base PT e il segmento QH è la bisettrice dell'angolo al vertice $P\widehat{Q}T$, che risulta pertanto essere anche mediana ed altezza relativa alla base PT. Dunque gli angoli $P\widehat{H}Q$ e $T\widehat{H}Q$ sono retti e quindi la retta PT è perpendicolare ad AB. Abbiamo quindi trovato la perpendicolare ad AB passante per P. Per dimostrare che è unica possiamo ricorrere al ragionamento fatto nel primo caso, dove ora H è il punto P della dimostrazione precedente.

Il teorema è pertanto dimostrato. □

3.3 Rette parallele

Secondo la definizione di Euclide, due rette nel piano sono parallele se non hanno punti in comune. In maniera più moderna il concetto di parallelismo è interpretato come l'avere la stessa direzione. Si può anche dare una formulazione che unifichi le due definizioni precedenti; si deve però ricorrere al concetto di distanza: due rette nel piano sono parallele se mantengono sempre la stessa distanza. Se la distanza è nulla, le due rette sono coincidenti. Noi utilizzeremo la seguente:

Definizione 3.1. Due rette giacenti nello stesso piano si dicono *parallele* se sono coincidenti oppure non si incontrano mai.

Assumendo dunque questa come definizione di parallelismo, abbiamo bisogno di precisare il concetto di distanza. Dati due punti P e Q, la *distanza* tra P e Q è la lunghezza del *percorso più breve* che unisce i due punti. Questo concetto è valido anche se si riferisce alle distanze tra due città che si trovano negli stradari: sono riportate le lunghezze dei percorsi minimi tra tutte le strade alternative che collegano due città. Naturalmente, nel piano, ove si "dispone" di tutti i punti da poter "attraversare", il percorso più breve che collega due punti P e Q è il segmento PQ; quindi nella geometria euclidea assumiamo come distanza tra due punti la lunghezza del segmento avente per estremi i due punti.

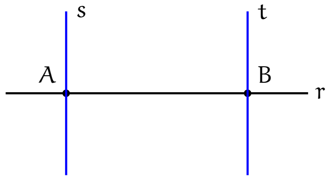
Se vogliamo parlare di distanza tra due insiemi di punti, allora va considerato il percorso più breve tra tutti i percorsi che collegano un qualsiasi punto del primo insieme con un qualsiasi punto del secondo: in pratica la distanza è la lunghezza del più piccolo segmento tra tutti quelli che collegano i due insiemi di punti.

Nel caso particolare di un punto A ed una retta BC, se il punto appartiene alla retta allora la distanza di A da BC è uguale a zero, altrimenti si considera come distanza la lunghezza del segmento AH, dove H è il punto in cui la perpendicolare a BC passante per A interseca la stessa retta BC: il motivo si intuisce in base a quanto detto, ma risulterà chiaro più avanti, quando affronteremo lo studio delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Analogamente, come distanza tra due rette parallele si assume la lunghezza di un qualunque segmento che unisce il punto di una delle due rette con il piede della perpendicolare mandata da esso sull'altra retta. Affermare che tali segmenti sono tutti congruenti è un modo più preciso per dire che le due rette mantengono sempre la stessa distanza.

Ricordiamo la versione "moderna" del V Postulato di Euclide: *dati una retta* r *ed un punto* P, *allora esiste una ed una sola retta parallela ad* r *e passante per* P.

Proposizione 3.4. *Se due rette nel piano sono perpendicolari alla stessa retta, esse sono parallele tra loro.*

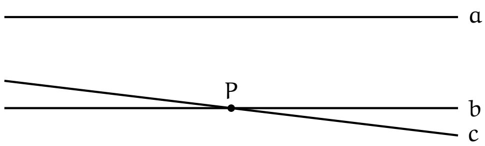


Dimostrazione. Sia r una retta, e siano s e t due rette, entrambe perpendicolari ad r. Se s e t intersecano r nello stesso punto P, allora per il teorema precedente necessariamente coincidono, e dunque sono parallele, secondo la nostra definizione di parallelismo.

Consideriamo ora il caso in cui s e t intersecano r in due punti distinti, rispettivamente A e B. Supponendo per assurdo che s e t si intersechino in un punto C, risulterebbero due distinte rette passanti per C e perpendicolari alla stessa retta, assurdo per il teorema precedente. Dunque deve risultare $s \parallel t$. □

Analoghe proprietà valgono per rette parallele e per rette incidenti qualunque. Precisamente:

Proposizione 3.5. *Siano date due rette parallele, se una terza retta è parallela ad una delle due, è parallela anche all'altra; inoltre, ogni retta che interseca una delle due, interseca anche l'altra.*



Dimostrazione. Siano a, b, c tre rette, con $a \parallel b$. Se a coincide con b, la tesi è banale. Supponiamo quindi che a e b non abbiano punti in comune. Vogliamo dimostrare che se $c \parallel a$ allora $c \parallel b$. La tesi è banale se c coincide con a oppure con b. Supponiamo dunque che c sia distinta da entrambe. Dimostriamo che se c non ha punti in comune con a, allora non può avere punti in comune neppure con b. Se per assurdo c avesse un punto P in comune con b, allora esisterebbero due rette distinte passanti per P entrambe parallele alla stessa retta a, cosa che contraddice il V postulato di Euclide.

Dimostriamo ora che se c interseca la retta a allora interseca anche la retta b. Detto Q il punto di intersezione tra le rette a e c, se per assurdo c non intersecasse la retta b, cioè se fosse $c \parallel b$, allora a e c sarebbero due rette distinte passanti per Q entrambe parallele alla retta b, contrariamente a quanto dice il V postulato di Euclide. □

❑ **Osservazione** La proposizione precedente rappresenta una sorta di proprietà transitiva del parallelismo. In realtà si è scelto di considerare parallele sia rette nel piano che non hanno punti in comune sia rette coincidenti proprio per fare in modo che la relazione di parallelismo sia una relazione di equivalenza: riflessiva, simmetrica, transitiva. Con la definizione di parallelismo data da Euclide, al contrario, sarebbe stata solo simmetrica, ma non riflessiva né transitiva. Per convincersi della non transitività, basta considerare tre rette a, b, c con a e c coincidenti e b parallela ad entrambe e distinta da esse: allora $a \parallel b$ e $b \parallel c$, ma a e c non sono parallele secondo la definizione di Euclide.

3.3.1 Rette parallele tagliate da una trasversale

Due rette parallele a e b vengono intersecate da una retta c (detta *trasversale*) che non è parallela ad esse,

- se la retta c è perpendicolare (ad entrambe), si vengono a formare otto angoli retti;
- se la retta c non è perpendicolare ad esse, si vengono a formare otto angoli, di cui quattro acuti e quattro ottusi, rispetto alla posizione che occupano alle coppie vengono attribuiti i seguenti nomi (figura 3.1):
  - le coppie di angoli 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 si dicono *corrispondenti* (perché occupano posizioni analoghe da una parallela all'altra);
  - le coppie di angoli 3 e 5, 4 e 6 si dicono *alterni interni* (alterni perché occupano posizioni opposte rispetto alla trasversale, interni perché si trovano all'interno delle due parallele);
  - le coppie di angoli 1 e 7, 2 e 8 si dicono *alterni esterni* (alterni perché sono opposti rispetto alla trasversale; esterni perché si trovano all'esterno della zona tra le due parallele);
  - le coppie di angoli 3 e 6, 4 e 5 si dicono *coniugati interni* (si dicono coniugati perché stanno dalla stessa parte rispetto alla trasversale);
  - le coppie di angoli 1 e 8, 2 e 7 si dicono *coniugati esterni*.

Inoltre le coppie 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8 sono angoli opposti al vertice.

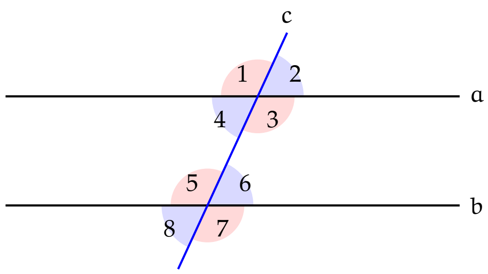
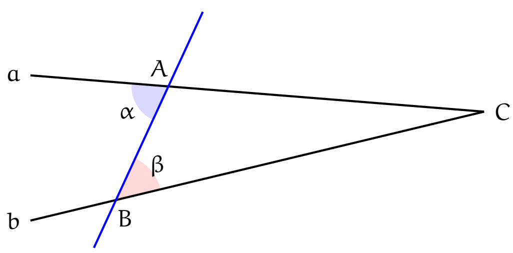


FIGURA 3.1: Le rette parallele a e b sono tagliate dalla trasversale c

Teorema 3.6 (delle parallele [diretto]). *Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.*



Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette a e b non siano parallele. Se non sono parallele si incontreranno in un punto C e quindi tra esse e la trasversale si viene a formare il triangolo ABC. Per il teorema dell'angolo esterno del triangolo, l'angolo (esterno) α è maggiore dell'angolo (interno) β. Questa conseguenza contraddice l'ipotesi del teorema, secondo la quale gli angoli alterni interni α e β sono congruenti. Allora abbiamo sbagliato a negare la tesi, che perciò risulta vera. □

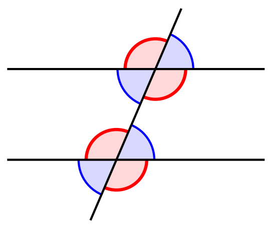
Possiamo generalizzare il teorema precedente ad altri casi.

Teorema 3.7 (Criterio di parallelismo)**.** *Se due rette tagliate da una trasversale danno origine ad una tra le seguenti coppie di angoli*

- *angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari*

allora sono parallele.

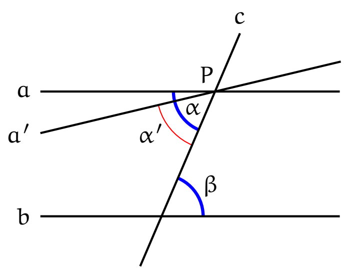
Dimostrazione. Tenendo conto che due angoli opposti al vertice sono congruenti e due angoli adiacenti sono supplementari, se risulta che due angoli corrispondenti qualsiasi sono congruenti, allora i quattro angoli acuti sono tutti congruenti ed i quattro angoli ottusi sono congruenti, e quindi anche angoli alterni interni. Pertanto, per il teorema precedente, le rette sono parallele.



Analogamente, se risultano supplementari due qualsiasi angoli coniugati (interni o esterni) risulta sempre che i quattro angoli acuti sono tutti congruenti tra loro come i quattro angoli ottusi, pertanto gli angoli alterni interni sono congruenti e, sempre per il teorema precedente, le due rette sono parallele. □

Teorema 3.8 (delle parallele [inverso])**.** *Se due rette sono parallele allora esse formano con una trasversale qualsiasi due angoli alterni interni congruenti.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che esista una coppia di angoli alterni interni α e β con $\alpha > \beta$. Per il punto P, vertice dell'angolo α si potrà allora tracciare una retta a' in modo che l'angolo da essa formato α' sia congruente a β. Ne segue che a' e b sono parallele perché formano angoli alterni interni congruenti. Allora esisterebbero due rette distinte, a e a', passanti per lo stesso punto P, entrambe parallele alla retta b. Questa conclusione contraddice il V postulato di Euclide, secondo il quale per un punto esterno a una retta passa un'unica parallela. In altre parole la tesi è vera. □



In generale possiamo enunciare il seguente

Teorema 3.9. *Se due rette sono parallele allora esse formano con una trasversale qualunque*

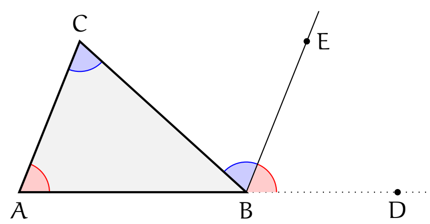
- *angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che sono congruenti gli angoli alterni interni formati da due parallele tagliate da una trasversale. Tenendo conto che gli angoli opposti al vertice sono congruenti e gli angoli adiacenti sono supplementari, si possono dedurre facilmente tutte le tesi di questo teorema. □

3.4 Somma degli angoli interni di un triangolo

Passiamo ora a dimostrare il secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

Teorema 3.10. *In un triangolo, un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.*



Dimostrazione. Sia ABC un triangolo e sia $C\widehat{B}D$ un angolo esterno. Tracciamo la semiretta $BE \parallel AC$ che divide l'angolo $C\widehat{B}D$ in due parti, $C\widehat{B}E$ ed $E\widehat{B}D$. L'angolo $C\widehat{B}E$ risulta congruente all'angolo $A\widehat{C}B$ in quanto i due angoli sono alterni interni rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale CB; analogamente l'angolo $E\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $C\widehat{A}B$ in quanto i due angoli sono corrispondenti rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale AD. Dunque $C\widehat{B}D$ è congruente alla somma degli angoli interni di vertici A e C. □

Corollario 3.11. *La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.*

Dimostrazione. Dalla figura precedente $A\widehat{B}D \cong A\widehat{B}C + C\widehat{B}E + E\widehat{B}D \cong A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B$, pertanto la somma degli angoli interni è congruente all'angolo piatto $A\widehat{B}D$. □

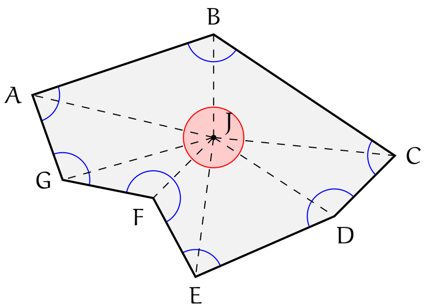
Corollario 3.12. *Un triangolo non può avere più di un angolo retto e/o ottuso.*

Dunque, necessariamente almeno due angoli sono acuti. Di conseguenza, gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

3.5 Somma degli angoli interni di un poligono

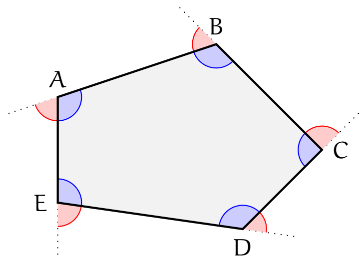
Teorema 3.13. *Dato un poligono P di n lati, la somma degli angoli interni di P è $n-2$ angoli piatti.*

Dimostrazione. Infatti, dato un qualunque poligono (anche concavo) di n lati, scelto un opportuno punto interno J in modo che, congiunto con esso ciascun vertice il poligono resti diviso in n triangoli, si può osservare che la somma degli angoli interni del poligono è data dalla somma degli angoli interni di n triangoli (n angoli piatti) meno l'angolo giro (2 angoli piatti) in J. □



Teorema 3.14. *La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso, indipendentemente dal numero dei lati, è congruente ad un angolo giro.*

Dimostrazione. Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno, per cui se si hanno m lati, e quindi m vertici, la somma degli angoli interni e degli angoli esterni è pari ad m angoli piatti. Essendo la somma degli angoli interni congruente a $m-2$ angoli piatti (per il teorema precedente), la somma degli angoli esterni sarà di due angoli piatti, cioè un angolo giro. □



3.6 Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

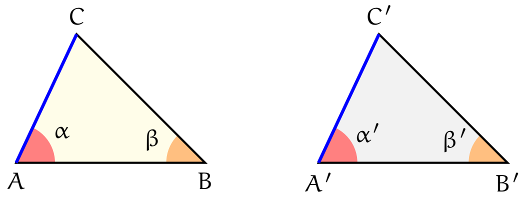
Se due triangoli hanno rispettivamente due angoli congruenti, allora anche i terzi angoli saranno congruenti nei due triangoli, in quanto supplementari della somma di angoli congruenti.

Dunque, se due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli, anche se il lato congruente non è compreso tra i due angoli congruenti, risultano congruenti. Precisamente, vale la seguente proposizione.

