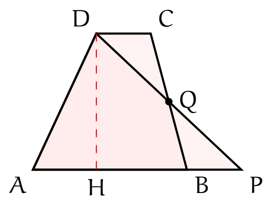
Ipotesi: $CL \perp AB$, $DE \cong AB$, $DG \cong \frac{1}{2}CL$, $KH \cong CL$, $HI \cong \frac{1}{2}AB$.
Tesi: $ABC \doteq DEFG \doteq HIJK \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DEFG} = \mathcal{A}_{HIJK}$.

Teorema 7.5. *Un trapezio è equivalente a un triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza.*

Ipotesi: $EF \cong AB + CD$, $DH \perp AB$, $GI \perp EF$, $GI \cong DH$.
Tesi: $ABCD \doteq EFG$.



Dimostrazione. Prolunghiamo la base AB del segmento BP congruente a DC e congiungiamo D con P. APD è un triangolo equivalente a EFG avendo stessa base e stessa altezza, quindi basta dimostrare che $ABCD \doteq APD$. Confrontiamo il trapezio e il triangolo: possiamo pensare $ABCD$ composto da .... e APD composto da .... Se dimostriamo la congruenza dei triangoli .... potremo concludere che trapezio e triangolo, essendo equicomposti, sono equivalenti. I due triangoli sono congruenti perché hanno .... Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq APD \Rightarrow A_{ABCD} = A_{APD}$. □

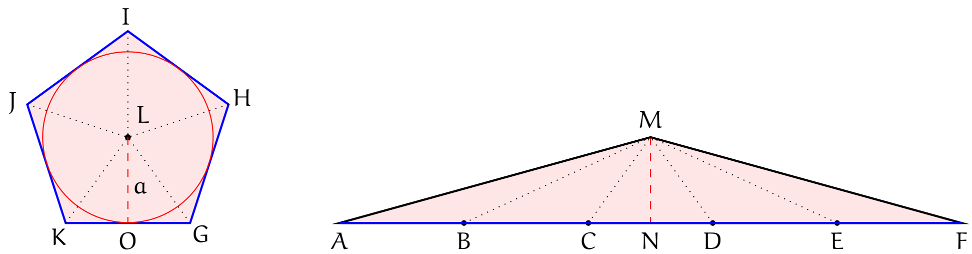


Pertanto, utilizzando il teorema 7.3 e il suo corollario (7.4) possiamo sempre determinare il rettangolo equivalente a un trapezio dato.

Teorema 7.6. *Ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente per base il segmento somma dei lati del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.*

Caso del poligono regolare (pentagono).

Ipotesi: $LO \cong MN$, $AF \cong KG + GH + HI + IJ + LK$, $AB \cong KG$, $BC \cong GH$, $CD \cong HI$, $DE \cong IJ$, $EF \cong JK$.
Tesi : $KGHIJ \doteq AFM$.



Dimostrazione. I cinque triangoli che compongono il triangolo AFM sono equivalenti ai 5 triangoli che compongono il poligono assegnato, infatti hanno basi .... altezza .... Quindi .... □

Caso del poligono qualunque.

Lasciamo al lettore la costruzione di un poligono circoscritto a una circonferenza e del triangolo equivalente.

Possiamo quindi affermare che ogni poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente ad un triangolo e per il teorema 7.3 è anche equivalente a un rettangolo.

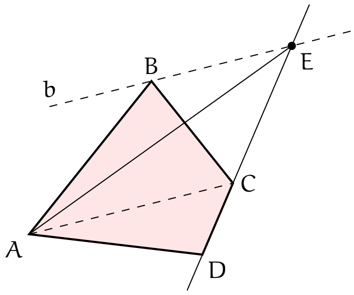
Si pone ora la questione: è possibile trasformare un qualunque poligono in un rettangolo equivalente?

7.2.1 Costruzione di un rettangolo equivalente a un poligono assegnato

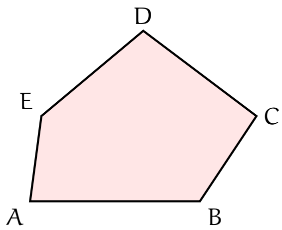
Caso 1: poligono convesso

Un qualunque poligono convesso può essere trasformato in un poligono equivalente avente un lato di meno.

Quadrilatero. In figura è rappresentato il quadrilatero convesso $ABCD$, ci proponiamo di costruire un triangolo equivalente ad esso. Dal vertice B tracciamo la parallela b alla diagonale AC; il vertice E è il punto di intersezione di b con la retta per DC. I triangoli ABC e ACE sono equivalenti in quanto hanno la stessa base AC e stessa altezza, poiché i loro vertici si trovano sulla retta b parallela alla base. Il quadrilatero $ABCD$ si può pensare composto da $ADC + ACB$; il triangolo ADE è composto da ....; poiché sono poligono equicomposti possiamo concludere che $ABCD \doteq ADE$.



Pentagono. Costruzione di un triangolo equivalente al pentagono convesso $ABCDE$ rappresentato in figura. Tracciare la diagonale DB. Dal vertice C tracciare la parallela a DB. Prolungare il lato AB fino a incontrare in F la retta r. Congiungere D con F. Si ha che infatti .... Sul quadrilatero FDE si può procedere come descritto precedentemente.

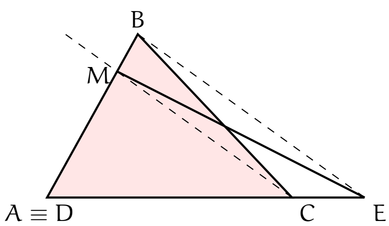


Conclusione: ogni poligono convesso è equivalente a un triangolo e quindi (corollario 7.4) a un rettangolo.

Caso 2: poligono concavo

Premettiamo la costruzione di un triangolo con base assegnata equivalente ad un triangolo ABC dato.

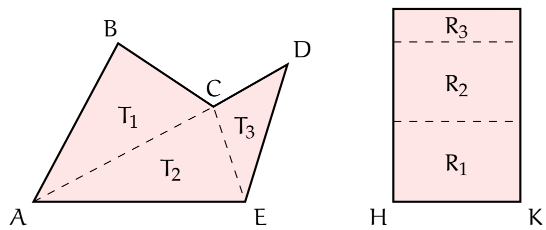
Sia ABC il triangolo e DE il segmento che vogliamo come base del triangolo equivalente. Sovrapponiamo il segmento DE al lato AC facendo coincidere D con A; l'estremo E è esterno al triangolo assegnato. Dopo aver congiunto B con E, da C tracciamo la parallela a BE che incontra in M il lato AB. Il triangolo MDE è equivalente ad ABC.



Completate il ragionamento.
Si ha per costruzione: $DBE = ABC + BCE$ e $DBE = DME + BME$. Quindi $ABC = DBE - BCE$ e $DME - BME$. I triangoli BCE e BME sono equivalenti, avendo stessa base BE e stessa altezza perché .... Possiamo quindi concludere che ....

Passiamo ora alla costruzione di un rettangolo equivalente a un poligono concavo.

Dato il poligono concavo $ABCDE$, suddividiamolo in 3 triangoli tracciando due diagonali e fissiamo arbitrariamente un segmento HK. Ciascun triangolo in cui è suddiviso $ABCDE$ può essere trasformato in un triangolo equivalente avente HK come base e dunque in un rettangolo con base HK; con tali rettangoli possiamo costruire, impilandoli uno sull'altro, il rettangolo equivalente ad $ABCDE$.

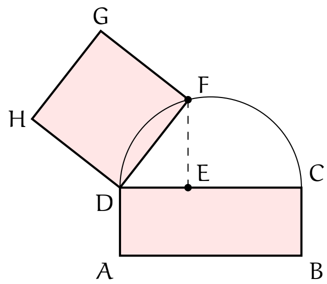


Possiamo quindi concludere che un qualunque poligono è equivalente a un rettangolo.

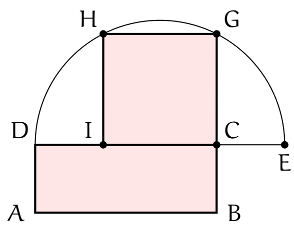
7.2.2 Da un poligono al quadrato equivalente

Nella classe di equivalenza di un qualsiasi poligono c'è sempre un quadrato. Ossia, dato un poligono possiamo sempre trovare un quadrato equivalente. Abbiamo dimostrato che un qualunque poligono è equivalente a un rettangolo, ora vogliamo dimostrare che, dato un rettangolo esiste sempre un quadrato equivalente ad esso. Vediamo due possibili costruzioni.

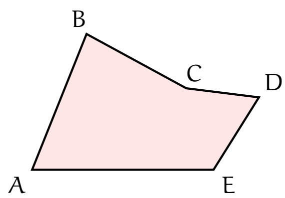
1º modo Dopo aver disegnato il rettangolo $ABCD$ equivalente al poligono considerato, costruiamo la semicirconferenza di diametro DC. Fissiamo su DC il punto E tale che $DE \cong AD$. Dal punto E tracciamo la perpendicolare al diametro che interseca la semicirconferenza in F. Il triangolo DFE è retto in E perché ....
Il quadrato avente come lato DF è equivalente al rettangolo $ABCD$ perché ....



2º modo Dato il rettangolo $ABCD$ equivalente al poligono considerato, prolunghiamone il lato DC fino al punto E tale che $CE \cong AD$. Quindi tracciamo la semicirconferenza di diametro DE. Dal punto C tracciamo la perpendicolare al diametro che interseca la semicirconferenza in G. Il triangolo DGE è retto in G perché ....
Il quadrato avente come lato CG è equivalente al rettangolo $ABCD$ perché ....



Costruite il quadrato equivalente al poligono $ABCDE$ riportato nella figura a fianco.



7.3 Aree dei principali poligoni

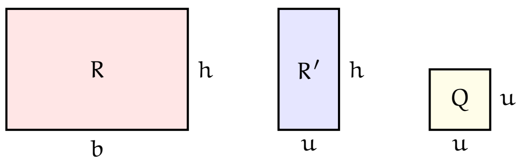
Per *area* di una qualunque figura piana intendiamo il numero reale che esprime la misura dell'estensione superficiale della figura data.

Per calcolare le aree dei principali poligoni si ricava per prima l'area del rettangolo e poi, basandosi sui teoremi relativi all'equivalenza delle figure piane, da questa si ricavano le aree di altri poligoni fondamentali.

7.3.1 Area del rettangolo

Teorema 7.7. *L'area del rettangolo è data dal prodotto della misura delle sue dimensioni*

$$\boxed{A = b \cdot h}$$



Dimostrazione. A questo scopo ricorriamo al teorema 6.6 «I rettangoli aventi una dimensione congruente sono direttamente proporzionali all'altra dimensione». Consideriamo allora un rettangolo R le cui misure della base e dell'altezza sono rispettivamente b e h, il rettangolo R' che otteniamo da R trasformando una dimensione, ad esempio la sua base, in quella unitaria u, di misura 1, ed infine il quadrato Q di lato u. Applichiamo il teorema enunciato in precedenza a R ed a R' ottenendo $R : R' = b : u$. Quindi applichiamo lo stesso teorema al rettangolo R' ed al quadrato unitario Q, così abbiamo $R' : Q = h : u$. Passiamo dalla proporzione tra le grandezze alla proporzione tra le loro misure, iniziando dall'ultima proporzione e chiamando rispettivamente A ed A' le misure delle estensioni superficiali di R ed R'. Si ha $A' : 1 = h : 1$, da cui ricaviamo $A' = h$. Sostituiamo dunque nella prima proporzione le misure di R', b e u, si ha $A : A' = b : 1 \Rightarrow A : h = b : 1$, da cui ricaviamo $A = b \cdot h$ che è proprio ciò che volevamo dimostrare. □

7.3.2 Area del quadrato

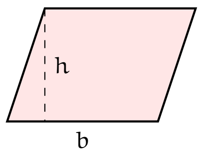
Poiché il quadrato è un particolare rettangolo avente le dimensioni congruenti tra loro, $b = h = l$, anche la sua area si calcolerà in modo analogo a quella del rettangolo $A = b \cdot h = l \cdot l$ ovvero

$$\boxed{A = l^2}$$

Dunque l'area del quadrato è data dal quadrato del lato.

7.3.3 Area del parallelogramma

Ricordando il teorema 7.1 sull'equivalenza tra parallelogrammi, secondo il quale due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno un lato (base) e l'altezza ad esso relativa tra loro congruenti, da cui deriva il corollario 7.2 che un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruenti a quelle del parallelogramma stesso, è immediato dedurre che anche l'area del parallelogramma si calcola



moltiplicando un lato, ritenuto la base, per l'altezza ad esso relativa, cioè

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

7.3.4 Area del triangolo

Anche in questo caso ci si deve rifare al teorema 7.3 sull'equivalenza tra un triangolo e un parallelogramma «Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente come base metà della base del triangolo ed altezza congruente a quella del triangolo». Appare allora evidente che l'area del triangolo è

$$\boxed{A = \frac{b}{2} \cdot h}$$

dove $b/2$ è la base del parallelogramma ad esso equivalente.

7.3.5 Area del trapezio

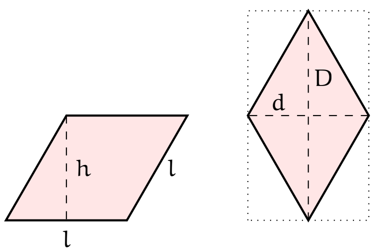
Sempre dai teoremi sull'equivalenza, sappiamo che «Un trapezio è equivalente ad un triangolo la cui base è congruente alla somma delle basi del trapezio e la cui altezza ad essa relativa è congruente all'altezza del trapezio» (teorema 7.5). Dunque l'area del trapezio sarà

$$\boxed{A = \frac{B+b}{2} \cdot h}$$

dove $B + b$ è la somma delle basi del trapezio, e quindi $(B + b)/2$ è la base del triangolo ad esso equivalente.

7.3.6 Area del rombo

Poiché il rombo è un particolare parallelogramma, la sua area si trova moltiplicando uno dei suoi lati per l'altezza ad esso relativa, cioè $A = l \cdot h$. Possiamo però notare che un rombo si può considerare come la metà di un rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alle diagonali del rombo (D e d). Come si può facilmente dimostrare, le due diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli congruenti ai quattro triangoli rettangoli esterni al rombo, e quindi il rombo è equivalente alla metà del rettangolo, per cui la sua area può essere espressa come



$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Si può inoltre dimostrare, in maniera del tutto analoga a quanto precedentemente descritto, che l'area di un qualsiasi quadrilatero che abbia le diagonali perpendicolari è determinabile in questo modo.

7.3.7 Area di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza

Ricordiamo anche in questo caso il teorema 7.6 «un poligono circoscrivibile ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza inscritta». Da qui segue immediatamente che l'area di questo tipo di poligono è data da

$$\boxed{A = \frac{2p \cdot r}{2} = p \cdot r}$$

dove, come di consuetudine, p indica il semiperimetro.

In particolare, se il poligono è regolare, sarà sempre possibile calcolare l'area per mezzo della formula

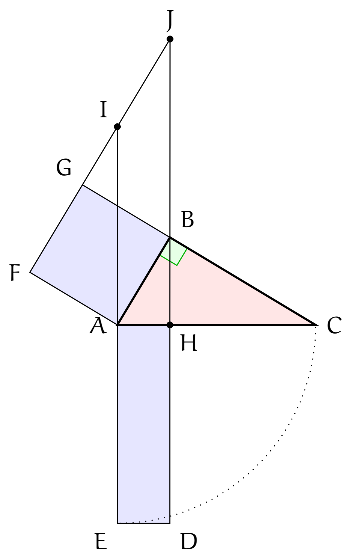
$$\boxed{A = p \cdot a}$$

dove a è l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta nel poligono regolare.

7.4 Teoremi di Pitagora e di Euclide

Teorema 7.8 (Primo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC e prolunghiamola di un segmento HD congruente all'ipotenusa stessa e costruiamo il rettangolo $AEDH$. Sul cateto AB costruiamo il quadrato $ABGF$. Prolunghiamo i lati HD ed AE del rettangolo ed il lato FG del quadrato e chiamiamo I e J i punti di intersezione tra questi prolungamenti. Otteniamo il parallelogramma $ABJI$. La tesi da dimostrare è che il quadrato $ABGF$ è equivalente al rettangolo $AEDH$.



Consideriamo innanzitutto i triangoli AIF e ABC, essi sono congruenti in quanto hanno entrambi un angolo retto ($A\widehat{F}I$ e $A\widehat{B}C$), $AF \cong AB$ in quanto lati di un quadrato, $F\widehat{A}I \cong B\widehat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo $I\widehat{A}B$. Dunque i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, ed in particolare avranno $AI \cong AC$.

Consideriamo ora il parallelogramma $ABJI$ ed il quadrato $ABGF$; essi sono equivalenti in quanto hanno il lato AB in comune e la stessa altezza BG relativa a questo lato. Consideriamo poi il parallelogramma $ABJI$ ed il rettangolo $AHDE$; anch'essi sono equivalenti poiché hanno basi congruenti AE e AI, entrambe congruenti ad AC, e stessa altezza AH. Allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che anche il quadrato $ABGF$ è equivalente al rettangolo $AEDH$ e così la tesi è provata. □

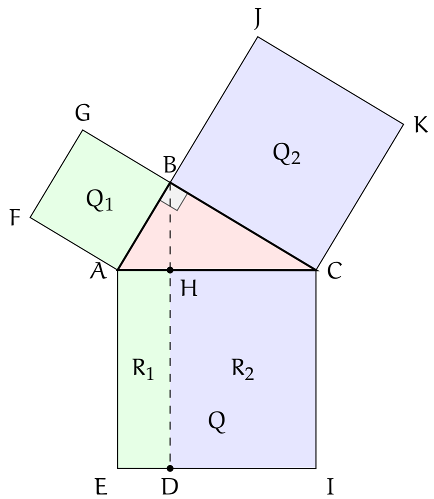
Vale anche il teorema inverso.

Teorema 7.9 (Primo teorema di Euclide [inverso])**.** *Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni il lato maggiore del triangolo e la proiezione del primo lato su di esso, allora il triangolo è rettangolo.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si usa la stessa costruzione fatta per il teorema diretto. Si inizia dimostrando nello stesso modo l'equivalenza tra il quadrato $ABGF$ ed il parallelogramma $ABJI$. Poiché per ipotesi il rettangolo $AHDE$ è equivalente al quadrato $ABGF$, allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che il rettangolo $AHDE$ ed il parallelogramma $ABJI$ sono equivalenti. Poiché parallelogramma e rettangolo hanno la stessa altezza AH, essendo equivalenti dovranno avere congruenti le basi $HD \cong BJ$. Ma per costruzione $HD \cong AC$, e quindi sarà anche $BJ \cong AC$, da cui segue $AI \cong BJ \cong AC$. Quindi i triangoli AIF ed ABC saranno congruenti per il primo criterio in quanto hanno $AI \cong AC$ e $AB \cong AF$, poiché lati di un quadrato, e $F\widehat{A}I \cong B\widehat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo $I\widehat{A}B$. Dunque avranno anche gli angoli $A\widehat{F}I \cong A\widehat{B}C$ e poiché $A\widehat{F}I$ è retto lo sarà anche $A\widehat{B}C$. □

Teorema 7.10 (di Pitagora)**.** *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dimostrazione. Dopo aver disegnato i quadrati Q_1 e Q_2 sui cateti e Q sull'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC, tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC e prolunghiamola finché non incontra il lato IE del quadrato Q, il quale risulta così diviso in due rettangoli R_1 ed R_2. Applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC avremo che $Q_1 \doteq R_1$ e che $Q_2 \doteq R_2$ in quanto, per costruzione, R_1 ed R_2 hanno la stessa altezza, pari alla lunghezza dell'ipotenusa AC e ognuno di essi ha la base pari alla proiezione sull'ipotenusa stessa del relativo cateto. Sommando quindi ambo i membri di queste due equivalenze otteniamo che $Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2$. Ma $R_1 + R_2 \doteq Q$, da cui segue, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, $Q \doteq Q_1 + Q_2$, che è proprio quanto volevamo dimostrare. □



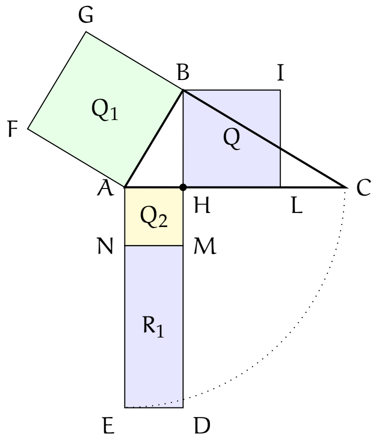
Anche per il teorema di Pitagora vale il teorema inverso.