Teorema 3.15 (Generalizzazione del 2° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti una coppia di lati e due coppie di angoli ugualmente posti rispetto ai lati congruenti.*

Dimostrazione. Il caso in cui il lato congruente è compreso tra gli angoli congruenti è stato già dimostrato (2° criterio di congruenza dei triangoli) ed utilizzato per la dimostrazione di varie proprietà. Ora consideriamo l'altro caso.

In figura abbiamo rappresentato due triangoli, ABC e $A'B'C'$ che hanno per ipotesi i lati $AC \cong A'C'$ e gli angoli $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$. I due triangoli risultano congruenti, poiché



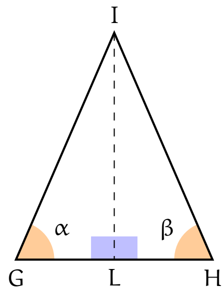
deve risultare $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C'}B'$, in quanto tali angoli sono supplementari alla somma di angoli congruenti per ipotesi (la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto). Ci riconduciamo quindi al caso del 2° criterio di congruenza, già dimostrato in precedenza. □

Riprendiamo una proprietà dei triangoli isosceli che abbiamo enunciato ma non abbiamo dimostrato.

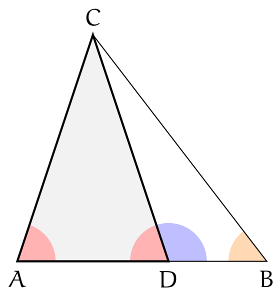
Proposizione 3.16. *In un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.*

Ipotesi: $IG \cong IH$, $\alpha \cong \beta$, $IL \perp GH$.
Tesi: $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$, $GL \cong LH$.

Dimostrazione. I triangoli GLI e LHI sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo congruenti un lato (quello obliquo, $IG \cong IH$) e due angoli ($\alpha \cong \beta$ e $I\widehat{L}G \cong I\widehat{L}H$). Di conseguenza, i restanti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare $GL \cong LH$ e $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$. □



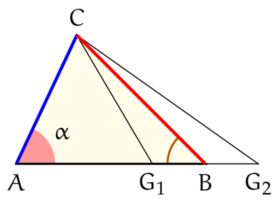
❑ **Osservazione** Dall'esame dei primi tre criteri di congruenza dei triangoli, nonché dalla generalizzazione del secondo criterio, si potrebbe essere indotti a pensare che due triangoli sono congruenti se hanno tre coppie di elementi rispettivamente congruenti, se almeno una delle tre coppie di elementi è costituita da lati.
In realtà, il primo criterio non si può generalizzare come il secondo. Basta pensare alla figura a lato: ADC è un triangolo isoscele, B è un punto sul prolungamento della base AD. Unendo B con C, vengono individuati due nuovi triangoli, ABC e BCD che hanno in comune il lato CB e l'angolo di vertice B, ed hanno inoltre congruenti i lati AC e CD, ma evidentemente non sono congruenti. Quindi se due triangoli hanno due lati ed un angolo qualsiasi congruenti, non è detto che siano congruenti. Però nei due triangoli citati in figura, gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{D}B$ sono supplementari.



Tale osservazione fa da premessa al 4° criterio di congruenza dei triangoli.

Teorema 3.17 (4° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi, a patto che l'angolo opposto all'altra coppia di lati congruenti sia della stessa specie (cioè sia, in entrambi i triangoli, acuto, retto, oppure ottuso).*

Ipotesi: $AC \cong DF$, $CB \cong FE$, $\alpha \cong \beta$, $C\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}D$ della stessa specie. Tesi: $ABC \cong DEF$.



Dimostrazione. Sulla semiretta AB prendiamo il punto G in maniera tale che AG sia congruente a DE. I triangoli AGC e DEF saranno congruenti per il primo criterio, poiché $AC \cong DF$ e $\alpha \cong \beta$ per ipotesi e $AG \cong DE$ per costruzione. Di conseguenza anche i rimanenti elementi risulteranno congruenti, in particolare $CG \cong FE$ e $C\widehat{G}A \cong F\widehat{E}D$.

Se il punto G coincide con B, abbiamo dimostrato la congruenza dei triangoli ABC e DEF. Altrimenti, il segmento CG, dovendo essere congruente ad FE, risulta congruente a CB. Dunque il triangolo CGB è isoscele sulla base GB e quindi gli angoli alla base $C\widehat{G}B$ e $C\widehat{B}G$, congruenti, sono necessariamente acuti. Distinguiamo due casi:

- se G è interno al segmento AB (G_1 nella figura), $C\widehat{G}B$ è esterno al triangolo AGC e $C\widehat{B}G$ è interno al triangolo ABC, quindi $D\widehat{E}F \cong A\widehat{G}C$ ottuso e $A\widehat{B}C$ acuto;
- se G è esterno al segmento AB (G_2 nella figura), $C\widehat{G}B$ è interno al triangolo AGC e $C\widehat{B}G$ è esterno al triangolo ABC, quindi $D\widehat{E}F \cong A\widehat{G}C$ acuto e $A\widehat{B}C$ ottuso.

Dunque, in nessuno dei due casi viene rispettata l'ipotesi, quindi $C\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}D$ sono della stessa specie. □

3.6.1 Congruenze di triangoli rettangoli

Per quanto affermato nelle proposizioni precedenti, sappiamo che i triangoli rettangoli hanno una coppia di angoli congruenti (quelli retti, essendo tutti congruenti fra loro, come affermato dal IV postulato di Euclide) e gli altri angoli necessariamente acuti, in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto (come segue dal secondo teorema dell'angolo esterno e dai corollari).

Tenendo conto dunque dei criteri di congruenza dei triangoli, si possono riformulare dei criteri di congruenza specifici per i triangoli rettangoli.

Teorema 3.18 (Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli). *Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti almeno uno tra:*

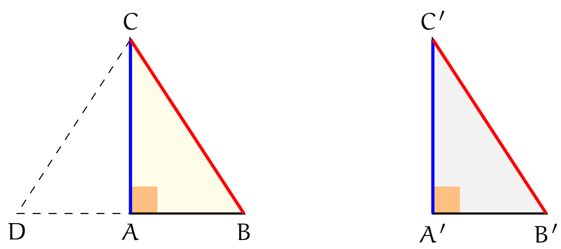
- *i due cateti (1º criterio);*
- *l'ipotenusa e un angolo acuto (2º criterio);*
- *un cateto e l'angolo acuto adiacente (2º criterio);*
- *un cateto e l'angolo acuto opposto (2º criterio);*
- *un cateto e l'ipotenusa (4º criterio).*

L'ultimo criterio dell'elenco è detto anche *criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli* (ha naturalmente una formulazione più semplice del 4º criterio di congruenza dei triangoli perché si sa già che le coppie di angoli non citati nell'ipotesi sono "della stessa specie", perché certamente acuti). Due triangoli rettangoli che hanno congruenti l'ipotenusa ed un cateto hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi (l'angolo retto, opposto all'ipotenusa), ed hanno gli angoli opposti all'altra coppia di lati congruenti della stessa specie (gli angoli opposti ai cateti congruenti sono acuti in entrambi i triangoli).

Data l'importanza di tale criterio, nonché la sua semplice dimostrazione, indipendente dal quarto criterio di congruenza dei triangoli qualunque, lo riformuliamo a parte e ne proponiamo una dimostrazione:

Teorema 3.19 (Criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli). *Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.*

Ipotesi: $C\widehat{A}B \cong C'\widehat{A'}B'$ retto, $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.



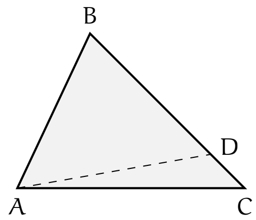
Dimostrazione. Si prolunga il cateto AB di un segmento AD congruente ad $A'B'$, quindi si congiunge D con C. Il triangolo ADC è anch'esso rettangolo in A, in quanto l'angolo $D\widehat{A}C$ è adiacente ad un angolo retto ($C\widehat{A}B$). I triangoli rettangoli ADC e $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio, in quanto hanno i due cateti ordinatamente congruenti: $AC \cong A'C'$ per ipotesi e $AB \cong A'B'$ per costruzione. Di conseguenza risulterà $CB \cong C'B'$ e dunque $CD \cong CB$ (per la proprietà transitiva della congruenza, essendo $CB \cong C'B'$ per ipotesi). Quindi il triangolo DCB è isoscele sulla base DB, e di conseguenza, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, i suoi angoli alla base sono congruenti: $A\widehat{B}C \cong A\widehat{D}C$.

Allora i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo ordinatamente congruenti due coppie di angoli e il lato opposto ad uno di essi (l'ipotenusa). □

3.7 Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

Teorema 3.20. *In un triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore.*

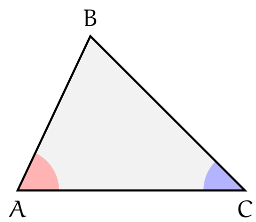
Ipotesi: $BC > AB$. Tesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$.



Dimostrazione. Scegliamo opportunamente un punto D sul lato maggiore BC in modo che BD sia congruente ad AB. Se uniamo A con D, poiché il segmento AD è interno al triangolo ABC, il triangolo ABC viene diviso in due nuovi triangoli, ADB e ACD. Il triangolo ADB è isoscele sulla base AD pertanto ha gli angoli alla base congruenti, per cui risulta $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$. Ma $B\widehat{A}D$ è una parte propria di $B\widehat{A}C$, mentre $A\widehat{D}B$, come angolo esterno al triangolo ACD è maggiore dell'angolo $A\widehat{C}D = A\widehat{C}B$, interno non adiacente, per il primo teorema dell'angolo esterno. Si ha dunque: $B\widehat{A}C > B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B > A\widehat{C}B$ e quindi la tesi (in maniera del tutto analoga si può dimostrare che $B\widehat{A}C > A\widehat{B}C$). □

Teorema 3.21. *In un triangolo, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.*

Ipotesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Tesi: $BC > AB$.



Dimostrazione. Dimostriamo la tesi in maniera indiretta, facendo uso del teorema precedente e del teorema del triangolo isoscele. Supponiamo vera l'ipotesi $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Facciamo un confronto tra i segmenti BC e AB considerando tutte le possibilità. È possibile che sia:

(i) $BC \cong AB$; (ii) $BC < AB$; (iii) $BC > AB$.

Se fosse vera la (i), il triangolo ABC sarebbe isoscele sulla base AC e risulterebbe $B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, per il teorema del triangolo isoscele, contro l'ipotesi.

Se fosse vera la (ii), per il teorema precedente risulterebbe $B\widehat{A}C < A\widehat{C}B$, contro l'ipotesi.

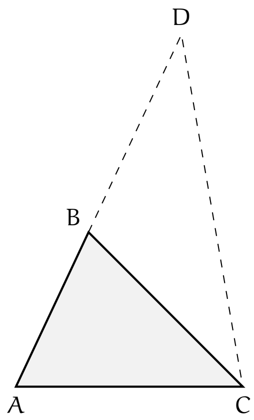
Rimane solo la possibilità che sia vera la (iii), la quale infatti non contraddice il teorema precedente, anzi lo conferma. Quindi la tesi è dimostrata. □

Da questo teorema discende la proprietà che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre maggiore di ciascuno dei due cateti, in quanto l'ipotenusa è il lato che si oppone all'angolo maggiore, l'angolo retto.

Ora dimostriamo una proprietà importante dei triangoli, nota come *disuguaglianza triangolare*.

Teorema 3.22 (Disuguaglianza triangolare)**.** *In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Dimostrazione. In riferimento alla figura a lato, dimostriamo che nel triangolo ABC, $AC < AB + BC$. Se AC fosse minore di un altro lato, sicuramente sarebbe minore della somma degli altri due e il teorema sarebbe dimostrato. Esaminiamo il caso in cui AC è maggiore sia di AB che di BC. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e prendiamo un punto D sul prolungamento in modo che il segmento BD sia congruente a BC. Unendo D con C abbiamo il triangolo ACD nel quale il lato AD è congruente alla somma dei lati AB e BC. La tesi si riconduce dunque a dimostrare che il lato AC è minore di AD. Osserviamo che il triangolo CBD è isoscele sulla base CD, per cui i suoi angoli alla base sono congruenti: $B\widehat{C}D \cong B\widehat{D}C$. Ma l'angolo $B\widehat{C}D$ è una parte propria di $A\widehat{C}D$ che quindi risulta maggiore di $B\widehat{C}D \cong A\widehat{D}C$. Dunque, nel triangolo ACD, il lato AD, che si oppone ad angolo maggiore, è maggiore del lato AC, che si oppone ad angolo minore, per il teorema precedente.



Visto che la costruzione fatta si può ripetere tale e quale rispetto a qualsiasi lato, si può concludere che $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$ e dunque, sottraendo ad ambo i membri della prima disuguaglianza il lato BC si ha $AC - AB < BC$, analogamente, sottraendo uno stesso segmento, si hanno $AC - BC < AB$, $AC - BC < AB$, $AB - AC < BC$, $AB - BC < AC$, $BC - AC < AB$, $BC - AB < AC$. Leggendo le relazioni da destra verso sinistra, ogni lato è maggiore della differenza degli altri due (abbiamo scritto tutte le disuguaglianze, anche se ovviamente ogni lato ha misura positiva mentre la differenza tra due lati può essere anche nulla o negativa). □

Proponiamo ora un teorema sulle disuguaglianze tra gli elementi di due triangoli.

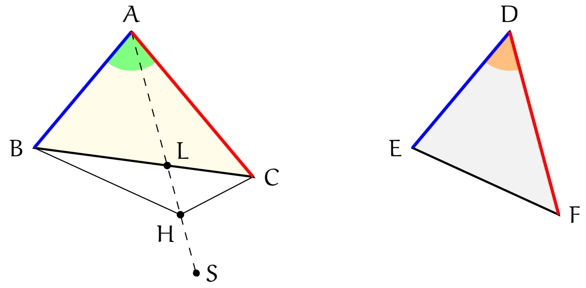
Supponiamo di avere due triangoli aventi due coppie di lati rispettivamente congruenti. Allora, se anche gli angoli compresi sono congruenti, i due triangoli risultano congruenti per il primo criterio. Altrimenti, se i due angoli compresi tra i lati congruenti non sono congruenti, i due triangoli non sono congruenti, ed i terzi lati sono diseguali nello stesso verso degli angoli opposti ad essi (cioè compresi tra i lati congruenti).

Teorema 3.23. *Se due lati di un triangolo sono rispettivamente congruenti a due lati di un altro triangolo, e l'angolo tra essi compreso è nel primo triangolo maggiore che nel secondo, allora il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo.*

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$ ($AB \leqslant AC$). Tesi: $BC > EF$.

Dimostrazione. Tracciamo la semiretta AS di origine A, interna all'angolo $B\widehat{A}C$, in modo tale che $B\widehat{A}S \cong E\widehat{D}F$. Se prendiamo su AS il punto H tale che $AH \cong DF$ ed uniamo H con B, otteniamo un triangolo ABH congruente a DEF per il primo criterio.

È importante dimostrare che il punto H è esterno al triangolo ABC. Per dimostrare ciò, prendiamo il punto L, intersezione tra la semiretta AS ed il lato BC. Notiamo che abbiamo iniziato la costruzione a partire dal lato AB avendo supposto $AB \leqslant AC$, ma da questa disuguaglianza segue la corrispondente disuguaglianza tra gli angoli opposti: $A\widehat{B}C \geqslant A\widehat{C}B$.



L'angolo $A\widehat{L}C$ è esterno al triangolo ABL, pertanto è maggiore dell'angolo $A\widehat{B}C$ per il primo teorema dell'angolo esterno. Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha $A\widehat{L}C > A\widehat{B}C \geqslant A\widehat{C}B$, dunque nel triangolo ALC vale la seguente relazione tra due angoli: $A\widehat{L}C > A\widehat{C}B$. Vale quindi anche la corrispondente relazione tra i lati opposti, per cui $AC > AL$. Poiché $AX \cong DF \cong AC$, il punto L è interno al segmento AH, e dunque H è esterno al triangolo ABC.

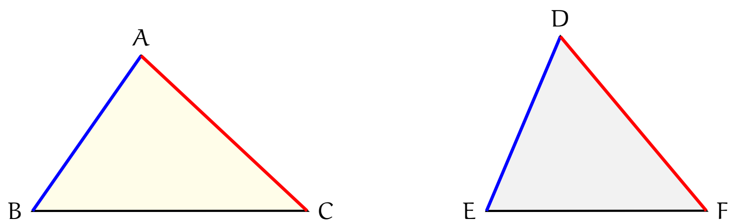
Abbiamo già unito H con B, uniamo H anche con C e ragioniamo sul triangolo BHC. Essendo BH congruente ad EF, la tesi è ricondotta a dimostrare che BC è maggiore di BH. Confrontiamo i rispettivi angoli opposti. Poiché il triangolo AHC è isoscele sulla base HC, gli angoli alla base risultano congruenti $A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H$, dunque risulta $B\widehat{H}C \cong B\widehat{C}H$ perché:

$$B\widehat{H}C = B\widehat{H}A + A\widehat{H}C > A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H = A\widehat{C}B + B\widehat{C}H > B\widehat{C}H.$$

Dalla precedente disuguaglianza tra gli angoli segue la corrispondente disuguaglianza tra i lati opposti $BC > BH$ e dunque la tesi. □

Teorema 3.24. *Se due lati di un triangolo sono, rispettivamente, congruenti a due lati di un altro triangolo, e il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo, allora l'angolo opposto al lato diseguale (compreso tra i lati congruenti) è nel primo triangolo maggiore che nel secondo.*

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $BC > EF$. Tesi: $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.



Dimostrazione. Procediamo per esclusione, in maniera analoga a come abbiamo fatto nel teorema inverso sulle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Supponiamo vera l'ipotesi e studiamo i vari casi delle possibili relazioni tra gli angoli citati nella tesi. Sono possibili tre casi:

(i) $B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F$; (ii) $B\widehat{A}C < E\widehat{D}F$; (iii) $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.

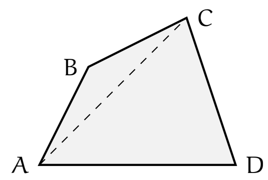
Se valesse l'ipotesi (i), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, i triangoli risulterebbero congruenti per il primo criterio, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.

Se valesse l'ipotesi (ii), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, per il teorema precedente risulterebbe $BC < EF$, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.

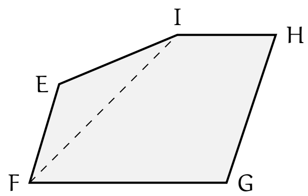
Rimane l'ipotesi (iii), che non contraddice il teorema precedente e che anzi lo conferma. Dunque la tesi è dimostrata. □

Dalla disuguaglianza triangolare seguono alcune proprietà riguardanti i lati di poligoni.

Teorema 3.25. *In un qualsiasi poligono, ciascun lato è minore della somma dei rimanenti.*



Nel quadrilatero $ABCD$ a fianco, se vogliamo dimostrare ad esempio che il lato AD è minore della somma degli altri tre, tracciamo la diagonale AC che divide il quadrilatero in due triangoli. Risulta $AD < AC + CD$, ed anche $AC < AB + BC$, per la disuguaglianza triangolare, per cui $AD < AB + BC + CD$.



Ma la proprietà non è limitata ai quadrilateri. Nel pentagono $EFGHI$ a fianco, se vogliamo dimostrare ad esempio che il lato EI è minore della somma degli altri quattro, possiamo tracciare la diagonale EG che divide il pentagono in un quadrilatero ed un triangolo. Se supponiamo che la tesi sia vera per i quadrilateri, verifichiamo che la tesi vale anche per i pentagoni. Infatti risulta $EI < EG + GH + HI$, in quanto la tesi è vera per i quadrilateri, e $EG < EF + FG$, per la disuguaglianza triangolare. Dunque $EI < EF + FG + GH + HI$, come volevasi dimostrare.

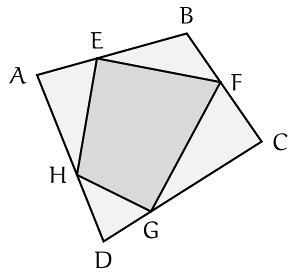
In realtà, il passaggio che abbiamo fatto dai quadrilateri ai pentagoni vale anche per passare dai pentagoni agli esagoni ecc. seguendo il procedimento per induzione. Più precisamente, poiché vale la disuguaglianza triangolare, la tesi è vera per i triangoli. Supponendo la tesi vera per tutti i poligoni di n lati (con $n \geqslant 3$) si dimostra che la tesi vale anche per i poligoni di $n + 1$ lati. Allora, la tesi è vera per tutti i poligoni (aventi un numero qualsiasi di lati).

Definizione 3.2. Un poligono convesso si dice *inscritto* in un altro se ogni vertice del primo giace sul contorno del secondo. Il secondo poligono è detto *circoscritto* al primo.

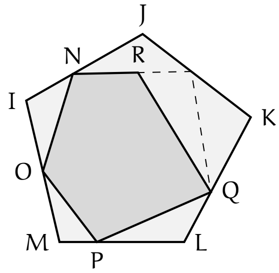
Teorema 3.26. *Se un poligono convesso è inscritto in un altro, il perimetro del primo è minore di quello del secondo.*

Illustriamo con un semplice esempio il contenuto del teorema. Non è da escludere il caso che un lato del primo poligono giaccia interamente su un lato del secondo (e nemmeno che la stessa situazione valga per più lati), però è semplice dimostrare la disuguaglianza anche senza considerare le parti del contorno perfettamente sovrapposte.

Osserviamo i quadrilateri $EFGH$ e $ABCD$ (il primo inscritto nel secondo) in figura; per la disuguaglianza triangolare $EF < EB + BF$, $FG < FC + CG$, $GH < GD + DH$, $HE < HA + AE$. La somma dei primi membri delle quattro disuguaglianze rappresenta il perimetro di $EFGH$, la somma dei secondi membri rappresenta il perimetro di $ABCD$.



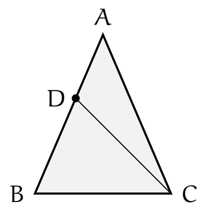
La tesi del teorema precedente vale anche se il poligono, anziché essere inscritto, è semplicemente contenuto nell'altro. Illustriamo questa proprietà con un semplice esempio: il poligono $NOPQR$ è contenuto in $IJKLM$. Il lato RQ è minore di $RS + SQ$ per la disuguaglianza triangolare. Dunque il perimetro del poligono $NOPQR$ è minore del perimetro di $NOPQS$, e quest'ultimo poligono è inscritto in $IJKLM$, per cui il perimetro di $NOPQS$ è minore del perimetro di $IJKLM$. Dalle due disuguaglianze segue la tesi.



Esempio 3.1. Nel triangolo ABC, isoscele sulla base BC, sia D un punto qualsiasi sul lato AB. Dimostra che $DC > DB$.

Individuiamo ipotesi, tesi e costruiamo il disegno.

Ipotesi: $AB \cong AC$, $D \in AB$. Tesi: $CD > BD$.



Dimostrazione. Consideriamo i triangoli ABC e DBC a lato. Poiché $B\widehat{C}D < B\widehat{C}A$ e $B\widehat{C}A \cong A\widehat{B}C$ si ha che $B\widehat{C}D < D\widehat{B}C$. Quindi, poiché in un triangolo ad angolo maggiore si oppone lato maggiore, considerando il triangolo DBC si ha $CD > BD$. □

3.8 Esercizi

3.8.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.1 - Primo teorema dell'angolo esterno

3.1. Vero o falso? In un triangolo:

a) Per ogni lato c'è un solo angolo esterno V F
b) Un angolo esterno è maggiore della somma degli angoli interni V F
c) L'angolo esterno non può essere acuto V F
d) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei tre angoli interni V F
e) L'angolo interno è minore di ciascuno degli angoli esterni non adiacenti V F
f) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti V F

3.2. Per ciascun vertice del triangolo nella figura 3.2 disegna un angolo esterno.

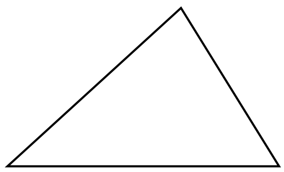


FIGURA 3.2: Esercizio 3.2

3.3. Nel triangolo isoscele ABC di base AB prolunga il lato CB fino a un punto D. Dimostra che: $A\widehat{B}D > A\widehat{C}B$, $C\widehat{B}A > A\widehat{D}B$, $C\widehat{A}B > B\widehat{A}D$, $C\widehat{A}B > B\widehat{D}A$.

3.4. Internamente a un triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Il prolungamento di AE incontra il lato BC nel punto E. Dimostra che: $B\widehat{D}E > B\widehat{A}D$, $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$, $A\widehat{E}B > C\widehat{D}B$.

3.5. Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AP dell'angolo in A. Dimostra che nel triangolo APC, l'angolo in P è maggiore dell'angolo in A.

3.6. Dimostra che la somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto. (Considera l'angolo esterno a uno dei due angoli).

3.7. Dimostra che un triangolo non può avere più di due angoli retti.

3.8. Dimostra che un triangolo non può avere due angoli ottusi.

3.9. Dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

3.2 - Rette perpendicolari

3.10. Vero o falso?

a) Dati un punto P e una retta r esiste sempre una retta perpendicolare a r e passante per P V F
b) Dati un punto P e una retta r esistono infinite rette passanti per P e perpendicolari a r V F
c) L'unicità della perpendicolare per un punto a una retta è un assioma V F
d) L'unicità della parallela per un punto a una retta è un assioma V F

3.11. Una retta a è perpendicolare a una retta b, la quale a sua volta è perpendicolare a una terza retta c. Tra loro, le rette a e c sono:

a) parallele; b) perpendicolari; c) né parallele né perpendicolari.

3.12. Disegna le rette passanti per P e perpendicolari alle altre rette presenti nella figura 3.3.

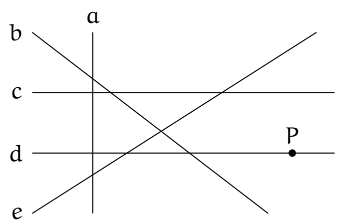


FIGURA 3.3: Esercizio 3.12

3.13. Per ognuno dei punti di intersezione delle tre rette nella figura 3.4 traccia la perpendicolare a ciascuna retta (aiutati con una squadretta).

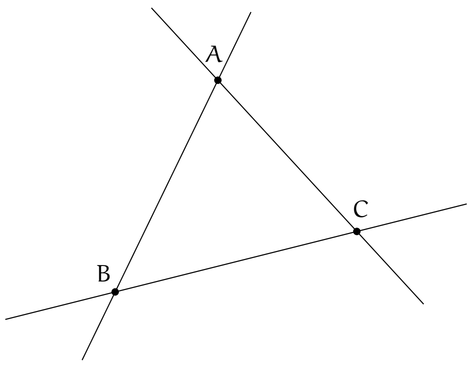


FIGURA 3.4: Esercizio 3.13

3.14. Dimostra che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

3.3 - Rette parallele

3.15. Vero o Falso?

a) Due rette parallele tagliate da una trasversale formano quattro angoli alterni interni V F
b) Gli angoli corrispondenti sono a due a due interni o esterni V F
c) Gli angoli interni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
d) Gli angoli esterni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
e) Due rette parallele possono anche coincidere V F
f) La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza V F
g) Due rette distinte hanno sempre un punto in comune V F
h) Una retta che incontra due rette parallele forma angoli alterni interni supplementari V F
i) Per ogni retta è possibile tracciare una sola retta parallela V F
j) Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni allora sono parallele V F
k) Nel ragionamento per assurdo si nega l'ipotesi per dimostrare che la tesi è vera V F
l) Ragionando per assurdo si nega la tesi e si ottenere una contraddizione con l'ipotesi V F

3.16. Nella figura 3.5 disegna una parallela e una perpendicolare alla retta r passanti per P e una parallela e una perpendicolare a s passanti per Q.

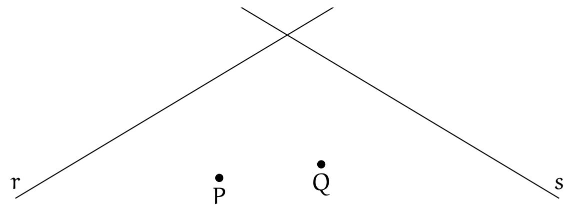


FIGURA 3.5: Esercizio 3.16

3.17. Nella figura 3.6 sono state tracciate due rette parallele e una trasversale. Indica con un arco gli angoli corrispondenti.

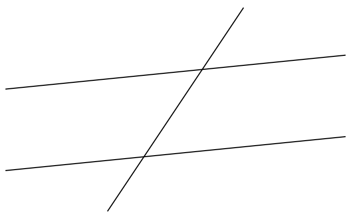
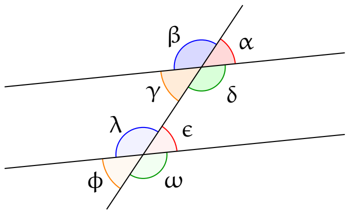


FIGURA 3.6: Esercizio 3.17

3.18. Nella figura a fianco sono state tracciate due rette parallele e una trasversale, sapendo che $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, dove π è l'angolo piatto, indica che frazione dell'angolo piatto sono gli altri angoli:

$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ $\quad\beta = \ldots$
$\gamma = \ldots$ $\quad\delta = \ldots$
$\epsilon = \ldots$ $\quad\lambda = \ldots$
$\phi = \ldots$ $\quad\omega = \ldots$



3.19. Nella figura 3.7 ABC è un triangolo isoscele, IF è parallela a BC. Individua tutti gli angoli congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$.

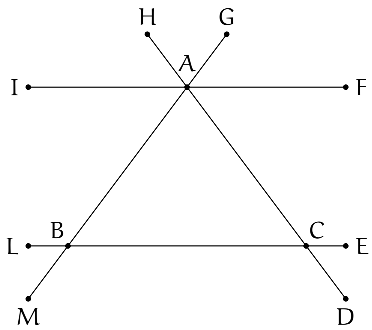
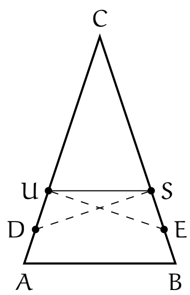


FIGURA 3.7: Esercizio 3.19

3.20. Completa ipotesi e tesi e metti in ordine le tre parti della dimostrazione:
In un triangolo ABC, isoscele su base AB, si prendano rispettivamente su AC e BC i punti D ed E equidistanti da C. Indicata con S la proiezione di D su BC e con U quella di E su AC. Dimostrare che il segmento US è parallelo ad AB.

Ipotesi: $AC \cong \ldots$, $D \in AC$, $E \in \ldots$, $S \in BC$, $DS \perp BC$, $U \in \ldots$, $EU \perp \ldots$ Tesi: $US \parallel AB$.