Teorema 7.11 (di Pitagora [inverso])**.** *Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, allora il triangolo è rettangolo.*

Dimostrazione. Sia ABC il triangolo per cui vale il teorema di Pitagora; vogliamo dimostrare che questo triangolo è rettangolo. Consideriamo il triangolo rettangolo $A'B'C'$, i cui cateti $A'B'$ e $A'C'$ siano rispettivamente congruenti ai due lati del triangolo AB e AC. Al triangolo $A'B'C'$ possiamo applicare il teorema di Pitagora, per cui abbiamo che il quadrato costruito su $B'C'$ è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti $A'B'$ e $A'C'$. I quadrati costruiti sui lati congruenti AB e $A'B'$ sono congruenti, così come lo sono i quadrati costruiti su AC e $A'C'$, quindi avremo che: $Q_{AB} + Q_{AC} \doteq Q_{A'B'} + Q_{A'C'}$. Poiché per ipotesi $Q_{AB} + Q_{AC} \doteq Q_{BC}$ e, avendo applicato il teorema di Pitagora al triangolo $A'B'C'$, sarà anche $Q_{A'B'} + Q_{A'C'} \doteq Q_{B'C'}$. Per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che: $Q_{BC} \doteq Q_{B'C'}$. Poiché due quadrati sono equivalenti quando hanno lo stesso lato, avremo che $BC \cong B'C'$, e quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio. Allora saranno congruenti anche gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$, e poiché $\widehat{A'}$ è retto, lo sarà anche $\widehat{A}$. Quindi ABC è un triangolo rettangolo. □

Teorema 7.12 (Secondo teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che il quadrato Q che ha come lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo R_1 che ha come lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



La costruzione è la seguente: dopo aver disegnato il quadrato Q si disegnano anche il quadrato Q_1, che ha come lato il cateto AB, ed il rettangolo R, che ha come lati l'ipotenusa e la proiezione AH di AB sull'ipotenusa. All'interno di questo rettangolo possiamo individuare il quadrato Q_2, di lato AH, ed il rettangolo R_1, che ha come dimensioni $NM \cong AH$ e $MD \cong HD - HM \cong HC$, in quanto $HD \cong AC$ e $HM \cong AH$.

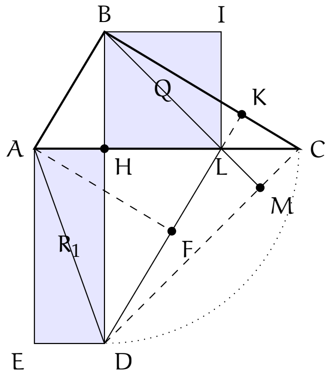
Consideriamo ora il triangolo rettangolo ABH, e applichiamo ad esso il teorema di Pitagora, risulta $Q_1 \doteq Q + Q_2$. Applichiamo ora al triangolo ABC il primo teorema di Euclide, si ha $Q_1 \doteq R$. Confrontiamo le due relazioni ed applichiamo la proprietà transitiva dell'equivalenza $Q + Q_2 \doteq R$. Ma $R \doteq Q_2 + R_1$, quindi sostituendo avremo $Q + Q_2 \doteq Q_2 + R_1$ e sottraendo ad ambo i membri la stessa quantità Q_2 otteniamo la tesi $Q \doteq R_1$. □

Anche per questo teorema vale il teorema inverso.

Teorema 7.13 (Secondo teorema di Euclide [inverso]). *Se in un triangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, il triangolo è rettangolo.*

Dimostrazione. Costruiamo il quadrato $BILH$ sull'altezza relativa all'ipotenusa ed il rettangolo $AHDE$ che ha come lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa; essi sono equivalenti per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo.

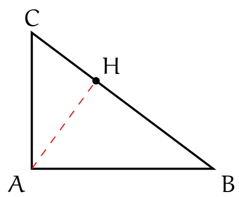
Congiungiamo D con C, tracciamo la diagonale BL del quadrato e prolunghiamola finché non incontra DC in M. Tracciamo infine la diagonale AD del rettangolo. Consideriamo i triangoli ADH e BHL: sono equivalenti in quanto metà di figure equivalenti. Ora consideriamo



i triangoli ADL e BDL, sono equivalenti in quanto somme di figure equivalenti: i triangoli ADH, BHL a cui aggiungiamo lo stesso triangolo HDL. Essendo equivalenti ed avendo la stessa base DL dovranno avere anche la stessa altezza $AF \cong BK$, cioè la stessa distanza tra AB e DK e quindi AB e DK sono paralleli.

Detto M il punto intersezione tra le rette DC e BL, notiamo che, essendo BHL e HDC triangoli rettangoli isosceli, avranno gli angoli alla base di 45°; ma è anche $H\widehat{L}B \cong M\widehat{L}C = 45°$ in quanto opposti al vertice, perciò $L\widehat{M}C = 90°$. Allora BM e CH sono due altezze del triangolo BDC, e poiché si incontrano nel punto L questo risulta essere l'ortocentro del triangolo, e poiché il segmento BK passa per l'ortocentro deve essere a sua volta altezza relativa a BC. Ma poiché avevamo già dimostrato che DK è parallelo al AB, se DK è perpendicolare a BC lo sarà anche AB e quindi il triangolo ABC è un triangolo rettangolo. □

7.5 Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora



Consideriamo il triangolo rettangolo ABC nella figura a fianco. Supponiamo di conoscere la misura dell'ipotenusa BC e della proiezione CH del cateto AC, sull'ipotenusa; allora possiamo applicare il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza del cateto AC: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH}$, da cui si ricava $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{CH}}$.

Se invece conosciamo la lunghezza del cateto AC e quella della sua proiezione CH e vogliamo trovare l'ipotenusa, allora avremo $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}}$.

Supponiamo ora di conoscere le misure delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, BH e CH, e di voler trovare la misura di AH, altezza relativa all'ipotenusa, applicando il secondo teorema di Euclide avremo $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$, da cui si ricava $\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}}$.

Se invece conosciamo l'altezza relativa all'ipotenusa ed una delle due proiezioni dei cateti, ad esempio CH, e vogliamo trovare la lunghezza dell'altra (BH), avremo $BH = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{CH}}$.

Per quanto riguarda poi le applicazioni del teorema di Pitagora, che sicuramente lo studente conosce già dalle scuole medie, ricordiamo che se abbiamo la misura dei due cateti avremo $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, da cui $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$; viceversa, conoscendo l'ipotenusa ed un cateto, ad esempio AC, avremo $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$.

Esempio 7.4. Calcolare perimetro ed area di un triangolo rettangolo che ha un cateto lungo 10 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa lunga 8 cm.

Facendo riferimento alla figura 7.6, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{CH} = 8$ cm.

Applichiamo il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}} = \dfrac{10^2}{8} = \dfrac{100}{8} = 12{,}5$ cm. Per trovare l'altro cateto possiamo applicare il teorema di Pitagora $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\dfrac{625}{4} - 100} = \sqrt{\dfrac{225}{4}} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ cm. Quando il teorema di Pitagora viene applicato per trovare un cateto si può anche semplificare il calcolo scomponendo la differenza di quadrati

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{(\overline{BC} - \overline{AC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{AC})} = \sqrt{\left(\frac{25}{2} - 10\right) \cdot \left(\frac{25}{2} + 10\right)} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{45}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^2}{2^2}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm.}$$

A questo punto conosciamo tutti i lati, quindi possiamo calcolare il perimetro $2p = 8 + 7{,}5 + 12{,}5 = 30$ cm e l'area $A = (\text{cateto} \times \text{cateto})/2 = 37{,}5$ cm^2.

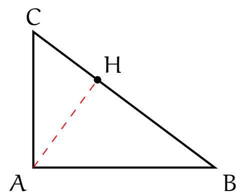


FIGURA 7.6: Esempi 7.4 e 7.5

Esempio 7.5. Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza relativa all'ipotenusa misura 12 cm. Il perimetro del triangolo formato dall'altezza e da uno dei cateti è 36 cm. Determina la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa e il perimetro del triangolo ABC.

Dai dati si ha che $AH = 12$ cm, e $2p_{ABH} = 36$ cm (figura 7.6). Questo vuol dire che $AB + BH = 2p - AH = 24$ cm. Posso allora porre $AB = x$, da cui $BH = 24–x$. Applichiamo il teorema di Pitagora ed otteniamo l'equazione

$$x^2 = 12^2 + (24 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12^2 + 24^2 - 48x + x^2$$

sviluppando i calcoli, il termine in x^2 si elimina e otteniamo l'equazione di primo grado $48x = 24^2 + 12^2$. Per evitare i calcoli raccogliamo al secondo membro 12^2, quindi ricaviamo $x = \dfrac{12^2 \cdot (2^2 + 1)}{4 \cdot 12} = 15$ cm.

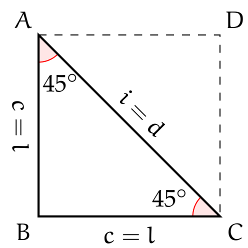
A questo punto possiamo ottenere $BH = 24 - x = 24 - 15 = 9$ cm. Oppure, ricorrendo alla terna pitagorica fondamentale 3, 4, 5, di cui i lati del triangolo ABH sono multipli secondo il numero 3, ho $BH = 3 \cdot 3 = 9$ cm.

Per ricavare CH applichiamo il secondo teorema di Euclide $\overline{CH} = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{BH}} = \dfrac{144}{9} = 16$ cm.

Sommando CH con BH troviamo l'ipotenusa $BC = 25$ cm. Per ricavare l'altro cateto ricorriamo alla terna pitagorica fondamentale $AB = 3 \cdot 5 = 15$ cm, $BC = 5 \cdot 5 = 25$ cm, da cui $AC = 4 \cdot 5 = 20$ cm. Il perimetro vale quindi $2p = 15 + 25 + 20 = 60$ cm.

7.6 Applicazioni dell'algebra alla geometria

7.6.1 Triangoli rettangoli con angoli di 45°

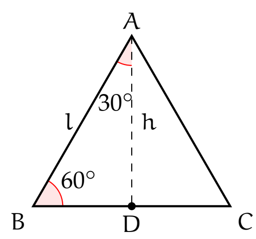


Un triangolo rettangolo avente un angolo di 45° è necessariamente isoscele, in quanto anche il terzo angolo varrà 45°, infatti $180° - (90° + 45°) = 45°$. Indicando con i l'ipotenusa e con c ognuno dei due cateti, applicando il teorema di Pitagora avremo $i = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$.

Viceversa, se conosciamo l'ipotenusa e vogliamo ricavare i cateti, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $c = \dfrac{i}{\sqrt{2}} = i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Un triangolo rettangolo isoscele può anche essere interpretato come metà di un quadrato, di cui i cateti sono i lati e l'ipotenusa è la diagonale. Indicando con l il lato e d la diagonale, anche per un quadrato varranno quindi le precedenti relazioni, ovvero $d = l\sqrt{2}$ e $l = d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7.6.2 Triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°



Un triangolo rettangolo con un angolo di 30° avrà il secondo angolo acuto di 60°, infatti $180° - (90° + 30°) = 60°$. Questo triangolo può essere interpretato come metà di un triangolo equilatero: l'ipotenusa coincide con il lato di questo triangolo, il cateto adiacente all'angolo di 60° è metà del lato del triangolo equilatero ed il cateto adiacente all'angolo di 30° è l'altezza del triangolo equilatero. Dunque, indicando con i l'ipotenusa, il cateto BD, adiacente all'angolo di 60°, varrà $\dfrac{i}{2}$, mentre il cateto AD, opposto all'angolo di 60° e adiacente a quello di 30°, applicando il teorema di Pitagora, varrà $AD = \sqrt{i^2 - \left(\dfrac{i}{2}\right)^2} = \sqrt{i^2 - \dfrac{i^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3i^2}{4}} = i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Viceversa, se conosciamo il cateto AD e vogliamo ricavare l'ipotenusa, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $i = \dfrac{2AD}{\sqrt{3}} = 2AD\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Indicando quindi con l il lato del triangolo equilatero e con h la sua altezza avremo analogamente $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $l = 2h\frac{\sqrt{3}}{3}$.

In questo modo possiamo anche determinare l'area di un qualunque triangolo equilatero conoscendone soltanto il lato $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l\frac{\sqrt{3}}{2} = l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Esempio 7.6. Gli angoli adiacenti alla base minore di un trapezio isoscele misurano 135°. Determinare area e perimetro del trapezio, sapendo che le basi misurano 4 cm e 20 cm.

Tracciamo l'altezza AH (figura 7.7); si verrà così a determinare il triangolo rettangolo ABH. Poiché $A\widehat{B}H = 45°$, anche $B\widehat{A}H = 45°$. Avremo quindi $\overline{BH} = \overline{AH}$; ma $\overline{BH} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2} = 8$ cm, quindi $\overline{AH} = 8$ cm. L'area vale dunque $A = \frac{(20+4)\cdot 8}{2} = 96$ cm^2.

Per calcolare il perimetro ricordiamo che $\overline{AB} = \overline{BH}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm e $\overline{CD} = \overline{AB}$. Dunque $2p = 20 + 4 + 2 \cdot 8\sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2} = 8(3 + 2\sqrt{2})$ cm.

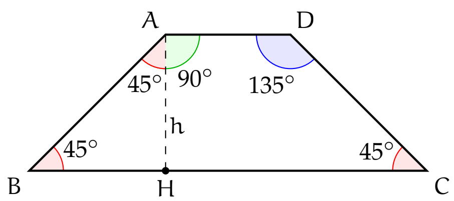


FIGURA 7.7: Esempio 7.6

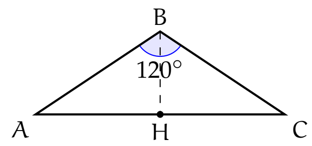


FIGURA 7.8: Esempio 7.7

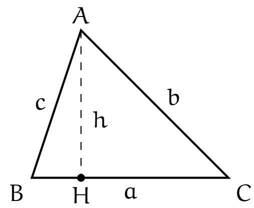
Esempio 7.7. Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di 120°. Determina perimetro ed area sapendo che la base è lunga 60 cm.

Tracciamo l'altezza BH (figura 7.8). Poiché il triangolo è isoscele, l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi $AH \cong HC$; ma BH è anche bisettrice dell'angolo al vertice B, quindi si ottengono due triangoli rettangoli tra loro congruenti, ciascuno dei quali ha in B un angolo di 60°. Consideriamo uno dei due triangoli, ad esempio ABH; il cateto $\overline{AH} = 30$ cm; poiché l'angolo $\widehat{A} = 30°$, per calcolare $\overline{AB}$ si deve usare la formula inversa $\overline{AB} = \frac{2\overline{AH}\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 30\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$ cm. Il perimetro vale dunque $2p = 60 + 40\sqrt{3} = 20(3 + 2\sqrt{3})$ cm.

Per calcolare l'area bisogna prima trovare $\overline{BH}$, che è congruente a metà ipotenusa $\overline{BH} = 10\sqrt{3}$ cm. Quindi $A = \frac{60 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3}$ cm^2.

7.6.3 Formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo

La *formula di Erone* permette di calcolare l'area di un triangolo qualsiasi se si conoscono le misure dei suoi lati.



Sia a la misura del lato BC e sia H il piede dell'altezza h del triangolo rispetto a BC. Ponendo $BH = x$ si avrà $HC = a - x$. Dal teorema di Pitagora si ha

$$h^2 = c^2 - x^2 \tag{7.1}$$

ma anche

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2.$$

Uguagliamo le due espressioni e svolgiamo i calcoli. Otteniamo

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

da cui

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Sostituendo questo valore di x nella (7.1), otteniamo

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{4a^2c^2 - \left(c^2 + a^2 - b^2\right)^2}{4a^2}.$$

Poiché il numeratore è una differenza di quadrati possiamo scomporlo ottenendo

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{\left[2ac - \left(c^2 + a^2 - b^2\right)\right] \cdot \left[2ac + \left(c^2 + a^2 - b^2\right)\right]}{4a^2} \\ &= \frac{\left[2ac - c^2 - a^2 + b^2\right] \cdot \left[2ac + c^2 + a^2 - b^2\right]}{4a^2} \\ &= \frac{\left[b^2 - (a - c)^2\right] \cdot \left[(a + c)^2 - b^2\right]}{4a^2}. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto nuovamente delle differenze di quadrati che possiamo ulteriormente scomporre

$$h^2 = \frac{(b + a - c) \cdot (b - a + c) \cdot (a + c + b) \cdot (a + c - b)}{4a^2}.$$

Al numeratore abbiamo

$$\begin{gathered} a + c + b = 2p \\ b + a - c = b + a + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \\ b - a + c = 2p - 2a = 2(p - a) \\ a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b) \end{gathered}$$

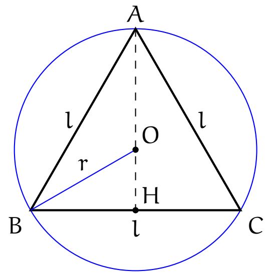
quindi

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)}{4a^2}} = \sqrt{\frac{16p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}{4a^2}} \\ &= \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \end{aligned}$$

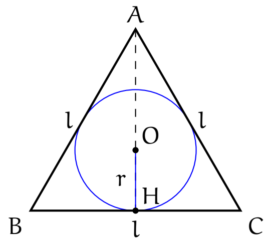
Infine calcoliamo l'area, ottenendo così la formula di Erone

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{a} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{a}} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}.$$

7.6.4 Triangoli equilateri inscritti e circoscritti



Consideriamo un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e vediamo che relazione c'è tra il suo lato ed il raggio della circonferenza stessa. Poiché in un triangolo equilatero il circocentro coincide con il baricentro, ricordando il teorema del baricentro, secondo il quale le tre mediane di un triangolo si incontrano in uno stesso, il baricentro appunto, che le divide in modo tale che la parte che contiene il vertice è il doppio dell'altra, avremo che $AO = r$, $OH = r/2$, quindi l'altezza AH (che coincide con la mediana) è data da $AH = r + \frac{r}{2} = \frac{3}{2}r$. Per quanto visto precedentemente, il lato è dato da $l = \frac{3}{2}r \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = r\sqrt{3}$.



Consideriamo ora un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza. Per quanto detto prima, AO, parte della mediana che contiene il vertice, è il doppio di $OH = r$, raggio della circonferenza inscritta, e quindi, se conosciamo il raggio della circonferenza inscritta, avremo che AH (mediana e altezza del triangolo) vale $3r$. Da qui possiamo, anche in questo caso, ricavare il lato del triangolo $l = 3r\frac{2\sqrt{3}}{3} = 2r\sqrt{3}$.

Esempio 7.8. Determina l'area di un triangolo equilatero sapendo che il raggio della circonferenza inscritta è lungo 6 cm. Determina quindi anche il raggio della circonferenza circoscritta.

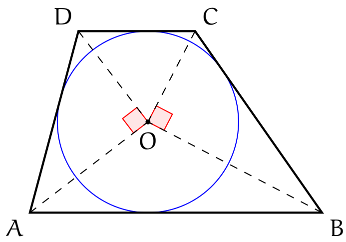
Facendo riferimento alla figura precedente, $AH = 3r$, quindi $AH = 18$ cm. Ognuno dei lati vale $2r$, quindi $BC = 12\sqrt{3}$ cm. L'area è $A = \frac{12\sqrt{3} \cdot 18}{2} = 108\sqrt{3}$ cm^2. Il raggio della circonferenza circoscritta è $R = AO = 2r = 12$ cm.

7.6.5 Trapezi circoscritti ad una circonferenza

Sappiamo che in un qualunque quadrilatero circoscrivibile ad una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due; questo teorema vale ovviamente per tutti i trapezi circoscrivibili. Inoltre possiamo dimostrare un'altra importante proprietà.

Proprietà 7.14. *In ogni trapezio circoscrivibile ad una circonferenza, ognuno dei due triangoli che si ottengono congiungendo gli estremi di un lato obliquo con il centro della circonferenza è un triangolo rettangolo.*

Infatti, considerando un trapezio $ABCD$ circoscritto ad una circonferenza di centro O, AO e DO sono le bisettrici degli angoli in A e in D, lo stesso dicasi per BO e CO (vedi il corollario 5.23 sulle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza, a pag. 149). Poiché gli angoli in A e in D sono tra loro supplementari, così come gli angoli in B e in C, le loro metà saranno complementari, cioè $O\widehat{D}A + D\widehat{A}O = 90°$ e $O\widehat{C}B + C\widehat{B}O = 90°$. Quindi



gli angoli $D\widehat{O}A$ e $C\widehat{O}B$ sono retti, per differenza tra 180° (somma degli angoli interni di un triangolo) e 90° (somma degli altri due angoli di ognuno dei triangoli considerati).

Queste importanti proprietà permettono di risolvere la maggior parte dei problemi sui trapezi circoscrivibili.

Esempio 7.9. In un trapezio rettangolo (figura 7.9), circoscrivibile ad una circonferenza di raggio 6 cm, il lato obliquo misura 25/2 cm. Determina perimetro ed area del trapezio.

L'altezza CH è congruente al diametro della circonferenza inscritta, quindi $CH = AD = 12$ cm. Applicando il teorema sui quadrilateri circoscrivibili ad una circonferenza, abbiamo $BC + AD = AB + CD$. Poiché $BC + AD = (12 + 25/2) = 49/2$ cm, per trovare il perimetro basta moltiplicare questa misura per 2 e si ha $2p = 49/2 \cdot 2 = 49$ cm. Anche il calcolo dell'area è immediato: $A = \dfrac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \dfrac{\frac{49}{2} \cdot 12}{2} = 147\ \text{cm}^2$.

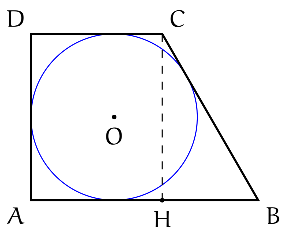


FIGURA 7.9: Esempio 7.9

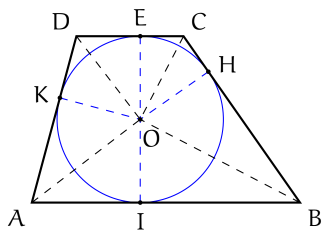


FIGURA 7.10: Esempio 7.10

Esempio 7.10. Nel trapezio $ABCD$ rappresentato nella figura 7.10, circoscritto ad una circonferenza, il punto E di tangenza con la base minore CD la divide in due parti: $CE = 6a$ e $DE = 12a$. Sapendo che la base maggiore AB è il doppio del lato obliquo AD, determina perimetro ed area del trapezio.

Dai dati si deduce immediatamente che la base minore $CD = 18a$. Per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza sappiamo che, se OH è il raggio, sarà $CE = CH = 6a$, $DE = DK = 12a$. Applichiamo ora il secondo teorema di Euclide prima al triangolo rettangolo BOC e poi al triangolo rettangolo AOD, si ha $\overline{OH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ e $\overline{OK}^2 = \overline{DK} \cdot \overline{AK}$. Poiché $\overline{OH} = \overline{OK}$ in quanto raggi, possiamo uguagliare i secondi membri ed avremo $\overline{BH} \cdot \overline{HC} = \overline{DK} \cdot \overline{AK}$. Sostituiamo i valori forniti dal testo ed abbiamo $\overline{BH} \cdot 6a = \overline{AK} \cdot 12a$, da cui ricaviamo $\overline{BH} = 2\overline{AK}$. Poniamo quindi $\overline{AK} = x$, allora sarà $\overline{AD} = x + 12a$, $\overline{BH} = 2x$ e

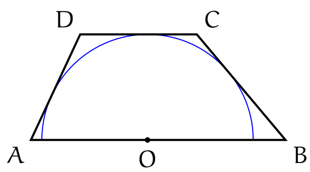
$\overline{BC} = 2x + 6a$. Poiché inoltre $\overline{AB} = 2\overline{AD}$, avremo $\overline{AB} = 2(x + 12a)$. Ma $\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{BI}$, e cioè, sempre per il teorema delle tangenti, $\overline{AB} = \overline{BH} + \overline{AK}$, cioè $\overline{AB} = 2x + x = 3x$. Uguagliando anche in questo caso i secondi membri avremo $2(x + 12a) = 3x$, da cui $x = \overline{AK} = 24a$. Sostituendo il valore di x nelle uguaglianze precedenti avremo: $\overline{AB} = 72a$, $\overline{BC} = 54a$ e $\overline{AD} = 36a$.

Calcoliamo il perimetro: $2p = 72a + 54a + 36a + 18a = 180a$.

Per calcolare l'area occorre determinare la lunghezza del raggio, in quanto l'altezza del trapezio è uguale al diametro della circonferenza. Applicando il secondo teorema di Euclide, poiché $\overline{BH} = 2x = 48a$, sarà $\overline{OH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC} = 48a \cdot 6a = 288a^2$ e quindi $\overline{OH} = 12a\sqrt{2}$. Dunque l'altezza del trapezio vale pertanto $2\overline{OH} = 24a\sqrt{2}$. L'area allora sarà $A = \dfrac{(72a + 18a) \cdot 24a\sqrt{2}}{2} = 1\,080a^2\sqrt{2}$.

7.6.6 Trapezi circoscritti ad una semicirconferenza

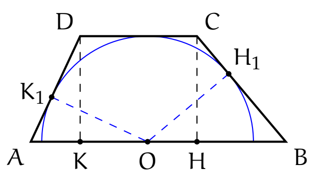
Definizione 7.5. Un *trapezio* si dice *circoscritto ad una semicirconferenza* se la sua base maggiore sta sulla retta che contiene il diametro della circonferenza e la base minore ed i lati obliqui sono tangenti alla semicirconferenza.



Per i trapezi appartenenti a questa categoria, sussiste la seguente proprietà.

Proprietà 7.15. *Dato un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, ognuna delle due parti in cui la base maggiore è divisa dal centro della semicirconferenza è congruente al lato obliquo ad essa adiacente.*

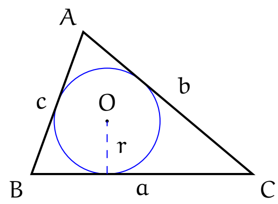
Dimostrazione. Dato il trapezio $ABCD$ nella figura a fianco ciò significa che $OB \cong BC$ e $OA \cong AD$. Dimostriamo la proprietà considerando i due triangoli OBH_1 e BCH (ragionamento analogo varrà per gli altri due triangoli OAK_1 e ADK); questi due triangoli sono entrambi rettangoli in quanto CH è altezza ($C\widehat{H}B$ è retto) e OH_1 è raggio che cade nel punto di tangenza ($O\widehat{H_1}B$ è retto); inoltre hanno $CH \cong OH_1$ in quanto entrambi raggi e l'angolo acuto $H\widehat{B}C$ in comune, quindi sono congruenti per uno dei criteri di congruenza dei triangoli rettangoli (un cateto e l'angolo acuto ad esso opposto rispettivamente congruenti). Da qui segue la congruenza tra le due ipotenuse $OB \cong BC$. □



Esempio 7.11. Nel trapezio $ABCD$, circoscritto ad una semicirconferenza, la base minore ed un lato obliquo misurano entrambi 6 cm, mentre la base maggiore misura 15 cm. Calcolare perimetro ed area del trapezio.

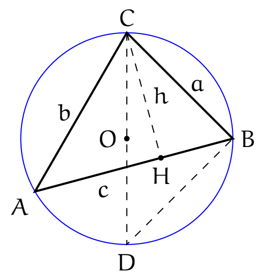
Per quanto appena dimostrato, la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui, dunque, considerando la figura precedente, avremo $AB = BC + AD$; sapendo che uno dei due lati obliqui, ad esempio AD, vale 6 cm, ricaviamo subito $BC = AB - AD = 15 - 6 = 9$ cm. Il perimetro dunque vale $2p = 15 + 9 + 6 + 6 = 36$ cm. Per calcolare l'area abbiamo bisogno dell'altezza. Poniamo $BH = x$, quindi sarà $AK = AB - (CD + BH) = 15 - 6 - x = 9 - x$. Applichiamo ora il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli BCH e DAK, si ha $CH^2 = BC^2 - BH^2$; $DK^2 = AD^2 - DK^2$. Poiché $CH = DK$, l'uguaglianza varrà anche per i loro quadrati e quindi, per la proprietà transitiva, possiamo uguagliare i secondi membri ed avremo $BC^2 - BH^2 = AD^2 - DK^2$. Sostituiamo i valori $81 - x^2 = 36 - (9 - x)^2$. Svolgiamo i calcoli, semplifichiamo ed otteniamo $18x = 126$, da cui $x = 7$. Dunque $HB = 7$ cm. Poiché $CH^2 = BC^2 - BH^2 = 81 - 49 = 32$, si ha $CH = 4\sqrt{2}$ (possiamo accettare solo la soluzione positiva in quanto si tratta di una lunghezza). Calcoliamo l'area $A_{ABCD} = \dfrac{(15+6)\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

7.6.7 Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo



Ricordando che l'area di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza, e quindi in particolare l'area di un triangolo (che è sempre circoscrivibile), si può trovare come prodotto tra il semiperimetro e l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta, allora, applicando la formula inversa, il raggio della circonferenza inscritta sarà $r = \dfrac{2A}{2p}$, cioè sarà dato dal rapporto tra la doppia area ed il perimetro del triangolo.

7.6.8 Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo



Consideriamo il triangolo ACH, ottenuto tracciando l'altezza CH relativa alla base AB del triangolo ABC, ed il triangolo BCD, ottenuto tracciando il diametro CD. Questi due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine, in quanto hanno entrambi un angolo retto $C\widehat{H}A$ e $C\widehat{B}D$ (l'angolo è retto in quanto inscritto in una semicirconferenza), gli angoli $C\widehat{A}H \cong C\widehat{D}B$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC, quindi anche gli angoli $A\widehat{C}H$ e $D\widehat{C}B$ sono congruenti, poiché differenze di angoli congruenti. Possiamo dunque scrivere la proporzione tra i lati omologhi $CD : AC = BC : CH$.

Indicando con R il raggio della circonferenza circoscritta e con a, b, c le misure dei lati e con h quella dell'altezza relativa al lato AB, si avrà $CD = 2R$, $AC = b$, $BC = a$ e $CH = h$. Sostituendo questi valori nella proporzione otteniamo $2R : b = a : h$, dalla quale ricaviamo

$R = \dfrac{a \cdot b}{h}$ che esprime il raggio della circonferenza circoscritta in funzione delle misure dei lati del triangolo e della sua altezza.

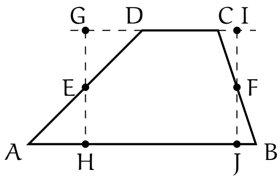
Se poi conoscessimo solo i lati del triangolo, allora dovremmo applicare la formula che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per il terzo lato $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{h \cdot c}$, in quanto $A = \dfrac{c \cdot h}{2}$.

7.7 Esercizi

7.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.2 - Poligoni equivalenti

7.1. Enunciate e dimostrate il teorema le cui ipotesi e tesi sono indicate di seguito.
Ipotesi: $AB \parallel DC$, $GH \perp AB$, $CJ \perp AB$, $AE \cong DE$, $CF \cong FB$.
Tesi: $ABCD \doteq GHJI$.



7.2. Dai vertici B e C dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC traccia le rette rispettivamente parallele ai cateti AC e AB; sia D il loro punto di intersezione. Dimostrare che $ABDC \doteq 2 \cdot ABC$ e che $MNPQ \doteq 2 \cdot ABC$ dove MNPQ è il rettangolo avente un lato congruente all'ipotenusa BC e l'altro lato congruente all'altezza AH relativa all'ipotenusa.

7.3. Costruire un rettangolo equivalente ad un trapezio dato.

7.4. Dimostrare che la mediana relativa ad un lato di un triangolo divide il triangolo dato in due triangoli equivalenti.

7.5. Dimostrare che in un parallelogramma ABCD sono equivalenti i quattro triangoli determinati dalle diagonali AC e BD.

7.6. Assegnato il trapezio ABCD, detto E il punto di intersezione delle diagonali DB e AC, dimostrare che DEA è equivalente a BEC.

7.7. Dimostra che le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli due dei quali sono equiestesi.

7.8. Dimostra che due triangoli sono equiestesi se hanno due lati ordinatamente congruenti e gli angoli tra essi compresi supplementari.

7.9. Dimostra che un triangolo ABC è diviso da una sua mediana in due triangoli equiestesi.

7.6 - Applicazioni dell'algebra alla geometria

7.10. Sia ABC un triangolo con $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm e $\overline{AC} = 3$ cm. Condurre una parallela ad AC che intersechi AB in D e BC in E. Sapendo che $CE = BD$, trovare il perimetro del triangolo BDE.

7.11. Nel trapezio ABCD, le basi misurano 5 cm e 15 cm e l'area vale 120 cm^2. Determina la distanza tra la base maggiore ed il punto di intersezione dei lati obliqui del trapezio.

7.12. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB = 8a$. Da un punto D di AC si tracci la parallela ad AB che incontri BC in E; sia $DE = 6a$. Sapendo che CDE e ABED sono isoperimetrici, trovare l'area di ABC.

7.13. Nel trapezio rettangolo ABCD circoscritto ad una circonferenza la base maggiore è 4/3 dell'altezza ed il perimetro misura 48 cm. Trovare l'area del trapezio.

7.14. Sia ABC un triangolo rettangolo con il cateto $AC = 32a$. Sapendo che $BC : AB = 5 : 3$, trovare il perimetro del triangolo. Tracciare poi la parallela ad AB, che intersechi CA in D e CB in E. Sapendo che CD è medio proporzionale tra CE ed AB, trovare l'area del trapezio ABED.

7.15. Sia ABC un triangolo isoscele di base $BC = 4$ cm e di area $40\ \text{cm}^2$. Dopo aver trovato la misura dell'altezza AH si tracci l'altezza CK e la si prolunghi di un segmento KD tale che l'angolo $H\widehat{A}D$ sia congruente ad uno degli angoli alla base. Dopo aver dimostrato che $C\widehat{A}D$ è retto, trovare il perimetro del triangolo CAD.

7.16. Due lati consecutivi di un parallelogramma misurano $2a$ e $4a$ e l'angolo tra essi compreso misura $60°$. Trovare la misura dell'area e delle diagonali.

7.17. Determinare perimetro ed area di un trapezio rettangolo circoscritto ad una circonferenza, sapendo che il lato obliquo è diviso dal punto di tangenza in due parti che misurano rispettivamente $4a$ e $9a$.

7.18. Determinare perimetro ed area di un triangolo isoscele, sapendo che la base misura $10a$ e che l'angolo adiacente ad uno degli angoli alla base misura $150°$.

7.19. Nel trapezio $ABCD$ la base maggiore, AB, misura 15 cm e la minore, CD, misura 5 cm. Prolungando i lati obliqui si ottiene un triangolo rettangolo. Trovare il perimetro del trapezio e del triangolo rettangolo CDE sapendo che la differenza tra le due basi è uguale alla differenza tra il doppio di BC e AD.

7.20 (Giochi di Archimede 2011). In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare ad AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF?

7.21. È dato un trapezio isoscele avente un angolo di $45°$ e il lato obliquo che misura 2 cm. Trovare l'area sapendo che la base minore misura $\sqrt{3}$ cm.

7.22. Nella circonferenza di diametro BD sono inscritti i triangoli ABD e BDC, con A e C da parti opposte rispetto a BD. Sia H la proiezione di C su BD. Sapendo che $AB = 16$ cm e che il rapporto tra AD e BD e tra BH e HD è $3/5$, trovare il perimetro di $ABCD$.

7.23. Il quadrato $ABCD$ ha il lato di 2 m; costruite sul lato DC il triangolo isoscele DEC di base DC e avente $D\widehat{E}C = 120°$; siano F e G i punti di intersezione delle rette ED e EC con la retta AB. Determinate la misura dei lati del triangolo EFG.

7.24. È dato il triangolo equilatero ABC; la semiretta r di origine B è interna all'angolo ABC e lo divide in due parti di cui $ABP = 45°$, $P0r \cap AC$. Sapendo che la distanza di P dal lato AB è di 2 m, calcolate il perimetro del triangolo equilatero dato.

7.25. Su ciascun lato del triangolo equilatero ABC costruite un quadrato. Sapendo che l'altezza del triangolo equilatero misura $3\sqrt{3}$ m, determinate il perimetro e l'area dell'esagono che si forma congiungendo i vertici dei quadrati. Costruite il rettangolo equivalente all'esagono.

7.26. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ di base maggiore AB, l'angolo acuto di vertice B misura $45°$ e l'altezza è di 8 m. Sapendo che la base minore è $3/4$ dell'altezza, determinate perimetro e area del trapezio.

7.27. Nel parallelogramma $ABCD$ la diagonale minore AC è perpendicolare al lato BC e forma col lato AB un angolo di $45°$. Sapendo che $AC = 5$ m, calcolate il perimetro e l'area del parallelogramma.

7.28. Il trapezio $ABCD$ di base maggiore AB, ha $\widehat{A} = 45°$ e $\widehat{B} = 60°$; sapendo che la base minore è uguale all'altezza che misura 12 cm, determinate perimetro e area del trapezio.

7.29. Il quadrilatero $ABCD$ è spezzato dalla diagonale AC nel triangolo rettangolo isoscele ABC retto in B e nel triangolo ADC isoscele su AC, avente l'altezza DH doppia della base. Sapendo che $AB = 5$ m, calcolate il perimetro e l'area del quadrilatero.

7.30. Il triangolo isoscele ABC ha l'angolo in A opposto alla base BC di $120°$ ed è circoscritto ad una circonferenza di raggio $OH = \sqrt{6}$ m; calcolate perimetro e area del triangolo dato.

7.31. Nel triangolo ABC l'angolo in A misura $60°$ e sia AE la sua bisettrice (E su BC). Sapendo che $AE = 8$ m, determinate la misura delle distanze EH ed EK del punto E rispettivamente dai lati AB e AC e il perimetro del quadrilatero $AHEK$. È vero che tale quadrilatero è equivalente al triangolo equilatero di lato 8 m? È vero che tale quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza? Se la risposta è affermativa stabilite il suo centro e determinate la misura di detta circonferenza.

7.32. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la base minore è metà dell'altezza. Determinate perimetro e area in funzione della misura x della base minore nei casi in cui l'angolo acuto del trapezio è di

a) $45°$;
b) $30°$;
c) $60°$.

7.33. Il triangolo ABC è rettangolo e l'angolo di vertice C misura $30°$; detta AP la bisettrice dell'angolo retto, con P su BC, e sapendo che $\overline{AP} = a$, determinate, in funzione di a, perimetro e area del triangolo dato.

7.34. Il segmento AC è la diagonale del quadrilatero $ABCD$ avente $A\hat{B}C = C\hat{A}D = 90°$ e $B\hat{C}A = A\hat{D}C = 60°$. È vero che $ABCD$ è un trapezio rettangolo? Calcolate perimetro e area del quadrilatero sapendo che $\overline{AC} = 2a$.

7.35. Il quadrato $ABCD$ ha i suoi vertici sui lati del triangolo equilatero HKL (A e B appartengono a KL, C a HL e D a HK); sapendo che $\overline{AB} = 3a$, calcolate il perimetro e l'area del triangolo equilatero.

7.36. In un parallelogramma di area 12 m^2, le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra e uno degli angoli interni misura $60°$. Determina la lunghezza delle diagonali.

7.37. Nel triangolo ABC di altezza $CH = 8$ m, determina a quale distanza da C si deve condurre una parallela al lato AB in modo che il triangolo ottenuto sia equivalente alla metà di ABC.

7.38. La base di un rettangolo è più lunga di 8 cm dell'altezza ed è più corta di 10 cm della diagonale. Calcola perimetro ed area del rettangolo.

7.39. In un triangolo equilatero ABC di lato l individua sul lato AB un punto P tale che detti H e K i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati AC e BC risulti $\overline{PH}^2 + \overline{PK}^2 = \overline{PC}^2 + 12{,}67$

7.40. Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto tra le aree delle due figure?

7.41. In un triangolo rettangolo ABC, retto in A, si tracci una parallela DE al cateto AB. Sapendo che l'area di DEC è i $3/4$ di quella di ABC e che $\overline{AC}$ misura 1 m, quanto misura $\overline{DC}$?

7.42. Dato il quadrato $ABCD$ con M punto medio di AB ed N punto medio di CD, tracciare i segmenti AN, BN, DM e CM. Siano P l'intersezione di AN con DM e Q l'intersezione di BN e CM. Che figura è $MQNP$? Quanti triangoli ci sono nella figura? Calcolare l'area di $MQNP$ e l'area di uno dei triangoli ottusangoli, sapendo che il lato del quadrato è 12 cm.

7.43. Disegna un rombo con la diagonale minore lunga 6 cm e la diagonale maggiore 8 cm. Costruisci su ciascun lato del rombo un quadrato. Unisci i vertici liberi dei quadrati formando un ottagono. Calcolane l'area. Calcola anche l'area dei quattro triangoli che si sono formati. Calcola inoltre la misura degli angoli interni dell'ottagono.

7.44. Disegna un quadrato $ABCD$ e sul lato AB poni i punti M ed N in modo che $AM \cong MN \cong NB$. Che figura è $MNCD$?

Calcola il rapporto tra l'area di $MNCD$ e quella di $ABCD$. Calcola il perimetro di $MNCD$ sapendo che l'area del quadrato è 10 cm^2.

7.45. Disegna un triangolo isoscele ABC di base $AC = 40$ mm e lato obliquo $AB = 52$ mm. Costruisci sulla base AC il triangolo ACD di area doppia di ABC e determina il perimetro del quadrilatero $ABCD$. Di che figura si tratta?

7.46. Il parallelogramma $ABCD$ ha la base AB lunga 12 cm e l'altezza di 6 cm. Disegna su AB un punto H e su CD un punto K tali che $DK = BH = 3$ cm. Considera i due quadrilateri in cui il parallelogramma rimane diviso dal segmento HK: che quadrilateri sono? Calcolane l'area. Calcola inoltre il rapporto tra l'area di $HBCD$ e quella di $ABCD$.