Parte 1. I triangoli CDS e CEU hanno: l'angolo $\widehat{C}$ in comune, CD ... CE per ......, $D\widehat{S}C$ .... perché angoli ......, quindi tali triangoli sono congruenti per il ...., ne segue CS ... CU e pertanto $C\widehat{U}S \cong$ ...
Parte 2. Applicando il teorema sulla somma degli angoli interni ai triangoli ABC e CUS, si ha che $C\widehat{U}S + C\widehat{S}U \ldots C\widehat{A}B + C\widehat{B}A$ perché supplementari dello stesso angolo $\widehat{C}$, ed essendo $\widehat{A} \ldots \widehat{B}$ perché .... ed essendo $C\widehat{U}S$ ...... perché ...., risulta che $C\widehat{A}B \ldots C\widehat{U}S$ perché ....
Parte 3. Gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{U}S$ (congruenti perché dimostrato) sono angoli ..... rispetto alle rette AB e US tagliate dalla trasversale ..., quindi le rette AB e US sono parallele.



3.21 (Prove invalsi 2005). A, B e C sono tre punti nel piano tali che per i seguenti tre angoli, tutti minori di un angolo piatto, valga la relazione $B\widehat{A}C = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B$. Quanto vale $B\widehat{A}C$?

a) 70°; b) 80°; c) 90°; d) 100°.

Dimostra le seguenti affermazioni sul parallelismo nei poligoni

3.22. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli corrispondenti (o alterni interni o alterni esterni) sono parallele.

3.23. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli coniugati interni (o coniugati esterni) sono perpendicolari.

3.24. Nel triangolo isoscele ABC traccia una parallela alla base AB, che incontra i lati obliqui in D ed E. Dimostra che anche DCE è un triangolo isoscele.

3.25. Se due rette r e s sono incidenti allora lo sono anche due qualsiasi rette u e v, con $u \parallel r$ e $v \parallel s$.

3.26. Sia M il punto medio del segmento AB. Sia r una retta che incontra AB in M. Sulla retta r da parti opposte rispetto a M prendi due punti C e D in modo che $AC \parallel BD$. Dimostra che $AC \cong BD$.

3.27. Dal vertice C di un triangolo isoscele ABC conduci la parallela alla base AB. Dimostra che tale parallela è bisettrice dell'angolo esterno in C al triangolo.

3.28. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Sia r la semiretta di origine C bisettrice dell'angolo formato dal prolungamento di BC e dal lato AC. Dimostra che la retta per AB è parallela a r.

3.29. Dato il triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prolunga la base AB dalla parte di A di un segmento AD. Sia E un punto interno all'angolo $D\widehat{A}C$ in modo che $E\widehat{A}D \cong C\widehat{A}B$. Dimostra che $EA \parallel CB$.

3.30. Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Detti D, E ed F i punti di intersezione delle parallele, dimostra che il triangolo DEF ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC.

3.31. Sia AD la bisettrice dell'angolo in A del triangolo ABC. Dal punto D traccia la parallela al lato AB, essa incontra il lato AC in E. Dimostra che il triangolo EDC ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC. Dimostra anche che ADE è un triangolo isoscele.

3.32. In un triangolo ABC rettangolo in A traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Dimostra che il triangolo ABH ha gli angoli congruenti a quelli di ABC.

3.33. Sulla base BC di un triangolo isoscele ABC prendi un punto D e traccia da esso la perpendicolare p alla base. La suddetta perpendicolare incontra il lato AB in E e il lato AC in F. Dimostra che il triangolo AFE è isoscele.

3.34. In un triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Da un punto N del lato AC traccia la parallela alla bisettrice AD, essa incontra che retta per AB in E e la retta per BC in F. Dimostra che AEN è un triangolo isoscele. Dimostra che ADC e NFC hanno angoli congruenti.

3.35. In un triangolo ABC sia E il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in B con il lato AC. Sia D un punto del lato AB tale che $DE \cong DB$. Dimostra che $DE \parallel BC$.

3.36. In un triangolo ABC traccia le bisettrici agli angoli nei vertici B e C. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici. Da D traccia la parallela al lato BC e indica con E ed F i punti di intersezione di questa parallela con i lati rispettivamente AB e AC. Dimostra che $FE \cong EB + FC$.

3.37. Dato il triangolo ABC prolunga il lato AB dalla parte di A di un segmento $AD \cong AB$, prolunga poi il lato AC dalla parte di A di un segmento $AE \cong AC$. Dimostra che $DE \parallel BC$.

3.38. Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Si prolunghi AM dalla parte di M di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che CD è parallelo ad AB.

3.39. Due rette parallele tagliate da una trasversale formano otto angoli, uno di essi è $1/3$ dell'angolo retto. Determina le misure degli altri angoli.

3.40. Siano α e β due angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è parallela alla bisettrice di β.

3.41. Siano α e β due angoli coniugati formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è perpendicolare alla bisettrice di β.

3.42. Disegna due segmenti AB e CD disposti in modo che si incontrino nel loro punto medio comune M. Congiungi A con D e B con C, dimostra che AD è parallelo a CB.

3.43. Disegna un angolo acuto $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi l'asse del segmento OP. Indica con Q e R i punti di intersezione dell'asse rispettivamente con la semiretta a e la semiretta b. Dimostra che OQ è parallelo a RP.

3.44. Disegna un angolo convesso $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi le perpendicolari PR e PQ rispettivamente alle semirette a e b. Dimostra che c è asse del segmento QR.

3.45. Sia ABC un triangolo equilatero. Traccia una parallela al lato AB che incontra il lato BC in D e AC in E. Dimostra che anche il triangolo CDE è equilatero.

3.46. Prolunga i lati AB e AC del triangolo ABC, entrambi i prolungamenti siano oltre il lato BC. Traccia le bisettrici degli angoli esterni ottenuti e sia P il loro punto di incontro. Da P traccia la parallela al lato BC, essa incontra AB in E e AC in F. Dimostra che $EF = EB + FC$.

3.4 - Somma degli angoli interni di un triangolo

3.47. Vero o Falso?

a) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo esterno $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a 3 angoli piatti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) La somma degli angoli esterni di un pentagono è congruente a 5 angoli piatti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a due angoli retti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) Un triangolo isoscele non può avere un angolo ottuso $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3.48. Sia ABC un triangolo equilatero. Si prolunghi AB di un segmento BD congruente al lato stesso e si congiunga D con C. Si dimostri che ACD è un triangolo rettangolo.

3.49. Calcola la misura degli angoli di un triangolo ABC sapendo che l'angolo interno in A è $4/5$ del relativo angolo esterno e che l'angolo interno in B è la metà dell'angolo interno in A.

3.50 (I Giochi di Archimede 2003)**.** Sia data una stella a 5 punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?

3.51 (I Giochi di Archimede 2005)**.** Nella figura seguente, quanto misura l'angolo α?

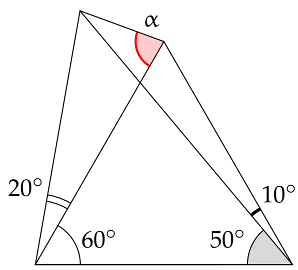


FIGURA 3.8: Esercizio 3.31

3.6 - Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

3.52. Vero o Falso?

a) Un triangolo rettangolo ha due angoli complementari V F
b) Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno almeno un lato congruente V F
c) Due triangoli rettangoli che hanno un cateto in comune sono congruenti V F
d) Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa in comune sono congruenti V F
e) Due triangoli rettangoli isosceli sono sempre congruenti V F
f) Due triangoli rettangoli isosceli che hanno un lato in comune sono congruenti V F
g) Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari V F

Dimostra le seguenti affermazioni sui teoremi di congruenza generalizzati

3.53. Dimostra che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti.

3.54. Dimostra che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.

3.55. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e l'angolo al vertice.

3.56. In un triangolo isoscele, le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

3.57. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa.

3.58. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e la mediana relativa ad esso.

3.59. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un angolo acuto e la sua bisettrice.

3.60. Se due triangoli hanno congruenti due coppie di lati e le mediane relative ai lati rimanenti, allora sono congruenti.

3.61. Dimostra che, in un triangolo isoscele, la bisettrice dell'angolo adiacente all'angolo al vertice è parallela alla base.

3.62. Dimostra che sono congruenti due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice congruenti e congruenti le altezze relative a uno dei lati obliqui.

3.63. In un triangolo qualsiasi ABC si prenda un qualsiasi punto del lato AB e da esso si tracci la parallela r alla bisettrice dell'angolo interno in C. Detto P il punto di intersezione di r con AC e Q il punto di intersezione di r con BC, dimostra che $PC \cong QC$.

3.64. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli in A e in B di un triangolo qualsiasi ABC. Per D disegna la parallela al lato AB, indica con E ed F le intersezioni di questa parallela rispettivamente con il lati AC e BC. Dimostra che $AF \cong AE + BF$.

3.65. Dimostra che, se per i vertici di un triangolo si conducono le parallele ai lati opposti, queste parallele determinano, assieme al triangolo dato, quattro triangoli congruenti.

3.66. Dimostra che in un triangolo isoscele la congiungente i punti medi dei lati congruenti è parallela alla base del triangolo.

3.67. Dimostrare che, in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli rettangolo che hanno tra loro e col triangolo di partenza gli angoli ordinatamente congruenti.

3.68. Dato un triangolo ABC, si prolunghi il lato CA dalla parte di A, si tracci la bisettrice dell'angolo interno di vertice A e si conduca da B la parallela a tale bisettrice, che incontri il prolungamento di CA nel punto D. Dimostrare che il triangolo ADB è isoscele.

3.69. Dato un angolo convesso $a\widehat{O}b$ traccia la sua bisettrice c. Per un punto P della bisettrice traccia la perpendicolare alla bisettrice stessa. Chiama A e B i punto di intersezione della perpendicolare con i lati a e b dell'angolo convesso. Dimostra che P è punto medio di AB.

3.70. Dato il triangolo isoscele ABC, di base AB, sul prolungamento dell'altezza relativa ad AB prendi un punto P. Traccia le rette PA e PB. Dimostra che l'angolo formato dalle rette PA e CA è congruente all'angolo formato dalle rette per PB e CB.

3.71. Nel triangolo isoscele ABC di vertice A e lati congruenti AB e AC, traccia le bisettrici degli angoli alla base. Sia D il loro punto di intersezione. Dimostra che anche il triangolo DBC è isoscele.

3.72. Dato un triangolo qualsiasi ABC dimostra che la bisettrice dell'angolo interno in A è perpendicolare alla bisettrice di uno degli angoli esterni in A.

3.73. Prolunga la mediana M del triangolo ABC di un segmento MD. Dimostra che se $AM \cong MD$ allora BD è parallela a CA.

3.74. Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Dimostra che se ABM è isoscele il triangolo ABC è rettangolo e viceversa, se il triangolo ABC è rettangolo in A allora ABM è isoscele.

3.75. Una retta t incontra due rette a e b rispettivamente in A e B. Dal punto medio M di AB traccia una retta che interseca a e b rispettivamente in C e D. Dimostra che se M è punto medio di CD allora a e b sono parallele.

3.76. Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento BD congruente a BC. Dimostra che l'angolo in C esterno al triangolo ADC è il triplo dell'angolo ADC.

3.77. Dato il triangolo ABC traccia la retta r perpendicolare ad AB passante per B, la retta s perpendicolare ad AB passante per A, la retta t perpendicolare ad AC passante per C.

Detti D il punto di intersezione tra r e t, E il punto di intersezione tra s e t, dimostra che $D\widehat{A}C + C\widehat{B}E + B\widehat{C}E$ è un angolo retto.

3.78. Nel triangolo ABC traccia la media CM e il suo prolungamento MD a piacere. Da A conduci la perpendicolare alla mediana che la incontra in E, da B conduci un'altra perpendicolare alla mediana che la incontra in F. Dimostra che i triangoli AEM e BFM sono congruenti.

3.79. Sul prolungamento della base AB di un triangolo isoscele individua un punto D qualsiasi dalla parte di B. Traccia la perpendicolare per D a questo prolungamento, essa incontra i lati obliqui del triangolo AC e BC rispettivamente in E e in F. Dimostra che il triangolo CEF è isoscele.

3.80. Siano r e s due rette incidenti in un punto O. Su r prendi da parte opposta rispetto ad O i punti A e B tali che $AO \cong OB$. Su s prendi da parte opposta rispetto ad O i punti C e D tali che $CO \cong OD$. Quale delle seguenti coppie di rette sono parallele? Dimostralo. ($CA \parallel BD$, $CB \parallel AD$)

3.81. Sia ABC un triangolo acutangolo. Nel semipiano di origine AB che non contiene C individua un punto D in modo che $B\widehat{A}D \cong C\widehat{B}A$. Dimostra che $CB \parallel AD$. Nell'ipotesi in cui $AD \cong CB$ dimostra che anche $AC \parallel BD$.

3.7 - Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

3.82. Vero o Falso?

a) Esiste un triangolo i cui lati misurano 10 cm, 3 cm e 15 cm [V] [F]
b) Un triangolo isoscele può essere ottusangolo [V] [F]
c) Dati tre segmenti di cui almeno uno maggiore degli altri è sempre possibile costruire un triangolo che ha lati congruenti ai tre segmenti dati [V] [F]
d) Dai tre segmenti di cui due uguali e uno maggiore degli altri due è sempre possibile costruire un triangolo isoscele che ha lati congruenti ai tre segmenti dati [V] [F]
e) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è minore della somma dei due cateti [V] [F]
f) Un triangolo di perimetro 100 cm non può avere un lato di 60 cm [V] [F]
g) In un triangolo l'angolo che si oppone al lato maggiore è sempre acuto [V] [F]
h) In un triangolo rettangolo i cateti sono sempre congruenti [V] [F]
i) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa può essere congruente ad un cateto [V] [F]
j) Un triangolo può avere due lati disuguali e due angoli uguali [V] [F]

Dimostra le seguenti affermazioni

3.83. Sono dati due triangoli ABC e DEF di cui si sa che $\widehat{B} > \widehat{A}$, $\widehat{F} > \widehat{D}$, $BC \cong ED$. Dimostra che $AC > EF$.

3.84. Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

3.85. Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore della semisomma dei cateti.

3.86. In un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due lati.

3.87. Dimostra che in un triangolo il doppio di un lato è minore del perimetro del triangolo.

3.88. Dimostra che in un triangolo il doppio di una qualsiasi altezza è minore del perimetro del triangolo.

3.89. Dimostra che in un poligono convesso una qualunque diagonale è minore del semiperimetro

3.90. Se in un triangolo due mediane sono congruenti, il triangolo è isoscele.

3.91. Se due lati di un triangolo sono disuguali, la mediana uscente dal loro vertice comune forma con il lato opposto angoli disuguali ed è maggiore quello dalla parte del lato maggiore.

3.92. In un triangolo ogni lato è minore del semiperimetro.

3.93. In un triangolo l'altezza è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

3.94. In un triangolo, la mediana è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

3.95. In un triangolo ABC traccia la bisettrice BE dell'angolo in B. Dimostra che $AB > AE$. (Per la dimostrazione utilizza il teorema dell'angolo esterno).

3.96. Nel triangolo ABC traccia la mediana AM. Dimostra che se AC è maggiore di AB allora l'angolo $A\widehat{M}C$ è maggiore dell'angolo $A\widehat{M}B$.

3.97. Nel triangolo ABC prendi un punto D interno al triangolo. Dimostra che il perimetro del triangolo ADB è minore del perimetro del triangolo ABC. (Prolunga il lato AD fino a incontrare il lato BC in E. Ragionando opportunamente sui triangoli che si vengono a formare dimostra che $AD + DB < AC + CB$).

3.98. Esternamente al triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Dimostra che il perimetro di ABC è minore del doppio della somma delle distanze di D dai tre vertici del triangolo.

3.99. Nel triangolo ABC traccia la mediana AM relativa al lato BC, dimostra che AM è minore della semisomma degli altri due lati AB e AC. (Prolunga la mediana di un segmento congruente alla mediana stessa.)