7.47. Calcola l'altezza del rombo avente le diagonali di 36 cm e 48 cm. Calcola l'area del trapezio equivalente al rombo, sapendo che l'altezza del trapezio è di 24 cm e che la base maggiore è il doppio di quella minore.

7.48. Il rettangolo R ha base $AB = 9$ cm e l'altezza BC è i $4/3$ di AB. Calcola il perimetro e l'area di R. Disegna il parallelogramma P equivalente al rettangolo R e avente la base congruente alla diagonale del rettangolo. Calcola l'altezza di P.

7.49. Calcola l'area del parallelogramma P di base 4,5 cm e altezza 2 cm e con il lato obliquo che è $5/4$ dell'altezza. Disegna la diagonale AC e traccia l'altezza relativa ad AB del triangolo ABC. Calcola l'area del triangolo ABC.

7.50. I lati del triangolo ABC hanno le seguenti misure $AB = 21$ cm, $BC = 20$ cm e $AC = 13$ cm; calcola l'area del parallelogramma $A'B'C'D'$ di base $AB \cong A'B'$, lato $AC \cong A'C'$ e diagonale $B'C' \cong BC$ (ricorda la formula di Erone).

7.51. Dato il rombo $ABCD$, avente perimetro di 10 cm e la diagonale maggiore di 4 cm, calcola la misura della diagonale minore, l'area del rombo e la sua altezza. Considera un triangolo isoscele equivalente al rombo e avente la sua stessa altezza. Calcolane la misura di ciascun lato.

7.52. Un rombo ha l'area di 336 cm^2, una diagonale uguale alla base di un triangolo di altezza 20,2 cm e area di 141,4 cm^2. Determina il perimetro del rombo.

7.53. Determina l'area del quadrato formato dai 4 vertici liberi di 4 triangoli equilateri costruiti sui lati di un quadrato di lato 3 cm.

7.54. Determina l'area del rombo intersezione di due triangoli equilateri costruiti sui lati opposti di un quadrato di lato 10 cm e aventi il vertice che cade internamente al quadrato.

7.55. Determina le misure degli angoli del triangolo AED formato disegnando le diagonali EA e AD di un esagono regolare $ABCDEF$.

7.56. Determina le misure degli angoli del triangolo AEC formato disegnando le diagonali EA ed EC di un ottagono regolare $ABCDEFGH$.

7.57. Determina le misure degli angoli del triangolo AFC formato disegnando le diagonali AF e FC di un ottagono regolare $ABCDEFGH$.

7.58. La differenza tra le diagonali di un rombo è 7 cm e una è $5/12$ dell'altra. Determina l'area di un triangolo isoscele il cui perimetro supera di 6 cm quello del rombo e la cui base è 8 cm.

7.59. Determinare l'area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari sapendo che l'una è $5/8$ dell'altra e che la loro somma è 39 cm.

7.60. Determinare la misura degli angoli di un parallelogramma sapendo che uno degli angoli alla base è $2/7$ di quello adiacente.

7.61. In un quadrilatero un angolo è $93°8'42''$. Determinare l'ampiezza di ciascuno degli altri tre angoli sapendo che il secondo è $2/7$ del terzo e il terzo è $4/5$ del quarto.

7.62. Le dimensioni a e b di un rettangolo sono $a = \frac{3}{5}b$, il perimetro è 192 cm. Calcolane l'area.

7.63. In un rombo la differenza fra le diagonali è 8 cm e una diagonale è i $4/3$ dell'altra. Calcola area e perimetro del rombo.

7.64. In un rombo la somma delle diagonali misura 196 cm, un quarto della misura della diagonale maggiore supera di 4 cm la misura della diagonale minore. Trova perimetro, area e altezza del rombo.

7.65. In un trapezio rettangolo l'altezza è quadrupla della base minore e il lato obliquo è i $5/4$ dell'altezza. Determina l'area del trapezio sapendo che il suo perimetro è 70 cm.

7.66. Il perimetro di un trapezio isoscele misura 124 cm e ciascun lato obliquo è lungo 30 cm. Determinane l'area e la misura della diagonale sapendo che una sua base è $7/25$ dell'altra.

7.67. Determina l'area di un rettangolo sapendo che la misura della sua diagonale supera di 8 cm quella dell'altezza e che la differenza fra i $20/41$ della diagonale ed i $2/3$ dell'altezza è uguale ai $14/9$ della stessa altezza.

7.68. Il perimetro di un rettangolo misura 170 cm e l'altezza è $5/12$ della base. Trovare area e diagonale del rettangolo.

7.69. Il perimetro di un rettangolo misura 29 cm ed i $2/11$ della sua altezza sono uguali a $1/9$ della base. Trovare l'area del rettangolo.

7.70. In un trapezio isoscele $ABCD$ avente la base maggiore AB, le diagonali sono fra loro perpendicolari e si intersecano in un punto P che divide ogni diagonale in due parti con rapporto $5/12$. Calcola perimetro e area del trapezio, sapendo che la diagonale misura 68 cm.

7.71. Un triangolo rettangolo ha ipotenusa 50 cm e un cateto 48 cm. Dal punto medio dell'ipotenusa tracciare la parallela al cateto minore. Determinare l'area di ciascuna delle due parti in cui è suddiviso il triangolo.

7.72. In un triangolo l'altezza è 18 cm; se conducendo una parallela alla base, si divide il triangolo in due parti la cui superficie è in rapporto $16/25$, a quale distanza dal vertice è stata condotta la parallela?

7.73. Il triangolo ABC ha base 14 cm e altezza 6 cm. Disegna la mediana CM e calcola l'area dei triangoli AMC e MBC. Come sono i triangoli?

7.74. La mediana di un triangolo è 12 cm. Determinare la misura di ciascuna delle parti in cui il baricentro divide la mediana.

7.75. Determinare la misura di una mediana AM sapendo che $BM = 8$ cm, dove B è il baricentro del triangolo.

7.76. Determina la misura BM del segmento appartenente alla mediana AM in un triangolo equilatero ABC, avendo indicato con B il baricentro.

7.77. Determina il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è 8 cm e che la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $4/3$ dell'altezza data.

7.78. Determina la misura delle tre altezze del triangolo che ha i lati di 20 cm, 40 cm, 30 cm. (Suggerimento: Puoi ricorrere alla formula di Erone).

7.79. Il piede dell'altezza CH di un triangolo ABC divide la base AB di 46 cm in due parti tali che $AH = \dfrac{9}{14}HB$; calcola l'area dei due triangoli ACH e BCH, sapendo che $AC = 24$ cm.

7.80. Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è $2/3$ dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

7.81. Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è 3/5 dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

7.82. I lati del triangolo ABC hanno le misure seguenti $AB = 63$ cm, $BC = 60$ cm e $AC = 39$ cm; determina le misure delle tre relative altezze.

7.83. Determinare la misura di ciascun lato e l'area del triangolo isoscele avente il perimetro di 700 m, sapendo che la base e il lato obliquo sono in rapporto $\frac{16}{17}$.

7.84. Un trapezio rettangolo $ABCD$ è circoscritto ad una semicirconferenza con il centro O sulla sua base maggiore AB e raggio di misura 6 cm. Siano S e T i punti in cui tale semicirconferenza tange rispettivamente il lato obliquo BC e la base minore CD. Sapendo che AB misura 16 cm, calcolare le misure degli altri lati del trapezio. (Tracciare OC, OS, OT e dimostrare che OB è congruente a ...).

7.85. Calcolare perimetro e area di un triangolo isoscele circoscritto a una semicirconferenza con il centro sulla sua base, sapendo che la base è i 3/2 della relativa altezza e che il raggio della semicirconferenza misura 12 cm.

7.86. Data una circonferenza di centro O, si consideri un punto C esterno ad essa da cui si traccino le tangenti alla circonferenza stessa indicando con A e B i punti di tangenza. Sapendo che il segmento AB misura 12 cm e che l'angolo $A\widehat{C}B$ ha ampiezza 60°, calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero $OACB$. Indicato poi con E il punto in cui la retta OB incontra la retta AC, calcolare il perimetro del triangolo BCD.

7.87. In un trapezio rettangolo, l'angolo che il lato obliquo forma con la base maggiore ha ampiezza 60° e la diagonale maggiore dimezza tale angolo; sapendo che la base minore misura 4 cm, calcolare il perimetro del trapezio.

7.88. In un rombo $ABCD$ ciascun lato misura 12 cm e l'angolo in B ha ampiezza 120°. Prendere sui lati AB, BC, CD e AD del rombo rispettivamente i punti P, Q, S e T in modo che i segmenti AP, BQ, CS e DT misurino 2 cm ciascuno. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero $PQST$, dopo aver dimostrato che esso è un parallelogramma. (Tracciare da T il segmento perpendicolare ad AB e osservare i vari triangoli ..., analogamente tracciare poi da P il segmento perpendicolare alla retta ...).

7.89. Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC avente area uguale a $25\sqrt{3}$ cm^2, si prenda il punto P in modo che AP misuri 4 cm; si tracci il segmento PQ parallelo a BC (con Q appartenente ad AC) e lo si prolunghi di un segmento QE congruente a PQ. Dopo aver dimostrato che il triangolo APE è rettangolo, calcolare perimetro ed area del quadrilatero $CEPH$, essendo H il piede dell'altezza del triangolo ABC relativa ad AB.

7.90. Data una semicirconferenza di centro O e diametro AB di misura $2r$, si tracci la corda AC che forma con AB un angolo di 30°; si tracci quindi la tangente in C alla semicirconferenza indicando con D il punto in cui tale tangente incontra la retta AB e con E la proiezione ortogonale di B sulla tangente stessa. Calcolare le misure dei segmenti BC, CD, BE, CE, AE. (Tracciare anche CO ... osservare i vari angoli; per calcolare la misura di AE tracciare la distanza di ... dalla retta ...).

7.91. Determina area e perimetro del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(-1;7)$, $B(6;9/2)$, $C(4;-3)$ e $D(-4;3)$.

7.92. Determina area a perimetro del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(0;3)$, $B(3;6)$, $C(6;3)$ e $D(-4;3)$. Che quadrilatero è?

7.93. Determina l'area del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(-8;5)$, $B(-2;11)$, $C(2;12)$ e $D(4;3)$.

7.94. Determina il quarto vertice D del trapezio $ABCD$ di area 9, sapendo che $A(-1;2)$, $B(5;2)$ e $C(3;4)$.

7.95. Determina il quarto vertice D del parallelogramma ABCD con $A(-3;-1)$, $B(4;1)$ e $C(3;4)$.

7.96. Verifica che il trapezio di vertici $A(-1;-1)$, $B(3;-2)$, $C\left(3;\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(0;\frac{5}{2}\right)$ non è rettangolo. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

7.97. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$, $C(4;1)$ e $D(0;3)$ è un trapezio e calcolane l'altezza.

7.98. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-4;1)$, $B(5;-2)$, $C(3;2)$ e $D(0;3)$ è un trapezio isoscele. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

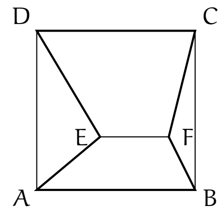
7.99 (Giochi di Archimede 2011). Nel quadrilatero ABCD le diagonali sono ortogonali tra loro e gli angoli in B e in D sono retti. Inoltre $AB = AD = 20$ cm e $BC = CD = 30$ cm. Calcolare il raggio della circonferenza inscritta in ABCD.

7.100 (Giochi di Archimede 2003). Sia dato un quadrato ABCD di lato unitario e sia P un punto interno ad esso tale che l'angolo $A\widehat{P}B$ misuri 75°. Quanto vale la somma delle aree dei triangoli ABP e CDP?

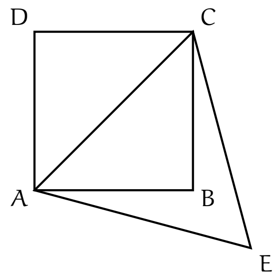
7.101 (Giochi di Archimede 2003). Un parallelogramma di lati 1 e 2 ha un angolo di 60°. Quanto misura la sua diagonale minore?

7.102 (Giochi di Archimede 2007). In un triangolo ABC scegliamo un punto D su AB e un punto E su AC in modo che la lunghezza di AD sia un terzo di quella di AB e la lunghezza di AE sia un terzo di quella di AC. Sapendo che l'area del triangolo ADE è 5 m^2, determinare l'area del quadrilatero BCED.

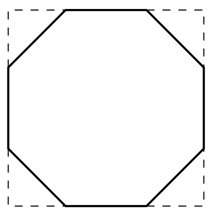
7.103 (Giochi di Archimede 2007). Il quadrato ABCD ha il lato lungo 3 m. Il segmento EF è lungo 1 m ed è parallelo ad AB. Quanto vale l'area dell'esagono ABFCDE?



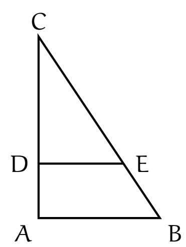
7.104 (Giochi di Archimede 2007). ABCD è un quadrato avente la diagonale lunga 2 cm e AEC è equilatero. Quanto vale l'area del quadrilatero AECB?



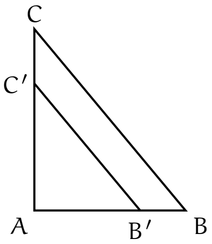
7.105 (Giochi d'Autunno 2010). Da un quadrato di lato 10 cm si tagliano i quattro angoli in modo da ottenere un ottagono regolare. Quanto è lungo il lato dell'ottagono?



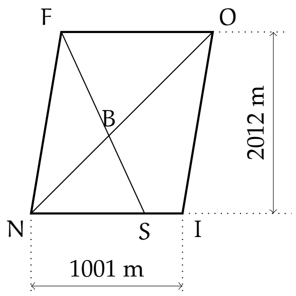
7.106 (Giochi di Archimede 2006). Il segmento DE è parallelo ad AB. Sapendo che l'area di DEC è uguale ai 3/4 di quella di ABC e che AC misura 1 m, quanto misura DC?



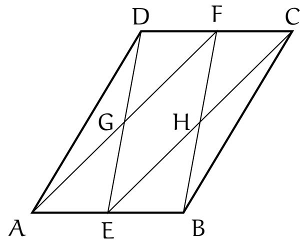
7.107 (Giochi di Archimede 2005)**.** Il triangolo ABC è rettangolo ed i cateti AB e AC misurano rispettivamente 3 m e 4 m. Siano B' e C' punti appartenenti rispettivamente ai lati AB e AC, tali che la retta contenente il segmento $B'C'$ sia parallela a quella contenete il segmento BC e distante 1 m da essa. Calcolare l'area del triangolo $AB'C'$.



7.108 (Giochi d'Autunno 2011)**.** L'area di un bosco, rappresentata dai vertici F, O, I ed N, è un parallelogramma la cui base misura 1 001 m e la cui altezza misura 2 012 m. Il punto S si trova sulla base NI a 143 m dal vertice I. Qual è l'area del quadrilatero BOIS?



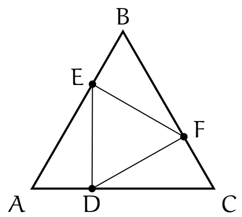
7.109 (Giochi d'Autunno 2011)**.** Nel parallelogramma $ABCD$ il segmento BD è perpendicolare ad AB ed E e F sono i punti medi di AB e CD rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero $GEHF$, sapendo che $AB = 5$ cm e $BD = 2$ cm.



7.110 (Giochi d'Autunno 2010)**.** In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?

7.111 (Giochi d'Autunno 2011)**.** In un parallelogramma di area 1 m^2 le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra. Inoltre uno degli angoli interni misura 60°. Quanto misura la diagonale minore?

7.112 (Giochi d'Autunno 2010)**.** In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare ad AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF?



7.113 (Giochi di Archimede 2005)**.** Dato un quadrato $ABCD$ si uniscono i punti medi dei lati aventi un vertice in comune formando un nuovo quadrato $EFGH$. Ripetiamo la stessa operazione per $EFGH$ e otteniamo un nuovo quadrato $A'B'C'D'$. Quanto vale il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area di $A'B'C'D'$?

7.7.2 Risposte

7.10. 25/4 cm.

7.11. 18 cm.

7.12. $24a^2$.

7.13. $135\ \mathrm{cm}^2$.

7.14. $2p = 96a$, $A = 93/2a^2$.

7.15. $AH = 20$ cm, $2p = 220{,}1$ cm.

7.16. $A = 4\sqrt{3}a^2$, $d_1 = 2\sqrt{3}a$, $d_2 = 2\sqrt{7}a$.

7.17. $2p = 50a$, $A = 150a^2$.

7.18. $2p = 10a(2\sqrt{3}+3)/3$, $A = 25a^2/\sqrt{3}$.

7.19. 34 cm, 12 cm.

7.20. $\frac{3}{4}\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

7.21. $2+\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$.

7.22. $2p = 28+5(\sqrt{6}+\sqrt{10})$ cm.

7.23. $4+2/\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}+2$.

7.24. $6+2\sqrt{3}$.

7.25. $18(1+\sqrt{3})$, $27(4+\sqrt{3})$.

7.26. $28+8\sqrt{2}$, 80.

7.27. $10(1+\sqrt{2})$, 25.

7.28. $24(9+\sqrt{3})$, $36+12\sqrt{2}+12\sqrt{3}$.

7.29. $10+5\sqrt{34}$, $\frac{125}{2}$.

7.30. $14\sqrt{2}+8\sqrt{6}$, $14\sqrt{3}+24$.

7.31. $EH = EK = 4$ m, $2p = 8(\sqrt{3}+1)$ m, $C = 8\pi$.

7.32. a) $2p = 2x(\sqrt{2}+3)$; $A = 4x^2$, b) $2p = 2x(4+\sqrt{3})$; $A = 2x^2(1+\sqrt{3})$, c) $2p = 2x(2+\sqrt{3})$; $A = 2x^2(3+\sqrt{3})$.

7.33. $\frac{11}{6}a\sqrt{2}+a\sqrt{6}$, $\frac{1}{6}a^2(e+2\sqrt{3})$.

7.34. $2p = a + 3a\sqrt{3}, \quad A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}.$

7.35. $6a\sqrt{3} + 9a, \quad \frac{1}{24}(21a^2\sqrt{3} + 36a^2).$

7.36. $2\sqrt[4]{27}$ m.

7.37. $4\sqrt{2}$.

7.40. $16/9$.

7.41. $3/4$.

7.42. 36, 18.

7.43. 12 cm^2, 12 cm^2, $172°$.

7.44. 0,665, 10,85 cm.

7.45. 300,12 mm.

7.46. 36, 0,625.

7.48. 42 cm, 108 cm^2, 7,2 cm.

7.49. 11,25 cm^2, 5,625 cm^2.

7.50. 252 cm^2.

7.51. 3 cm, 6 cm^2, 2,4 cm, 5 cm, 3,5 cm.

7.52. 100 cm.

7.53. 33,59 cm^2.

7.54. 15,48 cm^2.

7.57. $45°, \quad 67,5°$.
42,24 cm^2.

7.59. 180 cm^2.

7.61. $176°13'30'', \quad 50°21', \quad 40°16'48''$.

7.62. 1 080 cm^2.

7.63. $384\ \text{cm}^2$, 80 cm.

7.64. 328 cm, $2\,880\ \text{cm}^2$, $35{,}15$ cm.

7.65. $250\ \text{cm}^2$.

7.66. $768\ \text{cm}^2$, 40 cm.

7.68. $1\,500\ \text{cm}^2$, 65 cm.

7.69. $49{,}5\ \text{cm}^2$.

7.70. 200 cm, $2\,304\ \text{cm}^2$.

7.71. $84\ \text{cm}^2$, $252\ \text{cm}^2$.

7.77. 40 cm.

7.79. $54\sqrt{7}\ \text{cm}^2$, $84\sqrt{7}\ \text{cm}^2$.

7.83. 224 m, 238 m, $23\,520\ \text{m}^2$.

7.84. 6 cm, 10 cm, 8 cm.

7.85. 80 cm, $300\ \text{cm}^2$.

7.87. $14 + 2\sqrt{3}$ cm.

7.89. $9 + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$ cm, $29\sqrt{3}/2\ \text{cm}^2$.

7.91. $30{,}2$, $53{,}75$.

7.92. $22{,}4$; $19{,}5$.

7.93. $A = 14$.

7.95. $D(-4; 2)$.

7.99. 12 cm.

Trasformazioni geometriche piane 8

"La danza degli storni"
Foto di _Peck_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536/

8.1 Generalità sulle trasformazioni geometriche piane

8.1.1 Introduzione e definizioni

> «C'è una cosa straordinaria da vedere a Roma in questa fine d'autunno ed è il cielo gremito d'uccelli. Il terrazzo del signor Palomar è un buon punto d'osservazione [...] Nell'aria viola del tramonto egli guarda affiorare da una parte del cielo un pulviscolo minutissimo, una nuvola d'ali che volano [...] Quando si pensa agli uccelli migratori ci si immagina di solito una formazione di volo molto ordinata e compatta [...] Quest'immagine non vale per gli storni, o almeno per questi storni autunnali nel cielo di Roma [...]»
>
> Da *Palomar* di Italo Calvino

Il volo degli storni disegna nel cielo figure in continua trasformazione, come si può vedere dalle foto riportate nelle figure 8.1 e 8.2.

FIGURA 8.1: *La danza degli storni* [1]

FIGURA 8.2: *Auklet flock, Shumagins 1986*[2]

Il concetto di trasformazione assume significati diversi a secondo dell'ambito in cui è definito: ad esempio in zoologia la trasformazione di un animale dallo stadio di larva allo stadio di adulto è più propriamente chiamata "metamorfosi". Ciò provoca un cambiamento totale del corpo del giovane e l'adulto quasi sempre avrà una forma molto differente da quella della larva (figura 8.3).

Il gioco del tangram (vedi pagina 210) si basa sulla capacità di passare da una figura ad un'altra senza che nessun pezzo del quadrato base venga tagliato o modificato nelle sue dimensioni: le figure che si ottengono (come quella riportata nella figura 8.4) hanno forme diverse, ma sono costituite dagli stessi pezzi. Possiamo dire che le une vengono trasformate nelle altre grazie alla nostra fantasia.

In geometria le trasformazioni sono particolari corrispondenze aventi come dominio e codominio il piano considerato come insieme di punti. Più precisamente si enuncia la seguente

Definizione 8.1. Si definisce *trasformazione geometrica piana* una corrispondenza biunivoca tra punti del piano.

[1] foto di _Peck_, `http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536/`.

[2] foto di D. Dibenski, `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Auklet_flock_Shumagins_1986.jpg`.

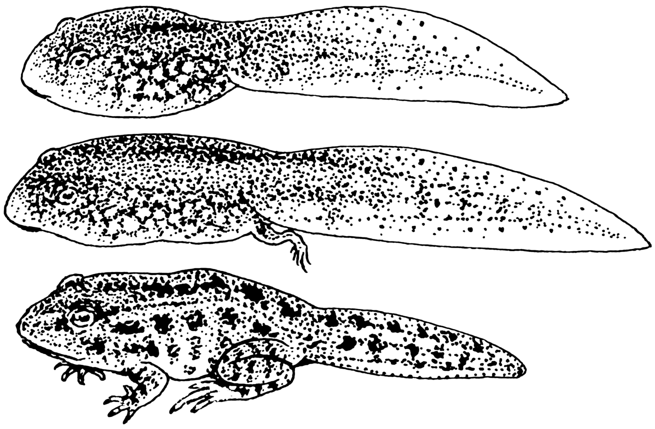


FIGURA 8.3: *Line art representation of w:Tadpole*[3]

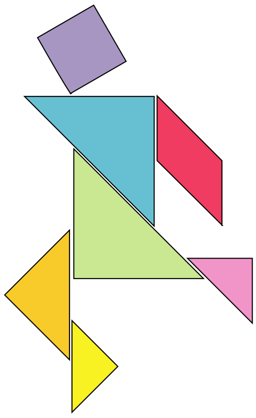


FIGURA 8.4: *Tangram-man*[4]

Attraverso una legge ben definita, una trasformazione geometrica piana associa ad un punto P del piano uno e un solo punto P' dello stesso piano e, viceversa, il punto P' risulta essere il corrispondente di un solo punto P del piano. Diciamo che P' è l'*immagine di* P nella trasformazione considerata.

Indicata con Φ la legge della corrispondenza che individua la trasformazione, per esprimere il legame tra P e P' scriveremo

$$\boxed{\Phi : P \rightarrow P'} \quad \text{o anche} \quad \boxed{P \xrightarrow{\Phi} P'}$$

e leggeremo: "Φ fa corrispondere al punto P il punto P'", oppure

$$\boxed{\Phi(P) = P'}$$

e leggeremo: "Φ di P è uguale a P'", scrittura che definisce la trasformazione geometrica come funzione del punto preso in considerazione.

La trasformazione Φ fa corrispondere ad una figura Ω del piano la figura Ω' costituita dalle immagini dei punti della figura iniziale. Ω' è detta dunque *immagine di* Ω *secondo* Φ, in formule $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ o anche $\Omega \xrightarrow{\Phi} \Omega'$ o ancora $\Phi(\Omega) = \Omega'$.

Le trasformazioni geometriche che studieremo sono tali da far corrispondere ad una retta r la retta r' individuata dai punti A' e B' immagini di due punti A e B scelti arbitrariamente su r. Tali trasformazioni sono chiamate *collineazioni*.

Definizione 8.2. Un punto P che coincide con la propria immagine P' è detto *punto unito* o *fisso* nella trasformazione Φ considerata.

Nel caso in cui tutti i punti del piano coincidono con la propria immagine, la trasformazione è detta *identità*.

[3]immagine di Pearson Scott Foresman, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tadpole_%28PSF%29.png.
[4]immagine di Actam, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangram-man.svg.

Per descrivere una trasformazione geometrica è quindi necessario definire come si costruisce l'immagine di un qualunque punto del piano.

Esempio 8.1. Consideriamo nel piano la seguente corrispondenza: fissato un punto K la corrispondenza S_K associa ad ogni punto P del piano il punto P' dello stesso piano tale che K risulti il punto medio del segmento PP'. S_K è una trasformazione geometrica?

La definizione è costruttiva:

$$P \xrightarrow{S_K} P' \wedge PK \cong KP', \quad A \xrightarrow{S_K} A' \wedge AK \cong KA'$$

Per dimostrare che la corrispondenza è una trasformazione geometrica dobbiamo verificare che si tratta di una corrispondenza biunivoca tra punti del piano: ogni punto ha un corrispondente secondo S_K e, viceversa, ogni punto è immagine di un solo punto del piano stesso. Il punto K è corrispondente di se stesso dunque è un punto unito della trasformazione, anzi è l'unico punto unito (figura 8.5).

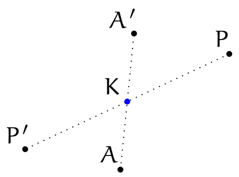


FIGURA 8.5: Esempio 8.1

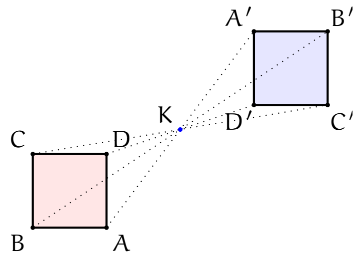


FIGURA 8.6: Esempio 8.1

Nella figura 8.6 è rappresentato come opera la trasformazione S_K se applicata ad un quadrato.

$$AK \cong KA', BK \cong KB', CK \cong KC', DK \cong KD'$$

$ABCD \xrightarrow{S_K} A'B'C'D'$ e i due quadrati hanno le stesse dimensioni.

Esempio 8.2. Definiamo la seguente trasformazione geometrica Φ sul generico punto P: dato un punto O, tracciamo la semiretta uscente da O e passante per P; il punto P', trasformato di P secondo Φ, è il punto della semiretta tale che $OP' = 2OP$.

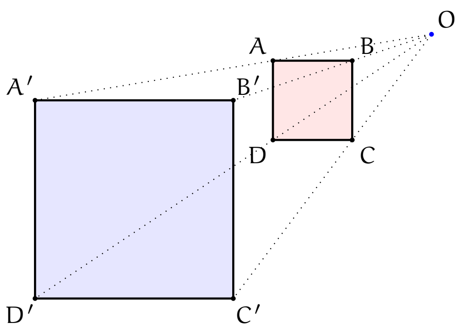


FIGURA 8.7: Esempio 8.2

Applicando questa trasformazione al quadrato $ABCD$ (figura 8.7) quest'ultimo si trasforma in un altro quadrato ma le due figure non hanno le stesse dimensioni.

Se il piano è dotato di un riferimento cartesiano ortogonale, la legge della trasformazione geometrica piana lega le coordinate di un punto e quelle del suo corrispondente mediante equazioni o sistemi di equazioni.

Definizione 8.3. Chiamiamo *equazione della trasformazione* l'insieme delle espressioni algebriche che indicano come si passa dalle coordinate di un generico punto P a quelle della sua immagine P'.

Esempio 8.3. La corrispondenza Φ associa ad un punto P del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale il punto P' secondo la seguente legge: $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(-2x_P; x_P - y_P)$. La corrispondenza assegnata è una trasformazione geometrica piana?

Strategia risolutiva: scegliamo un punto del piano: $P(\dots;\dots)$ e determiniamo $P'(\dots;\dots)$; scegliamo un punto $Q'(\dots;\dots)$ e determiniamo la controimmagine $Q(\dots;\dots)$. posso affermare che la corrispondenza è biunivoca perché .... e quindi posso affermare che è una trasformazione geometrica.

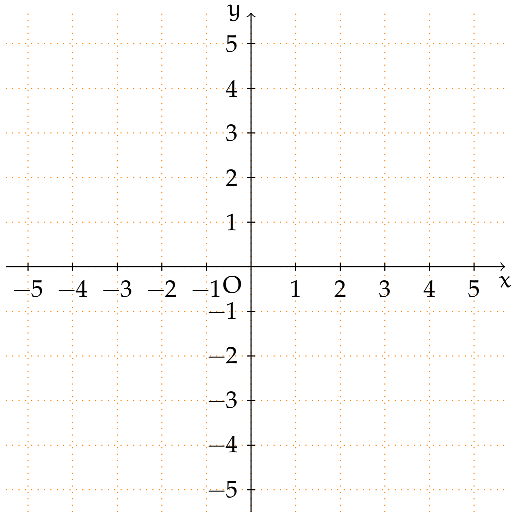


FIGURA 8.8: Esempio 8.3

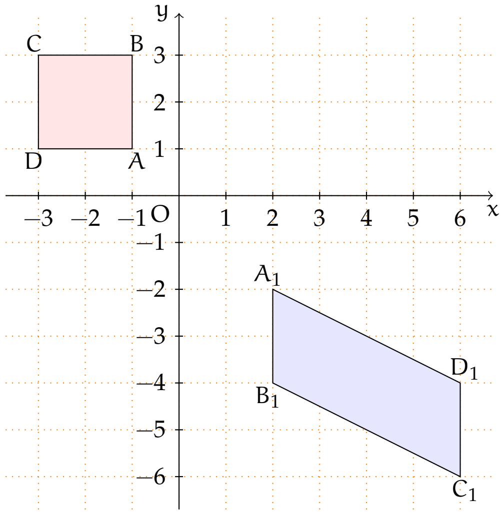


FIGURA 8.9: Esempio 8.3

Applichiamo la stessa trasformazione al quadrato di vertici $A(-1;1)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$, $D(-3;1)$ (figura 8.9).

La trasformazione fa corrispondere al quadrato $ABCD$ il parallelogramma $A_1B_1C_1D_1$ di coordinate $A_1(2;-2)$, $B_1(2;-4)$, $C_1(6;-6)$ e $D_1(6;-4)$. Essa ha cambiato la natura della figura geometrica di partenza, ma ha mantenuto il parallelismo tra i lati: $AB \parallel CD \overset{S_K}{\to} A_1B_1 \parallel C_1D_1$, dove $A_1B_1 = \Phi(AB)$ e $C_1D_1 = \Phi(CD)$.

Si noti il fatto che esistono trasformazioni geometriche che mantengono invariate forma e dimensioni delle figure a cui sono applicate, altre che mantengono inalterate la forma ma non dimensioni ed altre ancora che non mantengono inalterata neppure la forma.

Definizione 8.4. Si chiamano *proprietà invarianti di una trasformazione* le caratteristiche che una figura e la sua corrispondente mantengono inalterate nella trasformazione.

Le principali caratteristiche che una trasformazione può lasciare inalterate sono: la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, il rapporto tra segmenti, la misura della superficie, il parallelismo dei segmenti, l'orientamento dei punti del piano, la direzione delle rette, la forma, il numero di lati delle figure. In questo capitolo tratteremo solo delle trasformazioni che mantengono invariate sia la forma che le dimensioni delle figure.

Definizione 8.5. Si chiama *isometria* una trasformazione piana che associa a due punti distinti A e B del piano i punti A' e B' tali che AB e $A'B'$ risultano congruenti.

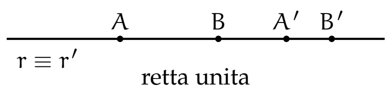
Solo il primo esempio, tra i precedenti, rappresenta una isometria. Per dimostrare che è una isometria dobbiamo dimostrare che segmenti corrispondenti sono congruenti. Consideriamo il segmento AP e il suo corrispondente $A'P'$; dimostriamo che $AP \cong A'P'$. Considero i triangoli AKP e $A'KP'$, hanno .... Lasciamo al lettore lo sviluppo della dimostrazione.

Riportiamo di seguito le proprietà di una isometria:

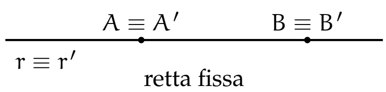
- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Definizione 8.6. In una isometria Σ, una *retta* è *unita* se coincide con la sua immagine, cioè ogni punto della retta data ha come corrispondente un punto della stessa retta. Nel caso in cui ogni punto di essa sia un punto unito, la retta è luogo di punti uniti e viene detta *retta fissa*.

$$\left.\begin{array}{l} A \in r \wedge B \in r \\ \Sigma : (A \to A') \wedge (B \to B') \\ A' \in r \wedge B' \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv r'$$



$$\left.\begin{array}{l} A \in r \wedge B \in r \\ \Sigma : (A \to A') \wedge (B \to B') \\ A' \equiv A \wedge B' \equiv B \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv r'$$



8.2 Le isometrie

Riprendiamo la definizione del paragrafo precedente: si chiama isometria una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che $AB \cong A'B'$.

Richiamiamo anche le proprietà:

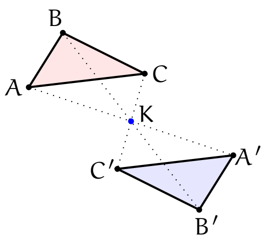
- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Adesso ci proponiamo di studiare particolari isometrie.

8.2.1 La simmetria centrale

Definizione 8.7. Fissato nel piano un punto K, chiamiamo *simmetria centrale di centro* K (indicata col simbolo S_K) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che K risulti il punto medio del segmento PP'.

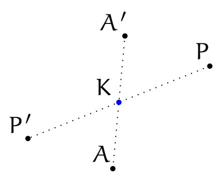
Per determinare l'immagine di un segmento è sufficiente determinare l'immagine dei suoi estremi. Nella figura a fianco è illustrato come agisce S_K su una qualunque figura piana: l'immagine del triangolo ABC è il triangolo $A'B'C'$ ottenuto determinando l'immagine di ciascuno dei suoi vertici.



Teorema 8.1. S_K *è una isometria.*

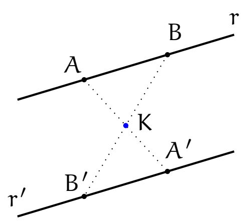
Ipotesi: $A \overset{S_K}{\to} A'$, $P \overset{S_K}{\to} P'$, $PK \cong P'K$, $AK \cong A'K$.
Tesi: $AP \cong A'P'$.

Fissato K, centro di simmetria, ... Lasciamo al lettore la dimostrazione (serviti della figura a fianco).



Teorema 8.2. *Rette corrispondenti in* S_K *sono parallele.*

Dimostrazione. Osserviamo che per determinare l'immagine r' di una retta r in S_K è sufficiente costruire l'immagine A' e B' di due suoi punti A e B. Per la costruzione effettuata si ha $AK \cong KA'$ e $BK \cong B'K$. Per il teorema 8.1 abbiamo $AKB \cong A'KB'$ dunque, in particolare, $A\widehat{B}K \cong A'\widehat{B'}K$. Questi sono angoli alterni interni delle rette r ed r' con trasversale BB', che pertanto risultano parallele. □



Gli elementi uniti

- l'unico punto unito è il centro di simmetria;
- sono unite tutte le rette passanti per il centro di simmetria.

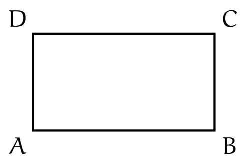
Lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima proposizione.

Immaginate di percorrere il contorno di un triangolo ABC partendo dal vertice A procedendo in ordine alfabetico: state ruotando in senso orario o antiorario? ...... In quale senso percorrete il contorno di $A'B'C'$ (triangolo trasformato di ABC secondo S_K) partendo da A'? ......

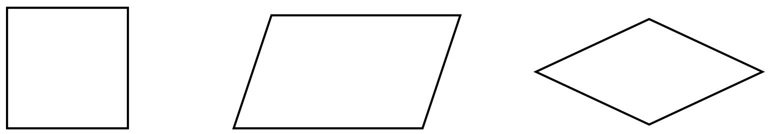
Questo fatto ci permette di concludere che S_K mantiene l'orientamento dei punti: è una *isometria diretta*.

Esempio 8.4. Nel rettangolo $ABCD$ indicate con O il punto di incontro delle diagonali; determinate l'immagine di $ABCD$ nella simmetria di centro O.

$S_O : ABCD \to \ldots\ldots$ pertanto il rettangolo è una *figura unita* nella simmetria avente come centro il punto di intersezione delle sue diagonali.



Vale la stessa affermazione per qualunque parallelogramma? Perché? ....



Definizione 8.8. Si dice che una figura F ha un *centro di simmetria* se esiste nel piano un punto K tale che nella simmetria di centro K, F coincide con la sua immagine F', ovvero F è unita in S_K.

Descrizione analitica di una simmetria centrale

Definizione 8.9. Fissate le coordinate del centro di simmetria, chiamiamo *equazione di una simmetria centrale* le relazioni che legano le coordinate del generico punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Sia $K(x_K; y_K)$ il centro di simmetria e $P(x; y)$ il generico punto di cui vogliamo determinare il corrispondente $P'(x'; y')$. Ricordiamo la definizione di simmetria centrale: K risulta il punto medio di PP'. Sappiamo che le coordinate del punto medio M di un segmento AB si ottengono dalle coordinate dei suoi estremi $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$; nel nostro caso si dovrà dunque avere $x_K = \frac{x + x'}{2}$ e $y_K = \frac{y + y'}{2}$, da cui possiamo ricavare l'equazione cercata: le coordinate del punto immagine $P'(x'; y')$ sono date dall'equazione

$$\begin{cases} x' = 2x_K - x \\ y' = 2y_K - y \end{cases}.$$

Esempio 8.5. Determinare il simmetrico di $P(-1;3)$ nella simmetria centrale di centro $K(1;-1)$.

Riportiamo K e P nel riferimento cartesiano ortogonale e scriviamo l'equazione della simmetria

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -2 - y \end{cases}.$$

Determiniamo le coordinate di P': $x' = 2 + 1 = 3$ e $y' = -2 - 3 = -5$. Quindi $P'(3;-5)$.

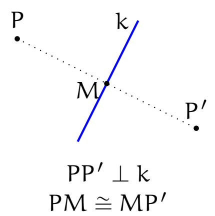
8.2.2 La simmetria assiale

Ricordiamo la definizione 1.38 di asse di un segmento, «l'asse di un segmento AB è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio M» e studiamo una nuova corrispondenza tra punti del piano.

Definizione 8.10. Fissata nel piano una retta k, chiamiamo *simmetria assiale di asse* k (indicata col simbolo S_k) la corrispondenza, nel piano, che associa ad un punto P il punto P' tale che k risulti l'asse del segmento PP'.

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano si può procedere con i seguenti passi:

1. fissare l'asse di simmetria k;
2. prendere un punto P del piano non appartenente a k;
3. da P tracciare la perpendicolare p all'asse k e porre $M = p \cap k$;
4. il corrispondente P' di P si trova su p nel semipiano opposto e $P'M \cong PM$.



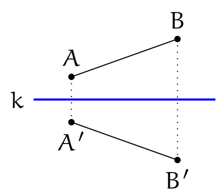
In questo modo si otterrà una figura simile a quella a fianco.

Lasciamo al lettore le verifiche delle seguenti affermazioni circa gli elementi uniti di questa trasformazione S_k.

- ogni punto dell'asse k è unito;
- l'asse k è luogo di punti uniti, ossia è una retta fissa;
- sono unite tutte le rette perpendicolari all'asse k;

Teorema 8.3. *La trasformazione S_k è una isometria.*

Strategia risolutiva: Dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento $A'B'$ tale che $A'B' \cong AB$; servitevi della figura a fianco per la dimostrazione, ma prima indicate ipotesi e tesi ($A'B' \cong AB$). Suggerimento: tracciate la distanza da A e da A' a BB' e dimostrate la congruenza dei triangoli ottenuti.

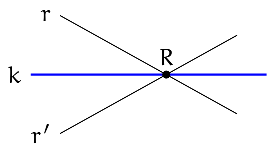


Teorema 8.4. *Se r è una retta del piano che interseca l'asse k in R allora la sua immagine r' in S_k passa per R. k risulta inoltre la bisettrice dell'angolo di vertice R avente come lati r ed r'.*

Ipotesi: k asse di simmetria, $R = r \cap k$.
Tesi: $R = r' \cap k$, $r\widehat{R}k \cong k\widehat{R}r'$.