3.100. In ogni triangolo, la somma delle mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

3.101. Dimostra che in un triangolo acutangolo, la somma delle altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

3.102. Dato un triangolo ABC in cui $AB < AC$ traccia l'altezza AH relativa alla base BC. Dimostra che l'angolo $H\widehat{A}C$ è maggiore dell'angolo $H\widehat{A}B$.

3.103. Dato il triangolo isoscele ABC unisci il vertice A con un punto D della base BC. Dimostra che AD è minore di ciascuno dei due lati congruenti, AB e AC.

3.104. Dimostra in un poligono convesso, una qualunque diagonale è minore del semiperimetro.

3.105. In un triangolo ABC si ha che $AB > AC$. Si tracci la bisettrice AD dell'angolo in A. Si dimostri che $A\widehat{D}B > A\widehat{D}C$.

3.106. Due triangoli rettangoli hanno un cateto in comune e l'angolo opposto al cateto in comune è maggiore nel primo triangolo. Dimostra che l'ipotenusa del primo triangolo è minore di quella del secondo.

3.107. Dimostra che in ogni triangolo la somma dei tre lati è sempre maggiore del doppio di un lato.

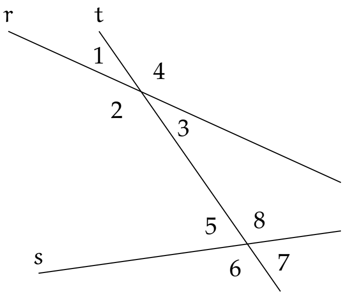
3.108. Sia AM la mediana di un triangolo generico ABC. Dimostra che se $AB > AC$ allora $A\widehat{M}C < A\widehat{M}B$.

3.109. Disegna un punto D interno a un triangolo ABC qualsiasi. Dimostra che $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$.

3.110. Sui lati AB, BC, CA di un triangolo ABC qualsiasi, scegli a caso tre punti, rispettivamente D, E ed F. Dimostra che il perimetro di ABC è maggiore del perimetro di DEF.

3.111. Un quadrilatero $ABCD$ si compone di un triangolo isoscele ABC di base BC e di un triangolo rettangolo isoscele ACD con l'angolo retto in C. Dimostra che se l'angolo in A del triangolo isoscele è acuto allora $BC < CD$, se l'angolo in A del triangolo isoscele è ottuso risulta $CD < BC$.

3.112 (Prove invalsi 2004).
Le rette r ed s sono tagliate dalla trasversale t. Quale delle seguenti condizioni permette di stabilire, per qualunque posizione di t, che r ed s sono parallele?
Gli angoli ...

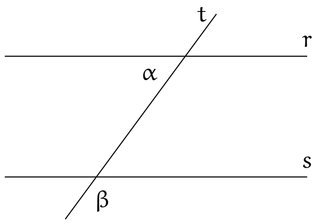


a) 1 e 5 sono supplementari;
b) 2 e 8 sono uguali;
c) 3 e 7 sono supplementari;
d) 4 e 7 sono uguali.

3.113 (Prove invalsi 2006). Per un triangolo ottusangolo qualsiasi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) La somma dei suoi due angoli più piccoli è minore dell'angolo più grande.
b) Il punto di incontro degli assi dei lati è certamente interno al triangolo.
c) Il triangolo è necessariamente isoscele.
d) Il triangolo può essere rettangolo.

3.114 (Prove invalsi 2006).
r ed s sono due rette parallele tagliate da una trasversale t. Quale tra le seguenti proposizioni è vera qualunque sia la posizione di t? Gli angoli α e β sono ...



a) supplementari;
b) uguali;
c) complementari;
d) corrispondenti.

3.115 (Prove invalsi 2004). In un triangolo, le misure dei lati sono a, b e c, con $a = b < c$. Detti α, β e γ gli angoli interni del triangolo, rispettivamente opposti ai lati a, b e c, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\alpha = \gamma$; b) $\beta = \gamma$; c) $\gamma > \alpha$; d) $\alpha > \beta$.

3.116 (Prove invalsi 2010). Un triangolo ha un lato di 6 cm e uno di 10 cm. Quale tra le seguenti non può essere la misura della lunghezza del terzo lato?

a) 6,5 cm; b) 10 cm; c) 15,5 cm; d) 17 cm.

3.117 (Prove invalsi 2005). In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è metà dell'angolo alla base. Quanto misurano gli angoli del triangolo?

a) $72°, 72°, 36°$; b) $30°, 60°, 90°$; c) $36°, 36°, 72°$; d) $90°, 45°, 45°$.

3.8.2 Risposte

3.1. a) F, b) F, c) F, d) F, e) F, f) V.

3.10. a) V, b) F, c) F, d) V.

3.11. a.

3.15. a) F, b) F, c) F, d) F, e) V, f) V, g) F, h) F, i) F, j) F, k) F, l) V.

3.18. $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\beta = \frac{2}{3}\pi$, $\gamma = \frac{1}{3}\pi$, $\delta = \frac{2}{3}\pi$, $\epsilon = \frac{1}{3}\pi$, $\lambda = \frac{2}{3}\pi$, $\phi = \frac{1}{3}\pi$, $\omega = \frac{2}{3}\pi$.

3.21. c.

3.47. a) F, b) F, c) F, d) V, e) F.

3.49. $60°, 30°, 90°$.

3.50. $180°$.

3.51. $80°$.

3.52. a) V, b) F, c) F, d) V, e) F, f) V, g) V.

3.82. a) F, b) V, c) F, d) F, e) V, f) V, g) F, h) F, i) F, j) V.

3.112. b.

3.113. a.

3.114. a.

3.115. c.

3.116. d.

3.117. a.

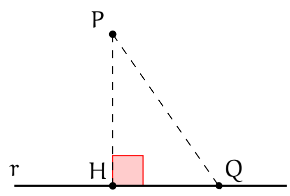
Quadrilateri 4

"In geometry, a rhombus or rhomb is a quadrilateral whose four sides all have the same length"
Foto di pursanovd
http://www.flickr.com/photos/pursanovd/3669422214/

4.1 Generalità sui quadrilateri

4.1.1 Distanza di un punto da una retta e altezza di una striscia di piano

Ricordiamo che come definizione di (*misura* della) *distanza di un punto da una retta* è stata presa la lunghezza del segmento congiungente il punto con il piede della perpendicolare mandata dal punto alla retta (vedi figura). Analogamente, per *distanza tra due rette parallele*, detta anche *altezza della striscia di piano individuata dalle due rette parallele*, si intende la distanza di un punto qualsiasi di una retta dall'altra retta. Vogliamo far vedere ora che queste definizioni sono coerenti con il concetto di distanza tra due insiemi di punti come *percorso più breve* che congiunge un qualsiasi punto del primo insieme con un generico punto appartenente al secondo insieme. Se congiungiamo, infatti, un generico punto P sia con H, piede della perpendicolare alla retta r, che con un altro punto $Q \in r$, viene individuato un triangolo rettangolo PHQ, di cui PH è un cateto e PQ l'ipotenusa. Dal teorema sulle disuguaglianze degli elementi di un triangolo, l'ipotenusa è certamente maggiore di un cateto in quanto lato che si oppone ad angolo maggiore (quello retto). Dunque PH è il segmento di lunghezza minore tra tutti quelli che congiungono P con un punto della retta r.

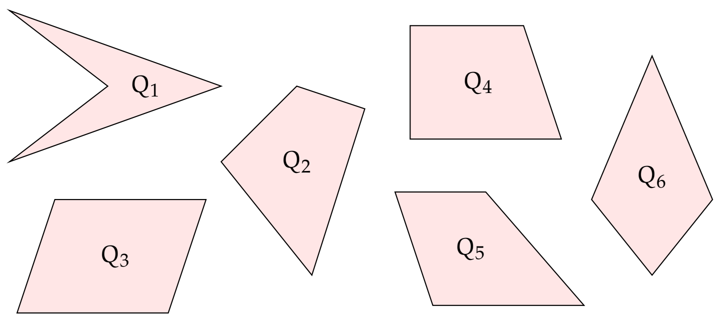


4.1.2 Generalità sui poligoni

Se un poligono ha più di tre lati, allora può anche essere concavo. Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°.

Definizione 4.1. Due lati non consecutivi di un quadrilatero si dicono *opposti*; analogamente sono detti *opposti* due angoli non adiacenti allo stesso lato.

Nella figura seguente sono rappresentati un quadrilatero concavo (Q_1), un generico quadrilatero convesso (Q_2), un quadrilatero particolare a forma di "aquilone" (Q_6) e tre quadrilateri "notevoli": Q_3 ha i lati opposti paralleli (a due a due), Q_4 e Q_5 hanno una coppia di lati opposti paralleli.



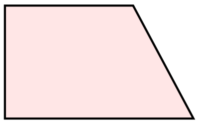
I quadrilateri che, come Q_6, hanno due lati consecutivi congruenti ed altri due lati consecutivi anch'essi congruenti, si dicono *deltoidi*; i quadrilateri che, come Q_3, hanno i lati opposti paralleli si dicono *parallelogrammi*; i quadrilateri che, come Q_4 e Q_5, hanno una coppia di lati opposti paralleli si dicono *trapezi*.

❑ **Osservazione** In analogia alla definizione di triangolo isoscele (come triangolo avente "almeno" due lati congruenti), alcuni autori definiscono trapezio un quadrilatero avente "almeno" una coppia di lati opposti paralleli: con questa definizione un parallelogramma è un particolare tipo di trapezio. Ricordiamo anche che Euclide, al contrario, classificava come trapezi tutti i quadrilateri che non fossero parallelogrammi. Noi useremo come definizione di *trapezio* quella di un *quadrilatero avente "solo" una coppia di lati opposti paralleli*. Ci riferiremo al parallelogramma come a una figura piana costituita dall'intersezione di due strisce di piano non parallele fra loro; al trapezio come intersezione tra una striscia di piano ed un angolo convesso con vertice esterno alla striscia e lati che intersecano la striscia stessa. Poiché le strisce di piano sono convesse, sia i parallelogrammi sia i trapezi, come intersezioni di figure convesse, sono convessi.

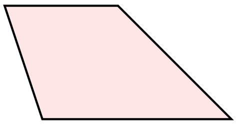
4.2 Trapezio e deltoide

Osserviamo le figure seguenti. I quadrilateri $ABCD$, $EFGH$, $IJKL$ e $MNOP$ sono trapezi perché hanno una coppia di lati opposti paralleli. Tali lati paralleli si dicono *basi* e si distinguono in *base maggiore* e *base minore*. Gli altri lati si dicono *lati obliqui*. La distanza tra le rette parallele si dice *altezza* del trapezio. Un trapezio avente i lati obliqui congruenti si dice *isoscele*. Un trapezio avente un lato perpendicolare alle basi si dice *rettangolo*. Un trapezio che non è né isoscele né rettangolo si dice *scaleno*.

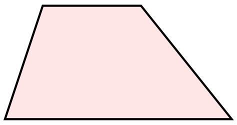
trapezio isoscele



trapezio rettangolo



trapezio scaleno



trapezio scaleno

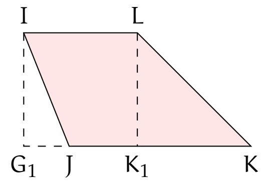
4.2.1 Proprietà del trapezio

In ogni trapezio, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari. Essi, infatti, sono coniugati interni rispetto alle rette delle basi tagliate dalla trasversale individuata dal lato obliquo.

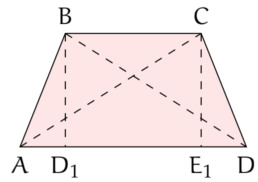
In un trapezio rettangolo, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono uno retto ed uno acuto e gli angoli adiacenti alla base minore sono uno retto ed uno ottuso. Se un trapezio avesse quattro angoli retti, i lati obliqui sarebbero entrambi perpendicolari alle basi e di conseguenza paralleli tra loro. Dunque in questo caso il trapezio risulterebbe essere un parallelogramma.

Un trapezio scaleno può avere gli angoli adiacenti alla base maggiore entrambi acuti (e quindi gli angoli adiacenti alla base minore entrambi ottusi) oppure due angoli opposti entrambi acuti e gli altri ottusi (i due tipi di trapezio scaleno sono rappresentati nella figura precedente). I quattro angoli sono comunque non congruenti, altrimenti il trapezio risulterebbe isoscele nel primo caso e un parallelogramma nel secondo caso.

In un trapezio isoscele, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono acuti e quelli adiacenti alla base minore sono ottusi. A tal proposito, facciamo riferimento al trapezio $IJKL$ nella figura a fianco per dire che non può esistere un trapezio isoscele con due angoli acuti opposti e due angoli ottusi opposti. Infatti, se fosse $IJ \cong LK$, i triangoli IG_1J e LK_1K risulterebbero congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio IJ e LK) ed una coppia di cateti (le altezze IG_1 e LK_1), da cui seguirebbe in particolare che $I\widehat{J}G_1 \cong L\widehat{K}K_1$, e pertanto l'angolo in K sarebbe supplementare dell'angolo in J, cosa che garantirebbe il parallelismo dei lati obliqui. Dunque, un ipotetico trapezio isoscele con due angoli acuti opposti sarebbe un parallelogramma.



Inoltre, se il trapezio è isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi sono congruenti. Infatti, in riferimento al trapezio $ABCD$, traccia le altezze BD_1 e CE_1 (tra loro congruenti perché entrambe rappresentano la distanza tra due rette parallele), i triangoli AD_1B e E_1DC risultano congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio) ed una coppia di cateti (le altezze del trapezio). Pertanto i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti: $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}C$, $A\widehat{B}D_1 \cong D\widehat{C}E_1$, $AD_1 \cong E_1D$.

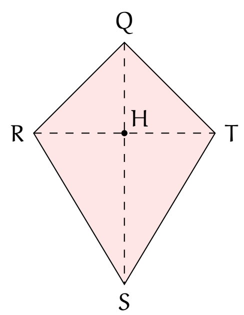


Dunque sono congruenti anche le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore. Quindi anche $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}D$ in quanto somme di angoli congruenti $A\widehat{B}D_1 + \widehat{R} \cong D\widehat{C}E_1 + \widehat{R}$.

In un trapezio isoscele, inoltre, anche le due diagonali sono congruenti. Infatti, in riferimento sempre al trapezio $ABCD$ in figura, i triangoli ABC e DCB risultano congruenti per il primo criterio, avendo BC in comune, $AB \cong CD$ per ipotesi e gli angoli compresi (adiacenti alla base minore) congruenti per quanto appena dimostrato. Di conseguenza, i rimanenti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare i terzi lati (che sono, appunto, le diagonali AC e BD del trapezio).

4.2.2 Proprietà del deltoide

Il poligono $QRST$ nella figura a fianco è un deltoide, ha i lati a due a due congruenti $QR \cong QT$ e $RS \cong TS$. Tracciamo le diagonali QS ed RT. I triangoli QRT e STR sono isosceli sulla base comune RT. Dunque, se chiamiamo H il punto medio di RT, QH ed SH sono mediane, bisettrici e altezze (relative alla base ed agli angoli al vertice dei due triangoli isosceli), per cui QS è perpendicolare ad RT e passa per il punto H. Quindi le due diagonali sono perpendicolari e si incontrano nel punto medio di RT. Inoltre i triangoli SQR ed STQ sono congruenti per il terzo criterio, pertanto $Q\widehat{R}S \cong Q\widehat{T}S$.



I quattro lati di un deltoide non potrebbero essere tutti congruenti, in quanto, dalla congruenza degli angoli opposti banalmente deducibile, risulterebbero i lati opposti paralleli, e quindi il deltoide sarebbe un parallelogramma. Non è al contrario escluso che un angolo possa essere retto (ma non più di uno, altrimenti il deltoide sarebbe un parallelogramma), mentre gli angoli ottusi possono essere uno, due o tre (come pure gli angoli acuti).