Dimostrazione. Per costruire r' costruiamo i simmetrici in S_k di due punti scelti su r. Possiamo usare il punto R e poi un altro qualunque A. Si ottiene $S_k : R \to \dots$ perché .... e $S_k : A \to \dots$

Congiungendo i punti immagine si ottiene r'. Concludete .... E continuate dimostrando la seconda tesi richiesta. □

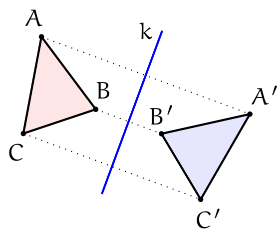


Teorema 8.5. *Se r è parallela all'asse di simmetria k allora lo è anche r'.*

Lasciamo la sua dimostrazione al lettore.

Considerate la figura a fianco. Percorrete il contorno del triangolo ABC seguendo l'ordine alfabetico delle lettere ai vertici: il percorso è stato in senso orario/antiorario? Cosa succede percorrendo il contorno del triangolo immagine $A'B'C'$ secondo S_k?

Questo fatto ci permette di concludere che S_k non mantiene l'orientamento dei punti: è una *isometria invertente*.



Descrizione analitica di una simmetria assiale

Definizione 8.11. Fissata nel riferimento cartesiano ortogonale una retta k, chiamiamo *equazione della simmetria assiale di asse* k (S_k) le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Limitiamo la ricerca dell'equazione della simmetria assiale fissando come asse particolari rette; proseguendo negli studi saprete determinare l'equazione di una simmetria assiale il cui asse è una qualunque retta del piano cartesiano.

Simmetria rispetto agli assi coordinati

Esempio 8.6. Studiare la corrispondenza tra punti del piano cartesiano espressa dal seguente predicato: $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(x_P; -y_P)$.

Completate la tabella:

x	y	x'	y'
−3	1		
0	−2		
1	0		
4	5		

e rappresentate nel riferimento cartesiano ciascun punto e il suo corrispondente.

Completate: $\begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$.

Motivate la verità delle seguenti proposizioni:

«Ogni punto del piano ha un unico corrispondente» . . . .

«Di ogni punto del piano si può determinare la controimmagine» . . . .

«La corrispondenza Φ è una trasformazione geometrica» . . . .

«I punti dell'asse x sono uniti» . . . .

«La corrispondenza Φ è una isometria» . . . .

L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ascissa e ordinata opposta è la *simmetria assiale di asse* x, S_x, di equazione

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

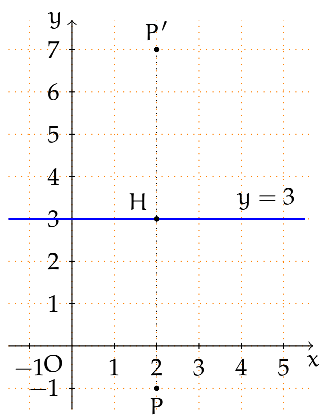
Ripetete il procedimento seguito nell'esempio precedente studiando la corrispondenza $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(-x_P; y_P)$ e constatate che l'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa . . . . e . . . . opposta è la *simmetria assiale di asse* . . . , $S_{\dots}$, di equazione

$$\begin{cases} x' = \dots\dots \\ y' = \dots\dots \end{cases}.$$

Simmetria rispetto ad una retta parallela agli assi cartesiani

---

Esempio 8.7. Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse x di equazione $y = 3$; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{y=3}$ avente come asse tale retta.



Determiniamo l'immagine di $P(2; -1)$; da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse $y = 3$ e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono $(2; 3)$; l'immagine di P è $P'(2; y')$ ed è tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH} = \overline{P'H} \Rightarrow |y_H - y_P| = |y_{P'} - y_H| \Rightarrow 3 - (-1) = y_{P'} - 3 \Rightarrow y_{P'} = 7.$$

Quindi $S_{y=3}: P(2;-1) \to P'(2;7)$.

Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-1;0)$ e completate:

$$S_{y=3}: \begin{cases} A(\dots;\dots) \to A'(\dots;\dots) \\ B(\dots;\dots) \to B'(\dots;\dots) \\ C(\dots;\dots) \to C'(\dots;\dots) \end{cases}$$

Generalizziamo: vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse x di equazione $y = a$. Sia $P(x;y)$ un generico punto del piano e sia $P'(x';y')$ la sua immagine in $S_{y=a}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio precedente possiamo scrivere:

$$|y-a| = |y'-a|$$

ed essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene

$$y - a = -y' + a \Rightarrow y' = -y + 2a;$$

concludendo

$$S_{y=a}: P(x;y) \to P'(x;-y+2a)$$

o anche

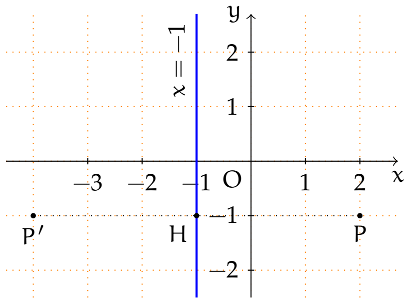
$$S_{y=a}: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2a \end{cases} .$$

Verificate, con l'applicazione dell'equazione trovata, i risultati dell'esercizio precedente.

Esempio 8.8. Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse y di equazione $x = -1$; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{x=-1}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di $P(2;-1)$; da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse $x = -1$ e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono $(-1;-1)$; l'immagine di P è $P'(x';-1)$ tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH} = \overline{P'H} \Rightarrow |x_P - x_H| = |x_H - x_{P'}| \Rightarrow |2-(-1)| = |-1-x_{P'}| \Rightarrow x_{P'} = -4.$$

Quindi $S_{x=-1}: P(2;-1) \to P'(-4;-1)$.



Ripetendo il procedimento, determinate l'immagine dei seguenti punti $A(1;1)$, $B(-3;-2)$, $C(2;0)$ e completate:

$$S_{x=-1} : \begin{cases} A(\dots;\dots) \to A'(\dots;\dots) \\ B(\dots;\dots) \to B'(\dots;\dots) \\ C(\dots;\dots) \to C'(\dots;\dots) \end{cases}$$

Generalizziamo: vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse y di equazione $x = b$; sia $P(x;y)$ un generico punto del piano e sia $P'(x' : y')$ la sua immagine in $S_{x=b}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere

$$|x - b| = |b - x'|$$

ed essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse $x = b$ si ottiene

$$x - b = -x' + b :\Rightarrow\ x' = -x + 2b;$$

concludendo

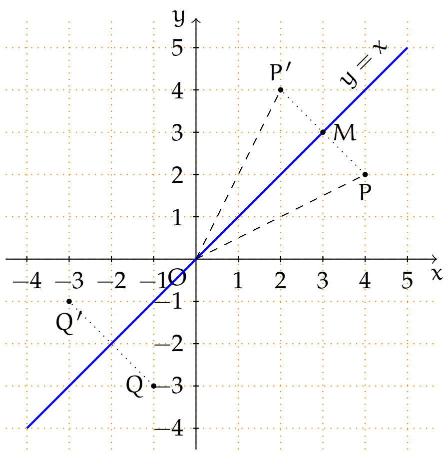
$$S_{x=b} : P(x;y) \to P'(-x + 2b;y)$$

o anche

$$S_{x=b} : \begin{cases} x' = -x + 2b \\ y' = y \end{cases} .$$

Simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti

Esempio 8.9. Determinate il punto medio M del segmento avente per estremi i punti $P(4;2)$ e $P'(2;4)$ e verificate che il triangolo POP' è isoscele sulla base PP'. La retta OM è l'asse di simmetria del triangolo considerato?



Considerate un'altra coppia di punti $Q(-1;-3)$ e $Q'(-3;-1)$ e ripetete le richieste precedenti. L'asse OM è la bisettrice del I°-III° quadrante, di equazione $y = x$.

Generalizziamo: verificate che due punti $P(x_P;y_P)$ e $P'(y_P;x_P)$ sono equidistanti dall'origine del riferimento e che il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta $y = x$.

La simmetria assiale avente come asse la bisettrice del I°-III° quadrante, indicata con S_{b1}, associa ad ogni punto $P(x_P; y_P)$ il punto $P'(y_P; x_P)$ ottenuto scambiando le coordinate di P; la sua equazione è

$$S_{b1}: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} .$$

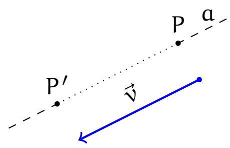
Tracciata nel riferimento la retta $y = -x$, dopo aver verificato che è la bisettrice del II°-IV° quadrante, possiamo constatare che la simmetria assiale avente come asse la bisettrice II°-IV° quadrante, indicata con S_{b2}, associa ad ogni punto $P(x_P; y_P)$ il punto $P'(-y_P; -x_P)$ ottenuto scambiando l'opposto delle coordinate di P; la sua equazione è

$$S_{b2}: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} .$$

8.2.3 La traslazione

Definizione 8.12. Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$ si chiama *traslazione di vettore* $\vec{v}$ (indicata con $T_{\vec{v}}$) la corrispondenza che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' dello stesso piano in modo che $\overrightarrow{PP'} \equiv \vec{v}$.

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:



1. fissate un vettore $\vec{v}$;
2. prendete un punto P del piano;
3. da P tracciate la retta a avente la stessa direzione di $\vec{v}$;
4. su a fissate il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ sia equipollente a $\vec{v}$.

Il punto P' così determinato è l'immagine di P nella traslazione, cioè $T_{\vec{v}} : P \to P'$.

Gli elementi uniti

- «Nella traslazione non ci sono punti uniti».
- «Una retta parallela al vettore che individua la traslazione è unita».

Lasciamo al lettore la verifica delle proposizioni enunciate.

Teorema 8.6. *La trasformazione $T_{\vec{v}}$ è una isometria.*

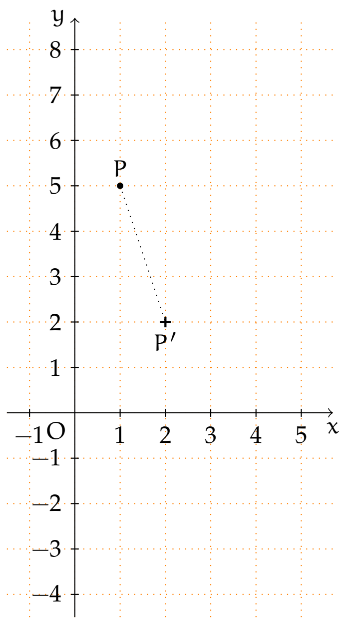
Strategia risolutiva: dimostrate che l'immagine di un segmento AB è un segmento $A'B'$ tale che $AB \cong A'B'$.

Teorema 8.7. *Se r ed r' sono due rette corrispondenti in $T_{\vec{v}}$, allora sono parallele.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione del teorema.

Descrizione analitica di una traslazione

Pensiamo il piano, dotato di riferimento cartesiano ortogonale, come formato da due cartoncini sovrapposti: sul piano D, trasparente, i punti sono rappresentati dal solito simbolo, sull'altro, C, sottostante, i punti sono rappresentati con il simbolo "+". Studiamo la corrispondenza $T_{\vec{v}}$ tra i punti del piano D e i punti del piano C espressa dalla legge



$$P(x_P; y_P) \in D \xrightarrow{T_{\vec{v}}} P'(x_P + 1; y_P + (-3)) \in C.$$

Se $P(1;5)$ è un punto di D il suo corrispondente è $P'(2;2)$. Determinate il corrispondente di ciascuno dei seguenti punti $F(0;2)$, $H(-1;8)$, $K(3;3)$ e $V(4;-1)$.

Congiungete ciascun punto F, H, K e V con il proprio corrispondente F', H', K' e V'. I vettori $\overrightarrow{FF'}$, $\overrightarrow{HH'}$, $\overrightarrow{KK'}$ e $\overrightarrow{VV'}$ sono equipollenti?

Rispondente alle seguenti domande

- È vero che il dominio della corrispondenza coincide con D?
- È vero che la corrispondenza assegnata è univoca?
- Si può affermare che è biunivoca?
- Di quale punto è immagine il punto $S'(0;-4)$?
- È vero che la trasformazione è una isometria?

Possiamo affermare che la corrispondenza assegnata è una isometria completamente caratterizzata dal vettore $\vec{v}(1;-3)$ pertanto è una traslazione.

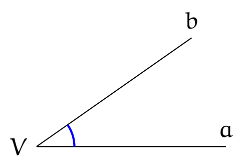
Definizione 8.13. Fissato nel riferimento cartesiano ortogonale un vettore $\vec{v}(a;b)$, chiamiamo *equazione della traslazione di vettore* $\vec{v}(a;b)$, $T(a;b)$, le relazioni che legano le coordinate di un generico punto P con quelle della sua immagine P'.

Siano $(x;y)$ le coordinate del punto P e $(x';y')$ quelle della sua immagine P'. L'equazione della traslazione di vettore $\vec{v}(a;b)$ è

$$T(a;b) : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} .$$

8.2.4 La rotazione

Fissiamo nel piano un angolo convesso di vertice V e lati a e b; se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo muovendoci in senso antiorario; considerando l'angolo concavo di vertice V e lati a e b se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo concavo muovendoci in senso orario.



Definizione 8.14. Un *angolo* si dice *orientato* quando viene fissato un ordine tra i suoi lati, ad esempio l'ordine alfabetico. Se per andare dal primo lato al secondo ci muoviamo in senso antiorario diciamo che l'angolo è positivo, al contrario avremo un angolo negativo.

Esempio 8.10. Nella figura 8.10 sono disegnati alcuni angoli i cui lati seguono l'ordine alfabetico.

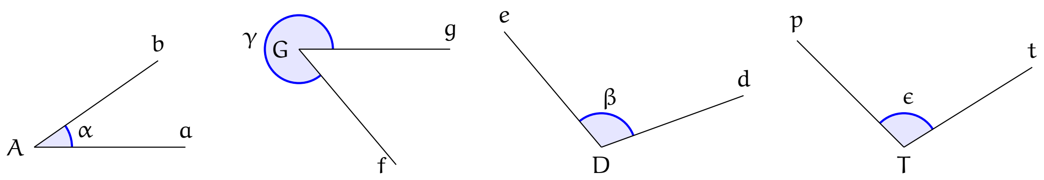


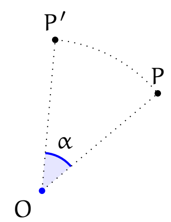
FIGURA 8.10: Esempio 8.10

- Angolo di vertice A e lati a e b: a raggiunge b percorrendo l'angolo α in senso antiorario quindi diciamo che α è positivo.
- Angolo di vertice G e lati f e g: f raggiunge g percorrendo l'angolo γ in senso orario quindi diciamo che γ è negativo.
- Angolo di vertice D e lati d ed e: ....
- Angolo di vertice T e lati p e t: ....

Definizione 8.15. Fissato un punto O e un angolo orientato α, chiamiamo *rotazione di centro* O *e ampiezza* α, $R_{O,\alpha}$, la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che $OP \cong OP'$ e $P\widehat{O}P' = \alpha$.

Fissato l'angolo orientato α, il punto O centro della rotazione, l'immagine del punto P si determina con i seguenti passi:

1. congiungiamo O con P;
2. tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OP;
3. costruiamo, con vertice in O, l'angolo α;
4. P' è il punto di intersezione della circonferenza con il secondo lato dell'angolo α.



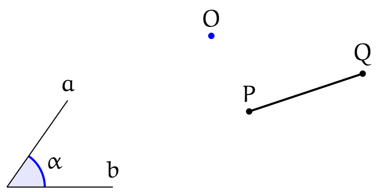
Gli elementi uniti

- «Il centro è l'unico punto unito».
- «Sono unite tutte le circonferenze aventi il centro nel centro di rotazione».

Lasciamo al lettore la verifica di quanto affermato.

Teorema 8.8. *La rotazione è una isometria.*

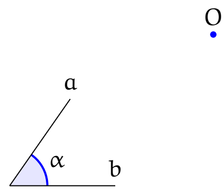
Per dimostrare il teorema proposto, servitevi della figura a lato, nella quale è segnato il centro di rotazione O, l'angolo orientato α (a è il primo lato) e un segmento PQ. Strategia risolutiva: costruite l'immagine $P'Q'$ nella rotazione assegnata.



Ipotesi: ....
Tesi: ....
Dimostrazione. ....

Teorema 8.9. *La rotazione è una isometria diretta.*

Ricordate che per questa dimostrazione basta costruire l'immagine di una figura e verificare che viene mantenuto il verso di percorrenza del contorno. Vi proponiamo, nella figura a lato, il centro e l'angolo di rotazione; disegnate una figura geometrica, costruite la sua immagine e concludete.



8.3 Composizione di isometrie

8.3.1 Composizione di isometrie di tipo diverso

Esempio 8.11. Riferendovi alla figura 8.11, completate:

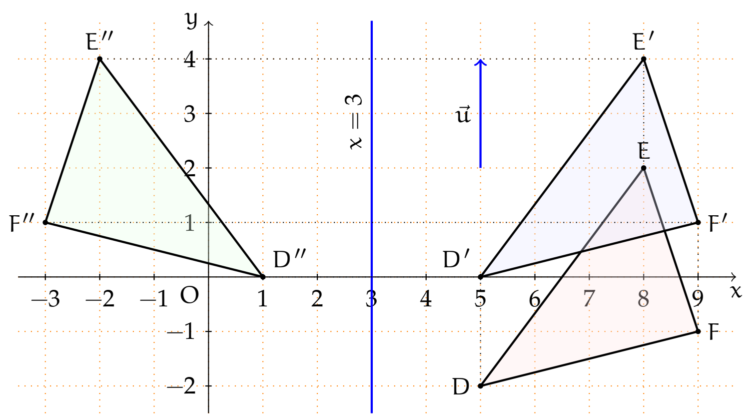


FIGURA 8.11: Esempio 8.11

Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati il triangolo DEF avente i vertici di coordinate $D(\ldots;\ldots)$, $E(\ldots;\ldots)$ ed $F(\ldots;\ldots)$ e il vettore $\vec{u}$ di componenti $(\ldots;\ldots)$.

Con la traslazione di vettore $\vec{u}$ si ha $DEF \xrightarrow{T_{\vec{u}}} \ldots\ldots\ldots$ e $DEF \cong D'E'F'$ essendo la traslazione una isometria.

Nella simmetria assiale $S_{x=3}$ si ha $D'E'F' \xrightarrow{S_{x=3}} \ldots\ldots\ldots$ e $D'E'F' \cong D''E''F''$ essendo la simmetria assiale una isometria.

Completate con le coordinate dei punti

$$\left.\begin{array}{l} D(\dots;\dots) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} D'(\dots;\dots) \overset{S_{x=3}}{\longrightarrow} D''(\dots;\dots) \\ E(\dots;\dots) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} E'(\dots;\dots) \overset{S_{x=3}}{\longrightarrow} E''(\dots;\dots) \\ F(\dots;\dots) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} F'(\dots;\dots) \overset{S_{x=3}}{\longrightarrow} F''(\dots;\dots) \end{array}\right\} \Rightarrow DEF \overset{T_{\vec{u}}}{\to} D'E'F' \overset{S_{x=3}}{\longrightarrow} D''E''F''$$

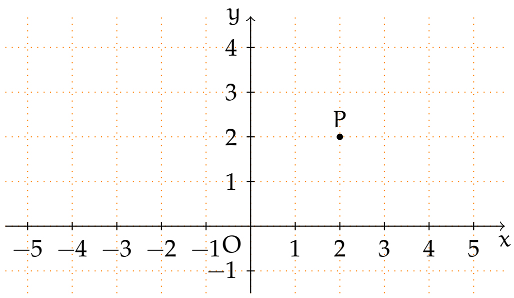
e $DEF \cong D''E''F''$ per la proprietà transitiva della congruenza.

Definizione 8.16. Chiamiamo *composizione di due isometrie* Φ_1 *e* Φ_2 l'isometria $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ (e leggiamo "Φ_2 composta con Φ_1"), che associa ad un qualunque punto P del piano il punto P'' ottenuto determinando prima l'immagine P' di P in Φ_1 e di seguito l'immagine P'' di P' in Φ_2. In formula: $\Phi(P) = \Phi_1 \circ \Phi_2 : P \overset{\Phi_1}{\to} P' \overset{\Phi_2}{\to} P''$.

Riprendendo l'esempio precedente concludiamo $DEF \overset{S_{x=3} \circ T_{\vec{u}}}{\longrightarrow} D''E''F''$.

In generale, la composizione di isometrie non è commutativa, cioè $\Phi_1 \circ \Phi_2 \neq \Phi_2 \circ \Phi_1$. Se, utilizzando l'esempio precedente volete verificare che $S_{x=3} \circ T_{\vec{u}} \neq T_{\vec{u}} \circ S_{x=3}$, troverete un risultato che sembra contraddire quanto affermato; è però sufficiente trovare un controesempio per convincerci della verità della proposizione sopra enunciata.

Controesempio Determinate l'immagine del punto $P(2;2)$ in $S_y \circ T_{\vec{u}}$ essendo $\vec{u}(3;2)$. Quindi confrontatela con l'immagine dello stesso punto in $T_{\vec{u}} \circ S_y$.



Tracciate il vettore $\vec{u}(3;2)$ e completate

$$P(2;2) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} P'(\dots;\dots) \overset{S_y}{\to} P''(\dots;\dots)$$

$$P(2;2) \overset{S_y}{\to} P'(\dots;\dots) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} P''(\dots;\dots)$$

Concludete: la composizione di isometrie non è ...., infatti si ha $S_y \circ T_{\vec{u}} \dots T_{\vec{u}} \circ S_y$.

Possiamo determinare l'equazione che lega le coordinate del punto iniziale con quelle della sua immagine nell'isometria ottenuta dalla composizione? Procediamo per passi:

I° passo: scriviamo l'equazione della traslazione

$$T_{\vec{u}} = \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

e della simmetria rispetto all'asse y

$$S_y = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad .$$

II° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P; y_P)$ in $S_y \circ T_{\vec{u}}$:

$$P(x_P; y_P) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P'(x_P+3; y_P+2) \xrightarrow{S_y} P''(-x_P-3; y_P+2) \Rightarrow S_y \circ T_{\vec{u}} : \begin{cases} x'' = -x_P - 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

III° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P; y_P)$ in $T_{\vec{u}} \circ S_y$:

$$P(x_P; y_P) \xrightarrow{S_y} P'(-x_P; y_P) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P''(-x_P+3; y_P+2) \Rightarrow T_{\vec{u}} \circ S_y : \begin{cases} x'' = -x_P + 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

Dunque confermiamo la non commutatività dell'operazione di composizione delle isometrie.

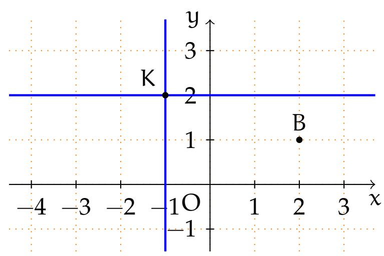
8.3.2 Composizione di isometrie dello stesso tipo

Esempio 8.12. Determinate l'equazione dell'isometria che si ottiene componendo la simmetria che ha per asse l'asse x e quella avente come asse l'asse y: $S_y \circ S_x \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$ Quale isometria avete ottenuto? Determinate l'equazione di $S_x \circ S_y \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$ Cosa potete concludere?

Lasciamo al lettore la sua risoluzione.

Esempio 8.13. Nel riferimento cartesiano ortogonale sono tracciate le rette a: $x = -1$ e b: $y = 2$ e il punto $B(2; 1)$.

1. Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega_1 = S_a \circ S_b$ della quale indicherete l'equazione.
2. Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega_2 = S_b \circ S_a$ della quale indicherete l'equazione.
3. Indicate le coordinate del punto K e scrivete l'equazione della simmetria di centro K. Cosa concludete?



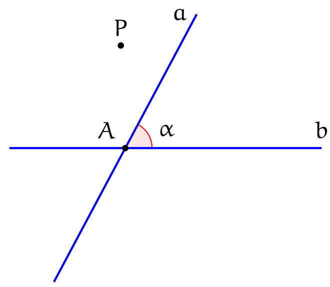
Lasciamo al lettore la sua risoluzione.

Generalizziamo: siano a e b due rette tra loro perpendicolari e K il loro punto di intersezione. Dimostrate che:

- La composizione delle due simmetrie di assi a e b è commutativa.
- L'isometria $\Omega = S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$ è la simmetria centrale di centro K.

Conclusione: la composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari in K è la simmetria centrale di centro K. L'operazione è commutativa.

Esempio 8.14. Servendovi della figura a fianco



- Determinate l'immagine del punto P nell'isometria ottenuta componendo due simmetrie con assi incidenti $P \overset{S_a}{\to} P' \overset{S_b}{\to} P''$.
- Verificate che la composizione non è commutativa determinando $P \overset{S_b}{\to} P_1' \overset{S_a}{\to} P_1''$.
- Dimostrate che $AP \cong AP' \cong AP'' \cong AP_1' \cong AP_1''$.
- Dimostrate che i punti P, P', P'', P_1' e P_1'' stanno su una stessa circonferenza di centro A.
- Dimostrate che $P\widehat{A}P'' = 2 \cdot \alpha$.

Conclusione: la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti nel punto A è la rotazione di centro A e angolo orientato $2 \cdot \alpha$; i punti corrispondenti appartengono ad una circonferenza di centro A e raggio AP, dove P è il punto considerato. La composizione in esame non è commutativa.

Proposizione 8.10. *La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione di vettore avente direzione perpendicolare ai due assi di simmetria e modulo uguale al doppio della distanza tra gli stessi assi.*

Proposizione 8.11. *La composizione di due simmetrie centrali, di centro rispettivamente O_1 e O_2, è una traslazione di vettore avente la direzione della retta O_1O_2 e modulo uguale al doppio della distanza tra O_1 e O_2.*

8.3.3 Isometria inversa

Sappiamo che dalla composizione di due isometrie si ottiene una isometria e in generale componendo due trasformazioni geometriche si ottiene una trasformazione geometrica, ossia una corrispondenza biunivoca tra punti del piano. Consideriamo il caso di due trasformazioni Ψ_1 e Ψ_2 tali che per ogni punto P del piano risulti

$$\Psi_1 \circ \Psi_2(P) = \Psi_2 \circ \Psi_1(P) = P$$

cioè che l'immagine di un qualunque punto P nella trasformazione composta coincida con P stesso. In tal caso la trasformazione composta è la trasformazione *identità* I che, per definizione, trasforma ogni punto in se stesso

$$I(P) = P \quad \forall P.$$

Quindi

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1 = I.$$

Definizione 8.17. Si chiama *trasformazione inversa* di una trasformazione Ψ la trasformazione che composta con Ψ, a destra o a sinistra, dà origine all'identità e la indicheremo con Ψ^{-1}; in simboli: $\Psi \circ \Psi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \Psi = I$.

Definizione 8.18. Una trasformazione che coincide con la sua inversa è detta *involutoria*.

8.4 Esercizi

8.4.1 Esercizi riepilogativi

8.1. Le coppie di figure rappresentate nella figura 8.12 si corrispondono in una trasformazione geometrica piana: associate a ciascuna coppia la caratteristica che rimane immutata nella trasformazione, ossia individuate l'invariante o gli invarianti della trasformazione.

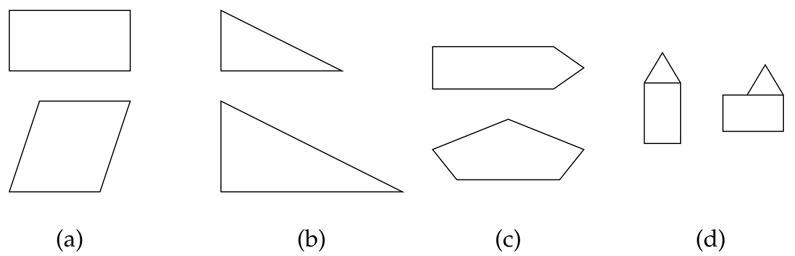


FIGURA 8.12: Esercizio 8.1

8.2. Si sa che una trasformazione geometrica muta un quadrato in un rombo; gli invarianti di questa trasformazione sono:

a) il parallelismo dei lati e l'ampiezza degli angoli;
b) l'ampiezza degli angoli e la misura dei lati;
c) solo il parallelismo dei lati;
d) il parallelismo dei lati e la perpendicolarità delle diagonali.

8.3. Quali coppie rappresentate nella figura 8.13 sono formate da figure corrispondenti in una isometria?

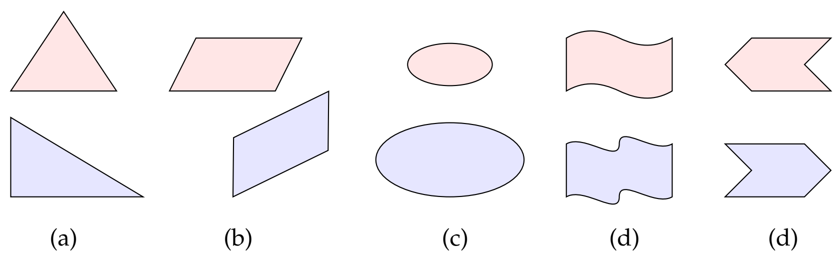


FIGURA 8.13: Esercizio 8.3

8.4. Presi nel piano due punti T e T' è vero che possiamo sempre individuare la simmetria centrale in cui T' è immagine di T?

8.5. Come dobbiamo scegliere due segmenti affinché sia possibile determinare una simmetria centrale in cui essi siano corrispondenti?

8.6. Anche in natura si presentano elementi dotati di un centro di simmetria: cercate una foto di un fiore che presenta un centro di simmetria e individuate quest'ultimo.

8.7. Sappiamo che $S_K : P\left(\frac{3}{5};0\right) \to P'\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$, determinate il centro K della simmetria.

8.8. Il segmento di estremi $A(-2;4)$ e $B(2;-4)$ in S_O, essendo O l'origine del riferimento cartesiano ortogonale

a) ha tutti i suoi punti fissi;
b) ha un solo punto fisso;
c) ha fissi solo gli estremi;
d) ha fissi tutti i punti interni ma non gli estremi;
e) non ha punti fissi.

8.9. Sono assegnati i punti $A(-5;0)$, $B(0;5)$ e $C(1;-1)$; determinate le coordinate dei vertici $A'B'C'$ del triangolo immagine di ABC nella simmetria avente come centro il punto medio M del lato AC.

8.10. I punti $A(1;5)$, $B(-2;2)$ e $C(0;-4)$ sono tre vertici di un parallelogramma. Determinate le coordinate del quarto vertice. Indicate con M il punto di incontro delle diagonali; in S_M il parallelogramma $ABCD$ è fisso o unito? Perché?

8.11. Sappiamo che l'equazione di una simmetria centrale di centro $C(p;q)$ è $\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$; note le coordinate di un punto $P(x;y)$ e della sua immagine $P'(x';y')$ le coordinate del centro sono:

a) $p = x' + x \quad q = y' + y$;
b) $p = x - \frac{1}{2}x' \quad q = y - \frac{1}{2}y'$;
c) $p = 2(x' + x) \quad q = 2(y' + y)$;
d) $p = \frac{1}{2}(x' + x) \quad q = \frac{1}{2}(y' + y)$;
e) $p = \frac{1}{2}(x' - x) \quad q = \frac{1}{2}(y' - y)$.

8.12. Verificate che i tre punti $A(3;2)$, $B(7;-2)$, $C(5;0)$ sono allineati. È vero che C è il centro della simmetria che fa corrispondere al punto A il punto B? (Ricorda che puoi verificare l'allineamento verificando che $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$)

8.13. Il centro della simmetria che associa al triangolo di vertici $A(0;4)$, $B(-2;1)$ e $C(1;5)$ il triangolo di vertici $A'(2;-2)$, $B'(4;1)$ e $C'(1;-3)$ è

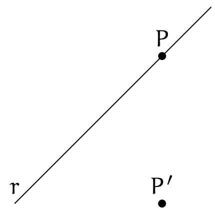
a) $K(-1;1)$;
b) $K(1;-1)$;
c) $K(1;1)$;
d) $K(-1;-1)$.

8.14. Determinate l'immagine M' del punto medio M del segmento AB di estremi $A(0;5)$ e $B(-4;1)$ in S_O (O è l'origine del riferimento cartesiano). È vero che $BM'A$ è isoscele sulla base AB?

8.15. Determinate la natura del quadrilatero $ABA'B$ che si ottiene congiungendo nell'ordine i punti $A(-1;1)$, $B(-4;-5)$, A' e B' rispettivamente simmetrici di A e B in S_O. Determinate la misura delle sue diagonali.

8.16. Nel piano sono assegnati i punti T e T' corrispondenti in una simmetria assiale. Come potete determinare l'asse di simmetria?

8.17. Nel piano è assegnata la retta r e un suo punto P e un punto P' non appartenente ad r. Costruisci la retta r' immagine di r nella simmetria assiale che fa corrispondere al punto P il punto P'.



8.18. Costruite l'immagine di ciascun triangolo ABC della figura 8.14 nella simmetria avente come asse la retta del lato AC.

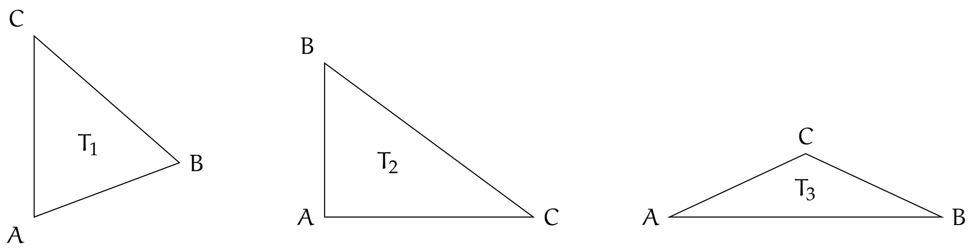


FIGURA 8.14: Esercizio 8.18

8.19. Nel triangolo isoscele ABC di base BC considerate la retta r passante per A e perpendicolare a BC; costruite l'immagine di ABC nella simmetria di asse r. Stabilite quale proposizione è vera:

a) il triangolo è fisso nella simmetria considerata;
b) il triangolo è unito nella simmetria considerata.

8.20. Assegnato il quadrato $ABCD$, determinate la sua immagine nella simmetria avente come asse la retta della diagonale AC. Stabilite quale proposizione è vera:

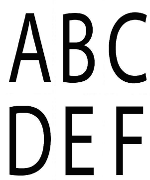
a) il quadrato è fisso nella simmetria considerata;
b) il quadrato è unito nella simmetria considerata.

8.21. Motivate la verità delle proposizioni
p_1: «il quadrato possiede 4 assi di simmetria»,
p_2: «il triangolo equilatero possiede 3 assi di simmetria».

8.22. Dimostrate che la retta di un diametro è asse di simmetria per la circonferenza. Potete concludere che la circonferenza possiede infiniti assi di simmetria?

8.23. Tra i trapezi ne trovate uno avente un asse di simmetria? Qual è l'asse di simmetria?

8.24. Quali lettere dell'alfabeto, tra quelle proposte a fianco, hanno un asse di simmetria?



8.25. Le due rette tracciate sono assi di simmetria del rettangolo in grigio a fianco e pertanto lo sono anche per l'immagine in esso contenuta. Vero o falso?

8.26. Perché la retta che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele non è un suo asse di simmetria?

8.27. In S_x (simmetria assiale rispetto all'asse x) il segmento AB di estremi $A(3;2)$ e $B(3;-2)$

a) è unito, luogo di punti uniti;
b) non ha punti fissi;
c) ha tutti i suoi punti uniti tranne A e B;
d) ha un solo punto fisso;
e) ha solo A e B fissi.

8.28. Dimostrate che un qualunque segmento MN di estremi $M(a;b)$ e $N(c;d)$ ha come corrispondente sia nella simmetria avente come asse l'asse x, sia nella simmetria avente come asse l'asse y, il segmento $M'N'$ tale che $MN \cong M'N'$.

Ipotesi: $M(a;b)$, $N(c;d)$, $S_x : (M \to M') \wedge (N \to N')$
Tesi: $MN \cong M'N'$

Dimostrazione.
Determino $\overline{MN} = \dots$ Trovo $M'(\dots;\dots)$ e $N'(\dots;\dots)$. Determino $\overline{M'N'} = \dots$
Concludo: ...

Ipotesi: $M(a;b)$, $N(c;d)$, $S_y : (M \to M') \wedge (N \to N')$
Tesi: $MN \cong M'N'$

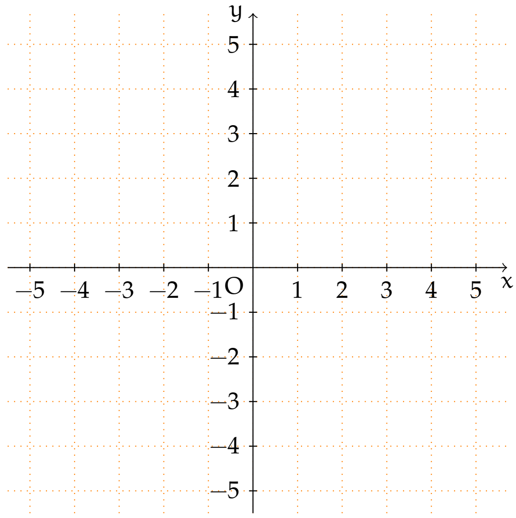
Dimostrazione.
Determino $\overline{MN} = \dots$ Trovo $M'(\dots;\dots)$ e $N'(\dots;\dots)$. Determino $\overline{M'N'} = \dots$
Concludo: ...

8.29. Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che $A(0;4)$, $B(-2;0)$ e che l'asse x è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

8.30. Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che $A(0;4)$, $B(-2;0)$ e che l'asse y è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

8.31. Considerate la funzione di proporzionalità quadratica $y = 2x^2$. Rappresentatela nel riferimento cartesiano e segnate i suoi punti A, B e C, rispettivamente di ascissa $x_A = 1$, $x_B = -\frac{1}{2}$ e $x_C = \frac{1}{\sqrt{2}}$; trovate i corrispondenti A', B', C' nella simmetria S_y e verificate che appartengono alla funzione assegnata. Vi è un punto della curva rappresentata che risulta fisso in S_y? Inoltre, quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

a) la curva è fissa nella simmetria considerata;
b) la curva è unita nella simmetria considerata.



8.32. I punti $A(-5;1)$, $B(-2;6)$, $C(3;6)$ e $D(0;1)$ sono vertici di un quadrilatero.

a) Dimostrate che è un parallelogrammo.
b) Determinate perimetro e area;
c) Determinate la sua immagine $A'B'C'D'$ in $S_{y=3}$.

È vero che sia sul lato AB che sul lato CD esiste un punto fisso nella simmetria considerata? Tali punti su quali lati di $A'B'C'D'$ si trovano? Perché?

8.33. Determinate l'immagine del quadrilatero ABCD di vertici $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(5;3)$, $D(0;5)$ nella simmetria S_{b1}.

8.34. Nella simmetria S_{b1} la retta $y = -x$ è fissa o unita?

8.35. Motivate la verità della seguente proposizione: «nella simmetria S_{b2} l'immagine dell'asse x è l'asse y». Viene mantenuto l'orientamento dell'asse x? Completate: S_{b2} : (asse x) $\rightarrow$ (asse ...) e (asse y) $\rightarrow$ (......) Analogamente: S_{b1} : (asse x) $\rightarrow$ (asse ...) e (asse y) $\rightarrow$ (......)

8.36. Dato il quadrilatero ABCD di vertici $A(0;0)$, $B(3;1)$, $C(4;4)$ e $D(1;3)$ trovate il suo corrispondente in S_{b1}. Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

a) il quadrilatero è fisso nella simmetria considerata;
b) il quadrilatero è unito nella simmetria considerata.

8.37. Determinate il corrispondente del parallelogramma ABCD di vertici $A(-5;1)$, $B(-2;6)$, $C(3;6)$, $D(0;1)$ in S_{b1}; perché AA', BB', CC' e DD' sono paralleli? Ricordando che il parallelogramma ha un centro di simmetria, determinate il centro di simmetria di ABCD e verificate che in S_{b1} esso ha come immagine il centro di simmetria di $A'B'C'D'$.

8.38. Nel piano cartesiano sono assegnati i punti $A(0;3)$, $B(-2;0)$ e $C(-1;-3)$.

a) Determinate i punti A', B' e C' immagine in S_{b2}.
b) Calcolate l'area del quadrilatero $A'B'C'O$, essendo O l'origine del riferimento.

c) Motivate la verità della proposizione: «i segmenti AB e $A'B'$ si incontrano in un punto P della bisettrice del II°-IV° quadrante».
d) È vero che $AP'B$ è congruente a PAB'?

8.39. Sono assegnate le simmetrie

$$S_1 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad ; \quad S_2 : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad ; \quad S_3 : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases} \quad ; \quad S_4 : \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = 3 - y \end{cases}$$

Usando qualche punto scelto arbitrariamente riconosci ciascuna di esse e completa la tabella sottostante:

Simmetria	Tipo	Centro (coordinate)	Asse (equazione)
S_1	....	......	....
S_2	....	......	....
S_3	....	......	....
S_4	....	......	....

8.40. Quale tra le seguenti caratteristiche è invariante in una simmetria assiale?

a) la posizione della figura;
b) la direzione della retta;
c) il parallelismo;
d) l'orientamento dei punti;
e) dipende dall'asse di simmetria.

8.41. I segmenti AB e $A'B'$ si corrispondono nella simmetria di asse r; sapendo che $ABB'A'$ è un rettangolo, quale proposizione è vera?

a) AB è perpendicolare ad r;
b) AB è parallelo ad r;
c) AB appartiene ad r;
d) AB è obliquo rispetto ad r e $AB \cap r = H$.