Lasciamo al lettore il compito di provare queste semplici proprietà, costruendo vari tipi di deltoidi.

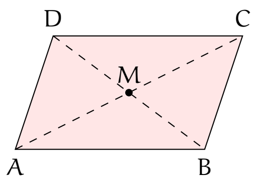
4.3 Proprietà dei parallelogrammi

Ricordiamo che, per definizione, un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.

Teorema 4.1. *In ogni parallelogramma:*

1. *gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;*
2. *gli angoli opposti sono congruenti;*
3. *ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti;*
4. *i lati opposti sono congruenti;*
5. *le diagonali si dividono scambievolmente per metà.*

Ipotesi: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



Dimostrazione.

1. Tesi: $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, $B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong \pi$ (π è l'angolo piatto).
   Se $AB \parallel CD$, gli angoli in A e D sono supplementari, e così pure gli angoli in B e C, in quanto coniugati interni rispetto alle due rette parallele tagliate rispettivamente dalle trasversali AD e BC. Analogamente, se $AD \parallel BC$, gli angoli in A e B sono supplementari, ed anche gli angoli in C e D. La tesi 1 è pertanto dimostrata.
2. Tesi: $A\widehat{B}C \cong C\widehat{D}A$, $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$.
   Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi 1. Da queste segue che gli angoli opposti sono congruenti in quanto supplementari dello stesso angolo: gli angoli in A e C sono supplementari entrambi dell'angolo in B, gli angoli in B e in D sono entrambi supplementari dell'angolo in A. La tesi 2 è pertanto dimostrata.
3. Tesi: $ABC \cong CDA$, $DAB \cong BCD$.
   Tracciamo ora una diagonale, ad esempio AC, e consideriamo i due triangoli che si vengono a formare, ABC e ACD. Essendo $AB \parallel CD$, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ ed essendo $AD \parallel BC$, risulta $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, in quanto sono coppie di angoli alterni interni, i primi rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC, gli altri rispetto alle

rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC. I due triangoli dunque, avendo in comune il lato AC, risultano congruenti per il secondo criterio. Analogamente, applicando il ragionamento precedente ai triangoli ABD e DBC dopo aver tracciato la diagonale DB, concludiamo che anche i due triangoli ADB e DBC risultano congruenti per il secondo criterio. Pertanto la tesi 3 è dimostrata.

4. Tesi: $AB \cong CD$, $AD \cong BC$.
   Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi 3. Dalla congruenza dei triangoli ABC e CDA segue la congruenza dei lati AB e CD, dalla congruenza dei triangoli DAB e BCD segue la congruenza dei lati AD e BC. Pertanto la tesi 4 è dimostrata.
5. Tesi: $AM \cong MC$, $DM \cong MB$.
   Dopo aver tracciato entrambe le diagonali, chiamiamo M il loro punto di intersezione. Confrontiamo i triangoli ABM e CDM: essi risultano congruenti per il secondo criterio, in quanto $AB \cong CD$ (tesi 4), $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$ e $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ (come visto nel punto 3 della dimostrazione). Quindi anche i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti, in particolare $AM \cong MC$ e $DM \cong MB$. Pertanto anche la tesi 5 è dimostrata.

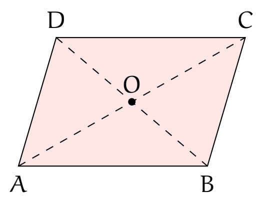
□

Il teorema precedente è invertibile. Precisamente vale il teorema seguente:

Teorema 4.2. *Se in un quadrilatero è verificata una delle seguenti ipotesi:*

1. *gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;*
2. *gli angoli opposti sono congruenti;*
3. *ciascuna diagonale divide il quadrilatero in due triangoli congruenti;*
4. *i lati opposti sono congruenti;*
5. *le diagonali si dividono scambievolmente per metà;*
6. *due lati opposti sono paralleli e congruenti;*

allora il quadrilatero è un parallelogramma.



Dimostrazione.

1. Sia per ipotesi $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$ (dove π è l'angolo piatto). Tali angoli, rispetto alle rette AD ed BC tagliate dalla trasversale AB sono coniugati interni, allora per quanto visto nel capitolo precedente sul parallelismo, le rette AD e BC sono parallele perché formano angoli coniugati interni supplementari con la trasversale AB. Analogamente, se $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, le rette AB ed DC sono parallele. Dunque $ABCD$ è un parallelogramma, avendo i lati opposti paralleli.

2. Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero misura 360°, se gli angoli opposti sono congruenti, vuol dire che $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C + B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong 2D\widehat{A}B + 2A\widehat{B}C \cong 2\pi$, per cui $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, cioè gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari e per la dimostrazione precedente $ABCD$ è un parallelogramma.
3. Essendo i triangoli ABC e BDC congruenti, l'angolo $A\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $B\widehat{D}C$ ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD allora le due rette AB e CD saranno parallele. In maniera analoga $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C$ e quindi, essendo alterni interni rispetto alle rette BC e AD intersecate dalla trasversale BD si ha che anche $BC \parallel AD$. Quindi $ABCD$ è un parallelogramma.
4. Consideriamo la diagonale AC. Il quadrilatero $ABCD$ è diviso in due triangoli ABC e ACD congruenti per il terzo criterio. Pertanto $A\widehat{C}D \cong C\widehat{A}B$ e $A\widehat{C}B \cong C\widehat{A}D$, coppie di angoli alterni interni, nell'ordine rispetto alle rette AB e CD e rispetto alle rette AD ed BC, tagliate dalla trasversale AC. Dunque i lati opposti del quadrilatero $ABCD$ risultano paralleli, cioè è un parallelogramma.
5. Detto O il punto di incontro delle diagonali, i triangoli OAB ed OCD risultano congruenti per il primo criterio, in quanto $OA \cong OC$, $OD \cong OB$ e gli angoli tra essi compresi sono congruenti perché opposti al vertice. Di conseguenza, risulta anche $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$, che sono angoli alterni interni rispetto alle rette DC ed AB tagliate dalla trasversale AC, pertanto $DC \parallel AB$. Analogamente, considerando i triangoli congruenti OBC ed ODA si ha anche $BC \parallel AD$. Dunque $ABCD$ è un parallelogramma.
6. Supponiamo AB e CD paralleli e congruenti. Tracciata la diagonale AC, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ e dunque i triangoli ACD e CAB risultano congruenti per il primo criterio. Di conseguenza risulta $AD \cong BC$, per cui il quadrilatero ha anche l'altra coppia di lati opposti congruenti. $ABCD$ è dunque un parallelogramma per la 4.

□

4.4 Parallelogrammi particolari

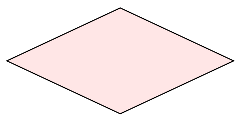
I parallelogrammi possono essere sia equiangoli sia equilateri.

Se un parallelogramma è equiangolo, dato che la somma degli angoli interni è 360°, deve avere quattro angoli retti: questo succede quando due lati opposti, paralleli tra loro, sono perpendicolari all'altra coppia di lati opposti. Un tale parallelogramma si chiama *rettangolo*.

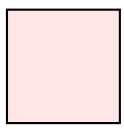
Se un parallelogramma è equilatero, vuol dire che ciascuna diagonale lo divide in due triangoli isosceli. Un tale parallelogramma si chiama *rombo*.

Un parallelogramma sia equiangolo sia equilatero deve essere contemporaneamente un rettangolo ed un rombo: l'unico tipo di quadrilatero regolare, il *quadrato*. Infatti un quadrilatero, per essere regolare, deve necessariamente avere quattro angoli retti; è quindi un parallelogramma, prima ancora che un rettangolo, perché due angoli retti, oltre ad essere congruenti, sono anche supplementari; inoltre è un rombo in quanto è un parallelogramma con quattro lati congruenti.

rettangolo



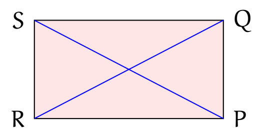
rombo



quadrato

A parte le proprietà particolari insite nelle stesse definizioni, il rettangolo e il rombo si distinguono tra loro e dagli altri parallelogrammi per alcune proprietà riguardanti le diagonali. Naturalmente il quadrato gode delle proprietà sia del rettangolo sia del rombo. Ricordiamo che in un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente per metà. Ora mostreremo che in un rettangolo le diagonali sono congruenti ed in un rombo sono perpendicolari.

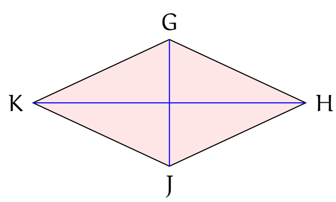
Teorema 4.3. *In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.*



Dimostrazione. Sia RPQS un rettangolo; tracciate le diagonali RQ e PS, confrontiamo i triangoli SRP e RPQ. Tali triangoli rettangoli hanno il cateto RP in comune ed hanno gli altri cateti, SR e PQ, rispettivamente congruenti in quanto lati opposti di un rettangolo. Dunque SRP e RPQ sono congruenti per il primo criterio e di conseguenza devono avere congruenti anche le ipotenuse SP e RQ, le quali sono le diagonali del rettangolo.

Sia RPQS un parallelogramma avente le diagonali RQ e PS congruenti, sempre confrontando i triangoli SRP e RPQ, possiamo affermare che tali triangoli sono congruenti per il terzo criterio, perché hanno il lato RP in comune, i lati RS e QP congruenti in quanto lati opposti di un parallelogramma ed i lati SP e RQ congruenti per ipotesi. Dunque anche gli angoli devono essere ordinatamente congruenti, in particolare perché opposti ai lati congruenti SP e RQ. Ma tali angoli sono anche supplementari in quanto adiacenti allo stesso lato RP di un parallelogramma e pertanto devono risultare retti. Dunque il quadrilatero RPSQ è un rettangolo. □

Teorema 4.4. *In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari e sono anche bisettrici degli angoli aventi per vertici i loro estremi. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari è un rombo; inoltre, se un angolo di un parallelogramma è diviso a metà dalla diagonale passante per il suo vertice, allora il parallelogramma è un rombo.*



Dimostrazione. Notiamo che, in ciascuna delle fasi della dimostrazione, è tra le ipotesi del teorema che JHGK sia un parallelogramma. Ricordiamo che le diagonali di JHGK vengono divise a metà dal loro punto di intersezione, che chiamiamo M, per cui risulta $JM \cong MG$ e $HM \cong MK$.

a) Se supponiamo che $JHGK$ sia un rombo, i triangoli JHG, HGK, GKJ e KJH risultano isosceli, per cui le mediane HM, GM, KM e JM sono anche altezze e bisettrici, per cui la prima parte del teorema è dimostrata.
b) Se supponiamo che JG e HK siano perpendicolari, in particolare i triangoli rettangoli JHM, HGM, GKM e KJM risultano congruenti per il primo criterio, avendo congruenti i cateti. Dunque risultano congruenti anche le ipotenuse, che sono i lati del parallelogramma $JHGK$, il quale pertanto risulta essere un rombo.
c) Se supponiamo ad esempio $K\widehat{G}J \cong J\widehat{G}H$, essendo anche $K\widehat{G}J \cong G\widehat{J}H$ in quanto alterni interni rispetto alle rette parallele KG e JH tagliate dalla trasversale GJ, dalla proprietà transitiva della congruenza segue che $G\widehat{J}H \cong J\widehat{G}H$, per cui il triangolo JGH risulta isoscele sulla base JG. Dunque il parallelogramma $JHGK$ ha due lati consecutivi congruenti, e quindi i quattro lati congruenti, ed è pertanto un rombo.

□

I teoremi precedenti si estendono automaticamente ai quadrati.

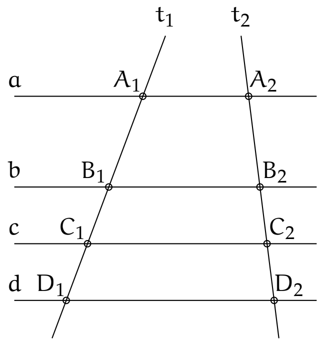
Corollario 4.5. *Le diagonali di un quadrato sono fra loro congruenti e perpendicolari e dividono per metà gli angoli. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari, allora è un quadrato; inoltre, se le diagonali di un parallelogramma sono congruenti ed un angolo è diviso a metà da una diagonale, allora il parallelogramma è un quadrato.*

4.5 Corrispondenza di Talete

Definizione 4.2. Nel piano, si definisce *fascio improprio di rette* un insieme di rette tutte parallele tra loro.

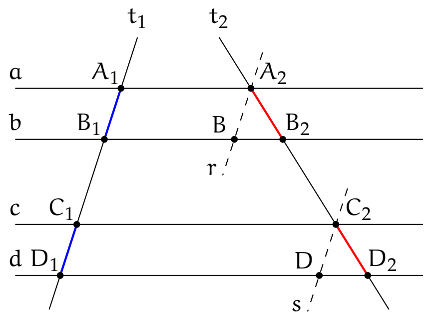
Ricordiamo che una retta contenuta nello stesso piano e non appartenente al fascio improprio è necessariamente incidente rispetto a ciascuna retta del fascio ed ha quindi uno ed un solo punto in comune con ogni singola retta del fascio: una tale retta è dunque una trasversale.

Dato un fascio di rette parallele $a, b, c, d, \ldots$, considerate due generiche trasversali, t_1 e t_2, è possibile definire una funzione tra l'insieme dei punti di una trasversale e quello dei punti dell'altra trasversale, che associ a ciascun punto di t_1 il punto di t_2 che appartiene alla medesima retta del fascio (ad esempio al punto A_1 si associa il punto A_2 se, come nella figura a fianco, $A_1 = a \cap t_1$ e $A_2 = a \cap t_2$). Tale funzione è una corrispondenza biunivoca e si estende facilmente ai segmenti: infatti l'immagine del segmento A_1B_1 è il segmento A_2B_2 (se, come nella figura, anche gli estremi B_1 e B_2 appartengono alla stessa retta b del fascio). La corrispondenza biunivoca così definita tra punti e tra segmenti di due trasversali che tagliano un fascio di rette parallele è nota come *corrispondenza di Talete*.



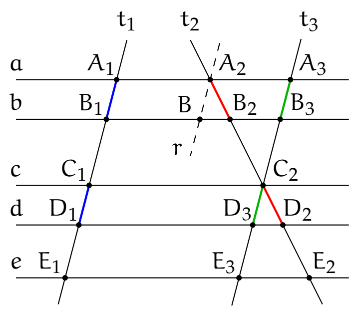
Teorema 4.6. *Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.*

Ipotesi: $A \parallel b \parallel c \parallel d$, t_1 e t_2 trasversali, $A_1B_1 \cong C_1D_1$. Tesi: $A_2B_2 \cong C_2D_2$.



Dimostrazione. Se fosse $t_1 \parallel t_2$, allora la tesi seguirebbe facilmente dalle proprietà dei quadrilateri particolari e dalla proprietà transitiva della congruenza. Infatti i quadrilateri $A_1B_1B_2A_2$ e $C_1D_1D_2C_2$ sarebbero due parallelogrammi, ed avrebbero dunque i lati opposti congruenti. Altrimenti, tracciamo la retta r passante per A_2 e la retta s passante per C_2, entrambe parallele a t_1; chiamiamo B il punto di intersezione tra b ed r e D il punto di intersezione tra d ed s. I quadrilateri $A_1B_1BA_2$ e $C_1D_1DC_2$ sono due parallelogrammi, per cui da $A_1B_1 \cong C_1D_1$ segue, per la proprietà transitiva della congruenza, $A_2B \cong C_2D$. Dunque, se confrontiamo i triangoli A_2BB_2 e C_2DD_2, questi risultano congruenti per il secondo criterio (generalizzato), in quanto gli angoli in A_2 e in C_2 sono corrispondenti rispetto alle rette parallele r e s tagliate dalla trasversale t_2, mentre gli angoli in B_2 e D_2 sono corrispondenti rispetto alle rette parallele b e d tagliate dalla trasversale t_2 e pertanto congruenti. Di conseguenza $A_2B_2 \cong C_2D_2$. □

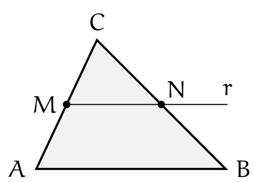
❑ **Osservazione** Nella figura precedente, i trapezi $A_1B_1B_2A_2$ e $C_1D_1D_2C_2$ sono stati "decomposti" in parallelogrammi e triangoli. La sostanza del teorema non cambia però se le figure che si ottengono sono diverse. Nella figura seguente, si considerino, oltre alla corrispondenza tra i segmenti su t_1 e t_2, anche le corrispondenze tra i segmenti su t_1 e t_3 (parallele) e quella tra i segmenti su t_2 e t_3 (con C_3 coincidente con C_2).



4.6 Conseguenze della corrispondenza di Talete

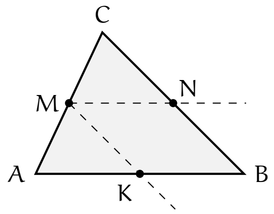
Corollario 4.7. *Se dal punto medio di un lato di un triangolo tracciamo la parallela ad un altro lato del triangolo, questa interseca il terzo lato nel suo punto medio.*

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AC, sia r la parallela ad AB passante per M, sia N il punto di intersezione tra r e CB, sia s la parallela ad AB passante per C. Poiché per ipotesi $CM \cong MA$, per la corrispondenza di Talete risulta $CN \cong NB$, per cui N è il punto medio di CB. □



Corollario 4.8. *Il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.*

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AC e sia N il punto medio di CB. Poiché, per il corollario precedente, la parallela ad AB passante per M passa anche per N, il segmento MN è parallelo ad AB (in quanto una retta è ben individuata da due punti ed inoltre, per il quinto postulato di Euclide, esiste una ed una sola retta passante per M e parallela ad AB). Rimane da dimostrare che $MN \cong \frac{1}{2}AB$. Sempre per il corollario precedente, se da M tracciamo la parallela a CB, questa interseca AB nel suo punto medio K. Il quadrilatero $MKBN$ è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti paralleli. Per le proprietà dei parallelogrammi, $MN \cong KB \cong \frac{1}{2}AB$. □



4.7 Esercizi

4.7.1 Esercizi riepilogativi

4.1. Quali tra le seguenti sono proprietà del parallelogrammo?

a) Ciascuna diagonale lo divide in due triangoli uguali V F
b) Gli angoli opposti sono uguali V F
c) Tutti i lati sono uguali V F
d) Gli angoli sulla base sono uguali V F
e) Le diagonali sono perpendicolari V F
f) Gli angoli sono tutti congruenti V F
g) Le diagonali sono anche bisettrici V F

4.2. Vero o Falso?

a) Un quadrilatero che ha i lati consecutivi a due a due congruenti è un deltoide V F
b) Un quadrilatero che ha una sola coppia di lati opposti uguali è un trapezio V F
c) Il trapezio scaleno ha tutti i lati diversi tra di loro per lunghezza V F
d) Gli angoli adiacenti alla base maggiore di un trapezio rettangolo sono uno retto e uno acuto V F
e) Un trapezio scaleno può avere due angoli opposti ottusi V F
f) In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base minore sono ottusi V F
g) In un trapezio isoscele sono congruenti le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore V F
h) Le diagonali di un deltoide si incontrano nel loro punto medio comune V F
i) Nel parallelogramma gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari V F
j) Nel parallelogramma una delle due diagonali lo divide in due triangoli isosceli V F
k) Se le diagonali di un quadrilatero si dividono a metà allora è un parallelogramma V F
l) Le diagonali del rombo sono anche bisettrici V F
m) Se le diagonali di un parallelogramma sono uguali il parallelogramma è un quadrato V F
n) Un parallelogramma che ha un angolo retto è un rettangolo V F
o) Un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti è un quadrato V F
p) Un quadrilatero con due lati opposti congruenti è un trapezio V F
q) Il rombo è anche un rettangolo V F
r) Il rombo è anche quadrato V F
s) Il rettangolo è anche parallelogrammo V F
t) Il quadrato è anche rombo V F
u) Il trapezio è anche parallelogrammo V F
v) Alcuni rettangoli sono anche rombi V F

Dimostra le seguenti proprietà

4.3. Due parallelogrammi sono congruenti se hanno congruenti due lati consecutivi e l'angolo compreso.

4.4. Due rettangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati consecutivi.

4.5. Due rombi sono congruenti se hanno congruenti le due diagonali.

4.6. Le diagonali di un trapezio isoscele si dividono in parti rispettivamente congruenti.

4.7. In un trapezio isoscele, la retta che congiunge i punti medi delle basi è perpendicolare alle basi stesse, ed interseca le rette dei lati obliqui nel loro punto d'intersezione.

4.8. Se un trapezio ha tre lati congruenti, le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

4.9. Dimostra che un rombo è diviso da una sua diagonale in due triangoli isosceli congruenti.

4.10. In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

4.11. Sia $ABCD$ un parallelogramma, siano M, N, O e P i punti medi dei lati. Dimostra che $MNOP$ è un parallelogramma.

4.12. Nel parallelogramma $ABCD$ prolunga di segmenti congruenti ciascun lato e sempre nello stesso senso. Dimostra che i nuovi vertici che si ottengono formano un parallelogramma.

4.13. Nel parallelogramma $ABCD$ si prendono sui lati opposti AB e CD i punti E ed F tali che AE sia congruente a CF. Dimostra che anche $AECF$ è un parallelogramma.

4.14. Di un triangolo ABC prolunga i lati AB e CB rispettivamente di due segmenti BD e BE tali che $AB \cong BD$ e $CB \cong BE$. Dimostra che $ACDE$ è un parallelogramma.

4.15. Unendo i punti medi di due lati opposti di un parallelogramma si ottengono due parallelogrammi.

4.16. Sulle diagonali AC e BD di un parallelogramma prendi i punti A' e C' su AC in modo che $AA' \cong CC'$ su BD prendi i punti B' e D' in modo che $BB' \cong DD'$. Dimostra che $A'B'C'D'$ è un parallelogramma.

4.17. Dato un parallelogramma $ABCD$ prolunga il lati nel seguente modo: CD di un segmento DE, DA di un segmento DF, AB di un segmento BG, BC di un segmento CH. Dimostra che se $DE \cong AF \cong BG \cong CH$ allora $EFGH$ è anche un parallelogramma.

4.18. Dato un segmento AB, sia M il suo punto medio. Traccia rispettivamente da A e da B le rette r ed s parallele tra loro. Dal punto M traccia una trasversale t alle due rette che incontra r in C ed s in D. Dimostra che $CADB$ è un parallelogramma.

4.19. Dimostra che in un parallelogramma $ABCD$ i due vertici opposti A e C sono equidistanti dalla diagonale BD.

4.20. Prolunga la mediana AM di un triangolo isoscele di vertice A di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che $ABCD$ è un rombo.

4.21. Nel parallelogramma $ABCD$ sia M il punto medio di AB ed N il punto medio di DC. Sia P il punto di intersezione di AN con DM e Q il punto di intersezione di CM con BN. Dimostra che $PNAM$ è un rombo.

4.22. Dimostra che se un rombo ha le diagonali congruenti allora è un quadrato.

4.23. Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo si ottiene un rombo.

4.24. Dato un parallelogramma $ABCD$, siano H e K due punti della diagonale AC in modo che DH e BK siano perpendicolari ad AC. Dimostra che $AH \cong KC$.

4.25. Sia $ABCD$ un trapezio di basi BC e AD. Sia r la bisettrice dell'angolo in A ed s la bisettrice dell'angolo in B. Dimostra che r ed s sono perpendicolari.

4.26. Nel parallelogramma $ABCD$ prolunga il lato AB del segmento AE e il lato DC del segmento CF congruente ad AE. Dimostra che anche $EBFD$ è un parallelogramma.

4.27. In un trapezio $ABCD$ la diagonale AC è congruente alla base maggiore AB. Sia M il punto medio del lato obliquo BC. Prolunga AM di un segmento ME congruente ad AM. Dimostra che $ABEC$ è un rombo.

4.28. Nel trapezio isoscele $ABCD$ con la base maggiore doppia della base minore, unisci il punto medio M di AB con gli estremi della base DC. Dimostra che $AMCD$ è un parallelogramma.

4.29. Nel trapezio isoscele $ABCD$ i punti M e N sono rispettivamente i punti medi delle basi AB e DC. Dimostra che $MNCB$ è un trapezio rettangolo.

4.30. Siano M e N i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele $ABCD$. Dimostra che $BCMN$ è un trapezio isoscele.

4.31. Nel triangolo isoscele ABC siano BH e BK le perpendicolari ai lati obliqui AC e AB. Dimostra che $BCHK$ è un trapezio isoscele.

4.32. Dimostra che le proiezioni dei lati obliqui di un trapezio isoscele sulla base maggiore sono congruenti.

4.33. Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, traccia le bisettrici agli angoli adiacenti alla base. Detti D ed E i punti di incontro di dette bisettrici rispettivamente con AC e AB, dimostra che $EBCD$ è un trapezio isoscele.

4.34. Dimostra che in un trapezio isoscele che ha la base maggiore doppia della minore, le diagonali sono anche bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

4.35. In un trapezio, il segmento che unisce i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma.

4.36. Dato un qualsiasi quadrilatero $ABCD$, il quadrilatero non intrecciato avente come vertici i punti medi dei lati di $ABCD$ è un parallelogramma.

4.37. Il quadrilatero avente come vertici i punti medi dei lati di un trapezio isoscele è un rombo.

4.38. Dimostrare che, in un trapezio, il segmento che congiunge i punti medi dei lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi.

4.39. Dato un parallelogramma $ABCD$, si consideri il punto medio M del lato AB, si congiunga il vertice D con il punto M, si congiunga il vertice A con il punto medio N del segmento DM. Dimostrare che la retta AN divide la diagonale DB del parallelogramma in due parti di cui una è il doppio dell'altra.

4.40. Dato un triangolo qualunque ABC, si consideri il punto medio M del lato AB, si consideri il segmento parallelo al lato BC che parte da M ed incontra il lato AC nel punto N, si prolunghi questo segmento di un segmento ND uguale ad MN. Dimostrare che il quadrilatero $MDCB$ è un parallelogramma.

4.41. Dato un quadrato $ABCD$ di centro O, siano H e K due punti sulla diagonale AC simmetrici rispetto ad O. Dimostra che il quadrilatero $BHDK$ è un rombo.

4.42. Dimostrare che un trapezio è isoscele se il punto medio della sua base maggiore è equidistante dagli estremi della base minore.

4.43. In un trapezio isoscele $ABCD$ (con base maggiore AB e lati obliqui congruenti BC e AD) sia M il punto medio della base maggiore; prolungare MC e MD rispettivamente dei segmenti CE e DF fra loro congruenti. Dimostrare che il quadrilatero $ABEF$ è un trapezio isoscele.

4.44. Nel parallelogramma $ABCD$ si traccino da A e da C le perpendicolari alla diagonale BD; siano rispettivamente E ed F i punti di intersezione delle perpendicolari con la diagonale. Dimostra che DE è congruente a FB e che $AFCE$ è un parallelogramma.

4.45. Dato un parallelogramma $ABCD$, si consideri il punto medio M del lato AB, si congiunga il vertice D con il punto M, si congiunga il vertice A con il punto medio N del segmento DM. Dimostrare che la retta AN divide la diagonale DB del parallelogramma in due parti di cui una è il doppio dell'altra.

4.46. Dato un triangolo qualunque ABC, si consideri il punto medio M del lato AB, si consideri il segmento parallelo al lato BC che parte da M ed incontra il lato AC nel punto N, si prolunghi questo segmento di un segmento ND uguale ad MN. Dimostrare che il quadrilatero $MDCB$ è un parallelogramma.

4.47. Dato un quadrato $ABCD$ di centro O, siano H e K due punti sulla diagonale AC simmetrici rispetto ad O. Dimostra che il quadrilatero $BHDK$ è un rombo.

4.48. Le diagonali di un trapezio isoscele dividono il trapezio in quattro triangoli, dei quali due triangoli sono isosceli e aventi gli angoli ordinatamente congruenti, mentre gli altri due triangoli sono congruenti.

4.49. Dimostra che il quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero qualunque è un parallelogramma.

4.50. Che tipo di quadrilatero si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un rombo?

4.51. Che tipo di quadrilatero si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo?

4.52. Dimostra che in un parallelogramma due vertici opposti sono equidistanti dalla diagonale avente per estremi gli altri due vertici.

4.53. In un parallelogramma $ABCD$ sia M il punto medio di AB e N il punto medio di DC. Dimostra che $DMBN$ è un parallelogramma.

4.54. Dimostra che se in un parallelogramma le bisettrici di due angoli consecutivi si incontrano in un punto del lato opposto allora il parallelogramma ha un lato che è il doppio dell'altro.

4.55. Nel trapezio isoscele $ABCD$ le bisettrici degli angoli alla base maggiore DC si incontrano in un punto E sulla base minore. Dimostrare che E è il punto medio della base minore.

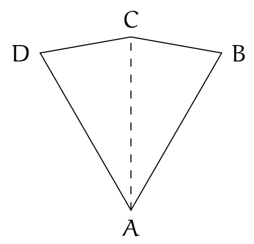
4.56. Dimostra che un parallelogramma che ha tutte le altezze congruenti è un rombo.

4.57. In un trapezio le bisettrici degli angoli adiacenti alla base minore si intersecano in un punto della base maggiore. Dimostra che la base maggiore è congruente alla somma dei lati obliqui.

4.58. Disegna un trapezio isoscele con le diagonali perpendicolari. Dimostrare che il quadrilatero formato dai punti medi dei lati del trapezio è un quadrato.

4.59. Sia AD bisettrice del triangolo ABC. Da D traccia le parallele ai lati AB e AC, detto E il punto di intersezione del lato AC con la parallela ad AB ed F il punto di intersezione del lato AB con la parallela ad AC, dimostra che $AEDF$ è un rombo.

4.60 (Prove invalsi 2003). Il quadrilatero nella figura a fianco è simmetrico rispetto alla retta AC. Sapendo che $B\widehat{A}C = 30°$ e $C\widehat{D}A = 70°$, quanto vale $B\widehat{C}D$?



a) 140°;
b) 150°;
c) 160°;
d) 165°;
e) Le informazioni sono insufficienti.

4.61 (Prove invalsi 2003). Quale fra le seguenti proprietà è falsa per tutti i parallelogrammi?

a) I lati opposti sono uguali.
b) Gli angoli adiacenti sono supplementari.
c) Gli angoli opposti sono supplementari.
d) I lati opposti sono paralleli.
e) Le diagonali si dimezzano scambievolmente.

4.62 (Prove invalsi 2004). Quale tra le seguenti affermazioni riferite ad un parallelogramma qualsiasi è FALSA?

a) I lati opposti sono paralleli.
b) Le diagonali sono uguali.
c) Gli angoli opposti sono uguali.
d) Ogni diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali.

4.63 (Prove invalsi 2005). Quale tra le seguenti affermazioni relative ad un rombo è FALSA?

a) Non ha i lati opposti paralleli.
b) Ha tutti i lati uguali.
c) Ha gli angoli opposti uguali.
d) Ha le diagonali perpendicolari.

4.64 (Prove invalsi 2005). Quale fra le seguenti condizioni è sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo?

a) I lati opposti siano uguali e un angolo sia retto.
b) Le diagonali si dividano a metà.
c) I lati opposti siano paralleli.
d) Le diagonali siano uguali e un angolo sia retto.