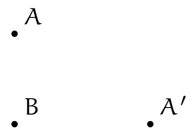
8.42. È assegnato il punto $P\left(-\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Determinate il suo corrispondente nelle simmetrie indicate e completate:

$$S_{b2} : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_{x=-\frac{1}{2}} : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_O : P \to P'(\ldots;\ldots)$$
$$S_x : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_{y=2} : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_{C(1;1)} : P \to P'(\ldots;\ldots)$$

8.43. Un segmento unito in S_{b2} è

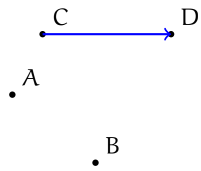
a) un segmento perpendicolare alla bisettrice del I°-III° quadrante;
b) un segmento perpendicolare alla bisettrice del II°-IV° quadrante nel suo punto medio;
c) un segmento parallelo alla bisettrice del I°-III° quadrante;
d) un segmento perpendicolare alla bisettrice del II°-IV° quadrante;
e) un segmento avente il suo punto medio appartenente alla bisettrice del II°-IV° quadrante.

8.44. Nel piano sono assegnati i tre punti A, B e A' dei quali il punto A' è immagine di A in una traslazione. Dopo aver determinato il vettore della traslazione costruite l'immagine del triangolo ABA'.



8.45. Determinate l'immagine del parallelogrammo $ABCD$ nella traslazione di vettore $\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}$.

8.46. Dati due punti distinti A e B e il vettore $\overrightarrow{CD}$ della figura a fianco, detti A' e B' i punti immagine di A e B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CD}$, rispondete alle domande:



a) Di che natura è il quadrilatero $ABB'A'$?
b) Può succedere che il quadrilatero in questione sia un rettangolo? E un rombo?
c) Cosa succede se AB è parallelo al vettore $\overrightarrow{CD}$?

8.47. Come dobbiamo assegnare due segmenti AB e $A'B'$ affinché siano corrispondenti in una traslazione? È unica la traslazione che associa ad AB il segmento $A'B'$?

8.48. Nel riferimento cartesiano è assegnato il punto $P(-4;2)$. Determinate il punto P' immagine nella traslazione $T(3;-1) : \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + (-1) \end{cases}$.

Strategia risolutiva:

1. individuate il vettore $\vec{w}$ della traslazione: $\vec{w}(\ldots;\ldots)$;
2. tracciate il vettore nel riferimento cartesiano;
3. determinate le coordinate di P': $P'(\ldots;\ldots)$.

Completate: $\overrightarrow{PP'}$ è .... a $\vec{w}$; questo significa che i due vettori hanno .... direzione (cioè sono ....), stesso .... e .... intensità.

8.49. Nel riferimento cartesiano, dopo aver fissato il punto $P(-4;2)$ siano dati i punti $Q(\ldots;\ldots)$ e $Q'(\ldots;\ldots)$ immagine nella traslazione $T(3;-1)$. Dimostrate con le conoscenze di geometria sintetica che $PP'Q'Q$ è un parallelogramma.

Ipotesi: $PP' \cong QQ'$, $PP' \ldots QQ'$
Tesi: ....

Dimostrazione. ......

8.50. Sappiamo che l'equazione di una traslazione è $T(a;b) : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Assegnate le coordinate $(x;y)$ di un punto P e $(x';y')$ della sua immagine P', le componenti del vettore della traslazione sono date da:

a) $a = x' + x$ e $b = y' + y$;
b) $a = x - x'$ e $b = y - y'$;
c) $a = x' - x$ e $b = y' - y$;
d) $a = x' + x$ e $b = y' - y$;
e) $a = \frac{x'}{x}$ e $b = \frac{y'}{y}$.

8.51. Dopo aver determinato l'equazione della traslazione in cui $A'(0;-2)$ è l'immagine di $A(3;2)$, determinate il perimetro del triangolo $AO'A'$ essendo O' il corrispondente di $O(0;0)$ nella traslazione trovata.

8.52. Verificate che il punto medio M del segmento PQ di estremi $P(-1;4)$ e $Q(5;0)$ ha come immagine in $T(3;-1)$ il punto medio M' del segmento $P'Q'$.

8.53. Applica la traslazione di equazione $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$ al segmento di estremi $A(-2;4)$ e $B(3;3)$.

8.54. Dati $A(1;0)$ e $B(0;2)$, determina C e D in modo che $ABCD$ sia un quadrato.

8.55. Determinate l'immagine del triangolo di vertici $A(0;2)$, $B(-3;2)$ e $C(0;5)$ nella traslazione $T(4;1)$. Calcolatene quindi perimetro e area.

8.56. Determinate l'equazione della traslazione di vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ assegnati dalla figura 8.15. Determinate inoltre l'immagine del poligono di vertici $H(-1;1)$, $K(0;-2)$, $L(3;0)$ ed $F(1;2)$.

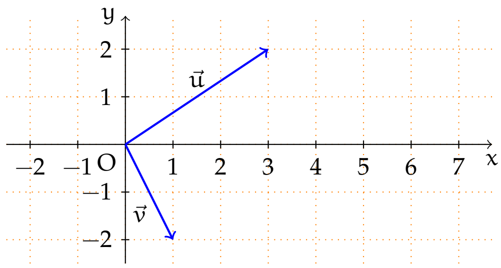
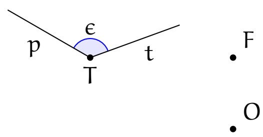


FIGURA 8.15: Esercizio 8.56

8.57. Un vettore $\vec{v}$ ha modulo unitario, è applicato nell'origine O e forma con l'asse delle ascisse un angolo di 30°. Determinate le sue componenti e scrivete l'equazione della traslazione da esso caratterizzata.

8.58. Prendete in considerazione l'angolo ϵ di vertice T della figura a fianco. Sia O il centro di rotazione e F un punto del piano di cui si vuole determinare l'immagine. Costruite F' seguendo i passi illustrati immediatamente dopo la definizione 8.15 a pagina 262.



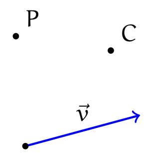
8.59. Costruite l'immagine del quadrato $ABCD$ nella rotazione di $+90°$ avente come centro di simmetria il vertice B. Fissate i punti medi M ed N rispettivamente di AB e di CD; dove si trovano le rispettive immagini?

8.60. È vero che il quadrato è unito nella rotazione avente come centro il punto di incontro delle diagonali e come ampiezza 90°?

8.61. L'ortocentro di un triangolo equilatero è il centro di una rotazione in cui il triangolo è unito. Determinate l'angolo di rotazione.

8.62. Costruite l'immagine $A'B'C'$ del triangolo equilatero ABC nella rotazione di centro B e ampiezza $-120°$. Dimostrate che C, B ed A' sono allineati e che ABC' è un triangolo equilatero congruente a quello dato.

8.63. Nel piano è assegnato il punto C e il vettore $\vec{v}$ (figura a lato); costruite l'immagine del punto P nell'isometria $T_{\vec{v}} \circ S_C$ e anche l'immagine dello stesso punto P nell'isometria $S_C \circ T_{\vec{v}}$. Determinate l'equazione di $\Phi_1 = T_{\vec{v}} \circ S_C$ e di $\Phi_2 = S_C \circ T_{\vec{v}}$.



8.64. Il centro della simmetria è il punto $C(-1;-2)$, il vettore della traslazione è $\vec{v}(3;-2)$ e il punto di cui vogliamo determinare l'immagine è scelto da voi arbitrariamente.

8.65. Sono assegnati il punto $C(-4;3)$, la retta $x = 1$ e il punto $P(0;5)$. Determinate l'immagine P'' di P nell'isometria $\Delta = S_C \circ S_{x=1}$ e l'immagine P^* di P nell'isometria $\Delta = S_{x=1} \circ S_C$. È vero che P'' e P^* si corrispondono nella simmetria S_y? Determinate l'area del triangolo $PP''P^*$.

8.66. È assegnato un punto O; determinate l'immagine P' di un punto P nella rotazione di centro O e angolo di $60°$ e l'immagine P'' di P' nella simmetria avente come asse la retta PO.

a) Completate: $P \xrightarrow{\dots} P'$.
b) Dimostrate che P, P' e P'' appartengono alla circonferenza di centro O e raggio OP.
c) Individuate le caratteristiche del quadrilatero $PP''OP'$.
d) Determinatene l'area, supponendo $\overline{OP} = 2$ m.

8.67. ABC è un triangolo equilatero e O è il centro della sua circonferenza circoscritta. Dimostrate che il triangolo è unito nella rotazione di centro O e angolo $\alpha = 120°$. Analogamente il quadrato $ABCD$ è unito nella rotazione di centro H, punto di incontro delle sue diagonali, di angolo $\alpha = 90°$.

8.68. Giustificate la verità della proposizione: «La simmetria centrale di centro K è una rotazione di $180°$».

8.69. Nel piano dotato di riferimento cartesiano è tracciata la bisettrice del I° e III° quadrante e la retta $y = 1$. Completate le osservazioni seguenti:

a) il punto di intersezione K ha coordinate $K(\dots;\dots)$;
b) l'angolo delle due rette è di $\dots°$.

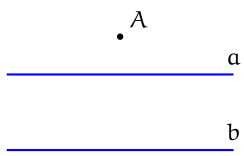
8.70. Scrivete l'equazione della simmetria avente come asse la bisettrice: $S_{b1} \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$ e l'equazione della simmetria di asse la retta $y = 1$: $S_{y=1} \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$.

8.71. Determinate le coordinate del punto P'' immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega = S_{b1} \circ S_{y=1}$ e scrivete l'equazione di Ω. Concludete: Ω è la rotazione di centro $\dots$ e angolo $\dots$ (ricordate il segno dell'angolo di rotazione).

8.72. Determinate le coordinate del punto P^* immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega^* = S_{y=1} \circ S_{b1}$ e scrivete l'equazione di Ω^*. Concludete: Ω^* è la rotazione di centro $\dots$ e angolo $\dots$ (ricordate il segno dell'angolo di rotazione).

8.73. Determinate l'equazione della isometria $J = S_{b1} \circ S_{x=4}$ e stabilite se esiste qualche elemento unito. Come cambia l'equazione dell'isometria $J^* = S_{x=4} \circ S_{b1}$ rispetto alla precedente? Sia J che J^* sono rotazioni: determinate centro e angolo (con segno) di ognuna di esse. A questo scopo potete utilizzare il punto $P(2;4)$ o un punto arbitrariamente scelto.

8.74. Determinate l'immagine del punto A nell'isometria $\Delta = S_b \circ S_a$ essendo a e b le rette parallele segnate nella figura a fianco e A il punto dato. Dimostrate che $\overline{AA''} = 2 \cdot d$ essendo d la distanza tra le rette a e b. Fissate arbitrariamente un altro punto B non appartenente ad alcuna delle rette date e determinate la sua immagine B'' nell'isometria Δ. È vero che $\overline{AA''} = \overline{BB''}$ e $\overline{AA''} \parallel \overline{BB''}$? Potete concludere che l'isometria Δ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$?



8.75. Facendo riferimento all'esercizio 8.74, verificate che la traslazione $\Delta_1 = S_a \circ S_b$ è caratterizzata da un vettore avente modulo e direzione uguali al vettore $\overrightarrow{AA''}$ ma verso opposto.

8.76. Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(2;1)$ e $C(-1;3)$. Determinate i punti A'', B'' e C'' immagine rispettivamente di A, B e C nella traslazione $T = S_{x=-2} \circ S_{x=1}$. Scrivete l'equazione della traslazione, individuate il vettore che la definisce calcolandone modulo e direzione.

8.77. Determinate i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ delle traslazioni $T_{\vec{u}} \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ e $T_{\vec{v}} \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ e il vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$. Verificate che $T_{\vec{s}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$. Cosa otteniamo dalla composizione $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$? Sapresti darne la motivazione? Concludete: componendo due traslazioni si ottiene ……

8.78. Nel riferimento cartesiano ortogonale Oxy è assegnato il punto $O_1(2;1)$; scrivete l'equazione della simmetria centrale di centro O $S_O \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$ e l'equazione della simmetria centrale di centro O_1 $S_{O_1} \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$. Determinate l'immagine P'' del punto $P(1;2)$ nell'isometria $\Sigma = S_O \circ S_{O_1}$ di cui avrete scritto l'equazione e determinate $\overline{PP''}$. Determinate Q'' immagine di $Q\left(\frac{1}{2};-1\right)$ nell'isometria Σ e determinate $\overline{QQ''}$. Potete affermare che $\overrightarrow{PP''} \equiv \overrightarrow{QQ''}$? Verificate che $\overrightarrow{PP''} \equiv \overrightarrow{QQ''} \equiv 2 \cdot \overrightarrow{O_1O}$. È vero che $\Sigma = S_O \circ S_{O_1}$ e $\Sigma_1 = S_{O_1} \circ S_O$ sono la stessa isometria?

8.79. Dimostrate che la composizione di due simmetrie centrali è una traslazione caratterizzata dal vettore parallelo alla retta passante per i due centri e modulo uguale al doppio della loro distanza.

8.80. Si consideri la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli $S_b \begin{cases} x' = 2b - x \\ y' = y \end{cases}$ e $S_a \begin{cases} x' = a - x \\ y' = y \end{cases}$. Componendo le due simmetrie si ha $S_b \begin{cases} x' = 2b - 2a + x \\ y' = y \end{cases}$ che è ……
Se $a = b$ le due simmetrie sono …… la loro composizione è ……

8.81. Si consideri la composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari. Una simmetria con asse parallelo all'asse y ha equazione $S_a \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$ e asse $x = a$. Mentre una simmetria con asse parallelo all'asse x ha equazione $S_b \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ e asse $y = b$. Componendo le due simmetrie otteniamo ......

8.82. Verificate che:

a) l'inversa della traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ è la traslazione di vettore $-\vec{v}$;
b) l'inversa di una rotazione di centro O e angolo α è la rotazione di centro O e angolo $-\alpha$.

8.83. Verificate che le simmetrie (centrale e assiale) hanno se stesse come isometria inversa, ossia $(S_K)^{-1} = S_K$ e $(S_r)^{-1} = S_r$.

8.84. La proposizione «la simmetria centrale è la composizione di due simmetrie assiali» è:

a) sempre vera;
b) vera se i due assi sono incidenti;
c) mai vera;
d) vera se i due assi sono perpendicolari;
e) vera se i due assi sono paralleli.

8.85. Completa la proposizione: «la simmetria centrale di centro $C\left(-\frac{5}{3}; \sqrt{3}\right)$ può essere ottenuta come composizione delle due simmetrie assiali di assi le rette ...... e ...... e la sua equazione è ....

8.86. Stabilite il valore di verità delle proposizioni:

a) Componendo due simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) Componendo due traslazioni si ottiene una traslazione $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) Componendo due simmetrie centrali si ottiene una simmetria centrale $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) Componendo due simmetrie assiali di assi incidenti si ottiene una rotazione $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) Componendo due rotazioni si ottiene una rotazione $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) L'identità si ottiene componendo una isometria con sé stessa $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) L'inversa di una traslazione è la stessa traslazione $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) Componendo una simmetria centrale con una rotazione si ottiene l'identità $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) Componendo una simmetria centrale di centro H con la simmetria assiale avente come asse una retta passante per H si ottiene sempre l'identità $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

8.87. L'equazione $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$ descrive:

a) la simmetria assiale di asse y;
b) la simmetria assiale di asse la retta $x = 4$;
c) la traslazione di vettore $\vec{v}(4; 0)$;
d) la simmetria assiale di asse $x = 2$;
e) la simmetria centrale di centro $C(4; 0)$.

8.88. La trasformazione $\Sigma \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = 2x \end{cases}$ è un'isometria?

8.89. Il segmento di estremi $A(3;4)$ e $B(3;-2)$ ha come simmetrico il segmento di estremi $A'(3;2)$ e $B'(5;2)$; è stata eseguita:

a) la simmetria assiale di asse la retta $x = 4$;
b) la simmetria S_{b2};
c) la simmetria S_{b1};
d) la simmetria assiale di asse la retta $x = 3$;
e) la simmetria $S_{y=3}$.

8.90. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

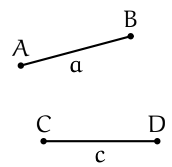
a) In una isometria vi è almeno un elemento unito $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) Nella simmetria centrale vi sono infinite rette unite, ma solamente un punto unito $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) In ogni triangolo vi è almeno un asse di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) Qualche quadrilatero ha un centro di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) Il triangolo equilatero ha un centro di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) Il rombo è l'unico quadrilatero avente due assi di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) Tutte le rette aventi la stessa direzione del vettore della traslazione sono rette unite $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) Solo la simmetria assiale è una isometria invertente $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) Rette parallele hanno come immagine in una isometria rette parallele $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
j) In una isometria una retta è sempre parallela alla sua immagine $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

8.91. Il quadrilatero di vertici $A(5;0)$, $B(9;0)$, $C(12;4)$ e $D(7;3)$ nella simmetria S_x ha fisso il lato AB. Spiegate come sia possibile questo fatto.

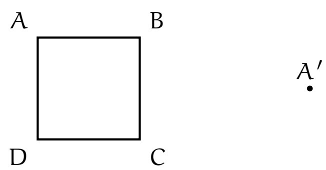
8.92. Dimostrate che la bisettrice di un angolo è il suo asse di simmetria.

8.93. Il rettangolo $ABCD$ con $AB < BC$ ha come immagine il rettangolo $A'B'C'D'$ nella simmetria avente come asse la retta AC. Potete affermare che $AB'DCD'B$ è un esagono regolare?

8.94. I due segmenti della figura a fianco possono essere corrispondenti in una simmetria centrale?



8.95. Nella figura a fianco abbiamo disegnato il quadrato $ABCD$ e il punto A' corrispondente di A in una isometria. Stabilite quale isometria è completamente fissata con questi elementi (simmetria assiale, traslazione, simmetria centrale) e determinate in essa l'immagine del quadrato.



8.96. Costruite l'immagine di un triangolo rettangolo ABC (non isoscele) di ipotenusa BC

a) in ciascuna delle simmetrie S_A, S_B e S_C;
b) nella simmetria S_M essendo M il punto medio dell'ipotenusa;
c) in ciascuna delle simmetrie aventi come assi le rette dei lati.

8.97. Comporre due traslazioni di vettori $\vec{v_1}(2;3)$ e $\vec{v_2}(3;6)$ applicandole al triangolo ABC con $A(-2;-1)$, $B(-1;-2)$ e $C(-4;-3)$.

8.98. Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(-2;6)$ e $B(-3;3)$ nella simmetria di asse $x=-1$. Applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse $x=4$. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi paralleli tra loro, trova le nuove coordinate dei due punti A e B.

8.99. Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(1;-6)$ e $B(4;3)$ nella simmetria di asse $x=2$, applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse $y=1$. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari tra loro, determina le nuove coordinate dei due punti A e B.

8.100. Componi le seguenti trasformazioni geometriche scrivendo l'equazione della trasformazione composta e fornendo un esempio con disegno relativo.

a) Due rotazioni con lo stesso centro.
b) Due rotazioni con centro diverso.
c) Due simmetrie centrali.
d) Due rotazioni di un angolo retto.

8.101. Sono assegnate le simmetrie assiali

$$S_1\begin{cases}x'=x\\ y'=2-y\end{cases}\qquad S_2\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}\qquad S_3\begin{cases}x'=x\\ y'=y\end{cases}\qquad S_4\begin{cases}x'=-x-6\\ y'=y\end{cases}$$

a) Individuate l'asse di simmetria di ciascuna di esse, rappresentate nel riferimento cartesiano ortogonale i rispettivi assi indicandoli con s_1, s_2, s_3 e s_4; completate e riproducete nello stesso riferimento

$$P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_1}P_1(\dots;\dots)\qquad P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_2}P_2(\dots;\dots)$$
$$P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_3}P_3(\dots;\dots)\qquad P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_4}P_4(\dots;\dots)$$

b) Siano A, B, C e D i punti $A=s_4\cap s_3$, $B=s_4\cap s_1$, $C=s_1\cap s_3$ e $D=s_2\cap s_1$; dimostrate che i triangoli ABC e CDE sono rettangoli isosceli e che i lati dell'uno sono il quadruplo di quelli dell'altro.
c) Determinate il rapporto tra i loro perimetri e tra le loro aree.

8.4.2 Risposte

8.2. d.

8.3. b, e.

8.7. $K\left(-\frac{1}{30};-\frac{1}{4}\right)$.

8.8. b.

8.9. $A'(1;-1)$, $B'(-4;-6)$, $C'(-5;0)$.

8.11. d.

8.13. c.

8.14. $M'(2;-3)$.

8.19. b.

8.20. b.

8.24. A, B, C, D, E.

8.25. Falso.

8.27. d.

8.65. 40.

8.66. $A_{PP''OP'} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$.