4.65 (Prove invalsi 2006). Quale fra le seguenti affermazioni è vera? Il quadrilatero avente i vertici nei punti medi dei lati di …

a) … un rettangolo qualsiasi è sempre un quadrato.
b) … un trapezio isoscele qualsiasi è un rettangolo.
c) … un quadrilatero qualsiasi è un parallelogramma.
d) … un quadrato è un rombo, ma non un quadrato.

4.66 (Prove invalsi 2007). Quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

a) Ogni rettangolo è anche un rombo.
b) Ogni rettangolo è anche un parallelogramma.

c) Ogni quadrato è anche un rombo.
d) Ogni rettangolo ha le diagonali uguali.

4.67 (Prove invalsi 2007)**.** È dato un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che si dimezzano scambievolmente.
Alberto afferma: «Di sicuro si tratta di un quadrato.»
Barbara afferma: «Non è detto che sia un quadrato, ma di sicuro è un rombo.»
Carla afferma: «Non è detto che sia un quadrato, ma di sicuro è un rettangolo.»
Daniele afferma: «Si tratta certamente di un quadrilatero a forma di aquilone.»
Chi ha ragione?

a) Alberto; b) Barbara; c) Carla; d) Daniele.

4.7.2 Risposte

4.1. a) V, b) V, c) F, d) F, e) F, f) F, g) F.

4.2. a) F, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) V, h) F, i) V, j) F, k) F, l) V, m) F, n) V, o) V, p) F, q) F, r) F, s) V, t) V, u) F, v) V.

4.60. c.

4.61. c.

4.62. c.

4.63. a.

4.64. a.

4.65. c.

4.66. a.

4.67. b.

5 Circonferenza

“Circle”
Foto di Howard Dickins
http://www.flickr.com/photos/dorkomatic/4551822855/
Licenza: Creative Commons Attribution 2.0

5.1 Luoghi geometrici

Definizione 5.1. Nel piano, si dice *luogo geometrico* l'insieme di tutti e soli i punti del piano che verificano una proprietà, detta *proprietà caratteristica* del luogo geometrico.

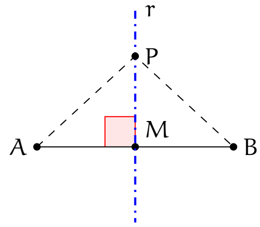
Ad esempio,

- l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento;
- la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Se consideriamo la definizione "costruttiva" di asse di un segmento come retta perpendicolare al segmento stesso e passante per il suo punto medio, è possibile dimostrare che la nuova definizione di asse come luogo geometrico è ad essa equivalente. Vale cioè il seguente

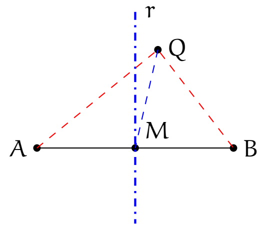
Teorema 5.1. *Nel piano, il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti dati* A *e* B *è la retta* r*, perpendicolare al segmento* AB *e passante per* M*, punto medio di* AB*.*

Sia r la retta perpendicolare ad AB condotta da M, punto medio di AB. Dimostriamo che un generico punto $P \in r$ è equidistante da A e B e viceversa, un generico punto Q tale che $QA \cong QB$ appartiene ad r.



Ipotesi: $r \perp AB$, $AM \cong MB$, $P \in r$. Tesi: $PA \cong PB$.

Dimostrazione. Uniamo P con A, B ed M. Per ipotesi $PM \perp AB$, per cui, nel triangolo PAB, il segmento PM è contemporaneamente altezza e mediana relative al lato AB; pertanto il triangolo PAB è isoscele sulla base AB, da cui la tesi. □



Ipotesi: $QA \cong QB$ e $AM \cong MB$. Tesi: $Q \in r$.

Dimostrazione. Uniamo Q con A, B ed M. Per ipotesi il triangolo QAB è isoscele sulla base AB; inoltre il segmento QM è la mediana relativa alla base del triangolo isoscele, per cui QM è anche altezza. dunque la retta QM coincide con la retta r, cioè l'asse di AB. □

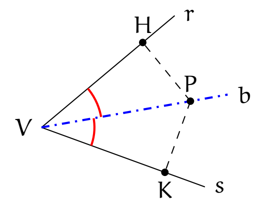
Analogamente, se consideriamo la classica definizione di bisettrice di un angolo come la semiretta interna all'angolo stesso avente origine nel suo vertice e tale da dividerlo in due angoli congruenti, possiamo dimostrare che la nuova definizione di bisettrice come luogo geometrico è equivalente a quest'ultima. Vale cioè il seguente teorema.

Teorema 5.2. *La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.*

Sia $r\widehat{V}s$ un angolo (di vertice V e di lati r ed s) e sia b la sua bisettrice (semiretta di origine V che divide l'angolo a metà). Verifichiamo prima che un generico punto $P \in b$ è equidistante da r e da s.

Ipotesi: $P \in b$, $PK \perp s$, $PH \perp r$, $K\widehat{V}P \cong P\widehat{V}H$. Tesi: $PK \cong PH$.

Dimostrazione. Tracciamo da P le perpendicolari ai lati dell'angolo e chiamiamo $H \in r$ e $K \in s$ i piedi delle due perpendicolari. Osserviamo che i triangoli VPH e VPK, rettangoli rispettivamente in H e K, risultano congruenti perché hanno rispettivamente congruenti l'ipotenusa e un angolo acuto, per i criteri di congruenza sui triangoli rettangoli risultano congruenti. Pertanto i cateti PH e PK, opposti a V, risultano congruenti, da cui la tesi (P equidistante da r e da s). □

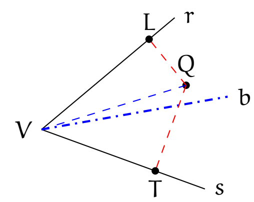


Ovviamente, un qualsiasi punto appartenente ad una delle due semirette r o s che non sia il vertice V non può essere equidistante da r e da s, mentre il punto V lo è (ha distanza nulla da entrambe).

Verifichiamo ora che, se Q è un generico punto interno all'angolo $r\widehat{V}s$, se Q è equidistante da r e da s, deve risultare $Q \in b$.

Ipotesi: $QT \perp s$, $QL \perp r$, $QL \cong QT$. Tesi: $T\widehat{V}Q \cong Q\widehat{V}L$.

Dimostrazione. Infatti, se tracciamo da Q le perpendicolari alle semirette r ed s e chiamiamo $L \in r$ e $T \in s$ i piedi delle perpendicolari, per ipotesi risulta $QL \cong QT$. Se uniamo Q con V, si vengono a formare due triangoli rettangoli QLV e QTV con l'ipotenusa QV in comune ed una coppia di cateti congruenti. Tali triangoli risultano pertanto congruenti per il quarto criterio (più semplicemente per il criterio particolare dei triangoli rettangoli), e di conseguenza $L\widehat{V}Q \cong Q\widehat{V}T$, per cui la semiretta VQ coincide con la bisettrice b. □



5.2 Circonferenza e cerchio: definizioni e prime proprietà

La definizione che ha dato Euclide di circonferenza fa riferimento ai luoghi geometrici: la circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto del piano stesso, detto centro. Intuitivamente, immaginiamo di fissare su di un piano un chiodo, di legare a questo chiodo una corda e di fissare all'altra estremità della corda una penna. Se facciamo ruotare la penna intorno al chiodo tenendo sempre in tensione la corda disegneremo una circonferenza.

Definizione 5.2. Assegnati nel piano un punto C e un segmento AB, si chiama *circonferenza* il luogo dei punti del piano che hanno distanza da C congruente al segmento AB. Il punto C viene detto *centro* della circonferenza e la distanza dei punti della circonferenza dal centro è detta *raggio* della circonferenza.

❑ **Osservazione** Una circonferenza divide il piano in 3 insiemi:

- l'insieme dei punti la cui distanza dal centro è minore del raggio. Questi punti si dicono *interni* alla circonferenza.

- l'insieme dei punti la cui distanza dal centro è uguale al raggio. Essi sono esattamente i punti della circonferenza.
- l'insieme dei punti la cui distanza dal centro è maggiore del raggio. Questi punti si dicono *esterni* alla circonferenza.

Se consideriamo l'unione dell'insieme dei punti della circonferenza con l'insieme dei punti interni alla circonferenza otteniamo un cerchio.

Definizione 5.3. Chiamiamo *cerchio* la figura formata dai punti di una circonferenza e dai punti interni ad essa.

Abbiamo definito la circonferenza come un insieme di punti tutti equidistanti dal centro. Viceversa osserviamo che il centro è l'unico punto del piano equidistante da tutti i punti della circonferenza. Per questo motivo possiamo affermare che una circonferenza è individuata esattamente dal suo centro e dal suo raggio o equivalentemente dal centro e da un suo punto.

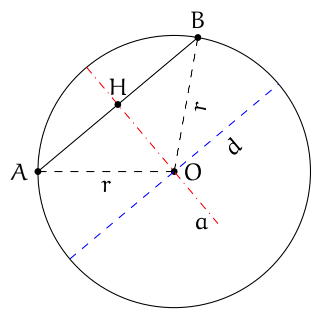
Definizione 5.4. Un segmento che ha come estremi due punti distinti di una circonferenza è detto *corda*. In particolare, una corda che contiene il centro della circonferenza viene definita *diametro*.

I punti estremi di un diametro vengono detti *diametralmente opposti*. Ogni diametro è il doppio di un raggio e tutti i diametri della stessa circonferenza sono fra essi congruenti. Il centro della circonferenza è anche il punto medio di ciascun diametro.

Diamo ora alcune importanti proprietà delle corde.

Teorema 5.3. *Il diametro è la corda di lunghezza massima.*

Dimostrazione. Data una circonferenza di centro O e raggio r, consideriamo una corda qualsiasi AB. Se essa passa per il centro O, coincide con il diametro e dunque $AB = 2r$; altrimenti essa può essere considerata come la base di un triangolo isoscele AOB avente come lati i due raggi OA e OB. In tal caso per la disuguaglianza triangolare un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due lati e dunque possiamo scrivere: $AB < OA + OB$ ovvero $AB < 2r$. In conclusione, il diametro è maggiore di qualunque altra corda che non passa per il centro. □



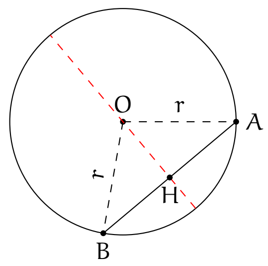
Teorema 5.4. *L'asse di una corda qualsiasi passa per il centro della circonferenza.*

Ipotesi: A e B due punti distinti appartenenti alla circonferenza, a asse della corda AB.
Tesi: l'asse passa per il centro della circonferenza.

Dimostrazione. Facendo riferimento alla figura precedente, poiché OA e OB sono raggi della circonferenza, il triangolo AOB è isoscele sulla base AB. Ricordiamo che l'asse relativo alla base di un triangolo isoscele contiene l'altezza (nella figura OH). Dunque O appartiene all'asse a di AB. Se la corda AB coincide con un diametro, O ne è il punto medio; ma poiché l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento stesso nel suo punto medio, in ogni caso l'asse passa per il centro O della circonferenza. □

Teorema 5.5. *Un diametro passante per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa.*

Dimostrazione. Il diametro passa per ipotesi dal punto medio H della corda AB e per definizione da O, centro della circonferenza nonché vertice del triangolo isoscele AOB. Dunque OH è mediana del triangolo AOB relativamente alla base AB. Per il teorema sul triangolo isoscele, la mediana relativa alla base di un triangolo isoscele è anche altezza e quindi essa è perpendicolare alla corda AB. □

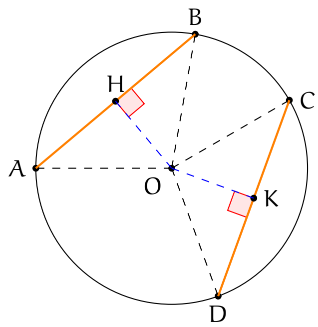


Teorema 5.6. *In una circonferenza, corde congruenti hanno eguale distanza dal centro (e viceversa).*

Ipotesi:

- $AB \cong CD$ (corde congruenti);
- $OH \perp AB$ (OH distanza della corda AB dal centro O);
- $OK \perp CD$ (OK distanza della corda CD dal centro O).

Tesi: $OH \cong OK$.



Dimostrazione. Consideriamo triangoli isosceli AOB e COD; essi sono congruenti per il 3° criterio di congruenza poiché per ipotesi le basi AB e CD sono congruenti e i lati AO, OB, OC e OD sono tutti raggi della circonferenza. Di conseguenza anche le altezze OH e OK sono congruenti. □

Viceversa

Ipotesi:

- $OH \cong OK$ (le distanze delle corde AB e CD dal centro O sono congruenti);
- $OH \perp AB$ (OH distanza della corda AB dal centro O);
- $OK \perp CD$ (OK distanza della corda CD dal centro O).

Tesi: $AB \cong CD$.

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli rettangoli AOH e DOK. $AO \cong DO \cong r$ (raggio della circonferenza) e $OH \cong OK$ per ipotesi; per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, i due triangoli sono congruenti e quindi $AH \cong DH$. Allo stesso modo possiamo dimostrare che i triangoli rettangoli BOH e COK sono congruenti, per cui $BH \cong CK$. Dunque $AB \cong AH + BH \cong DK + CK \cong CD$. □

Teorema 5.7. *Fra due corde disuguali, è maggiore quella che ha distanza minore dal centro (e viceversa).*

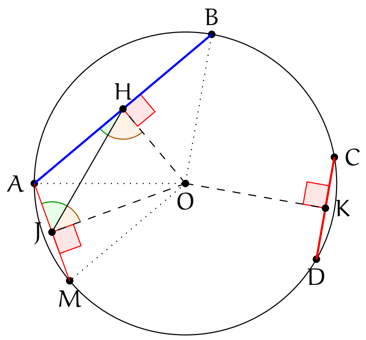
Ipotesi:

- $AB > CD$ (corde disuguali),

- $OH \perp AB$ (OH distanza della corda AB dal centro O),
- $OK \perp CD$ (OK distanza della corda CD dal centro O).

Tesi: $OH \cong OK$.

Dimostrazione. A partire dal punto A e allontanandosi dal punto B si tracci la corda AM, consecutiva alla corda AB, in modo che $AM \cong CD$. Detta OJ la distanza della corda AM dal centro O, si ha che $OJ \perp AM$. Per il teorema precedente, essendo CD e AM corde congruenti, sarà $OJ \cong OK$; dunque basterà dimostrare che $OH < OJ$. Per ipotesi $AB > CD$, dunque $AB > AM$. Il senso di tale disuguaglianza vale anche per le rispettive metà dei segmenti AB e AM, per cui $AH > AJ$ (H è il punto medio di AB e J è il punto medio di AM perché i triangoli AOB e AOM sono isosceli sulle basi AB e AM, per cui OH ed OJ, altezze relative alle basi, sono anche mediane). Si congiunga J con H e si consideri il triangolo HAJ. A lato maggiore si oppone angolo maggiore (per le disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo) per cui $H\widehat{J}A > A\widehat{H}J$; i rispettivi angoli complementari sono disuguali in verso opposto, quindi $H\widehat{J}O < O\widehat{H}J$. Relativamente al triangolo HOJ, poiché ad angolo minore si oppone lato minore (sempre per le disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo, proprietà inversa della precedente), possiamo concludere che $OH < OJ$. □



Viceversa

Ipotesi:

- $OH < OK$ (distanze disuguali),
- $OH \perp AB$ (OH distanza della corda AB dal centro O),
- $OK \perp CD$ (OK distanza della corda CD dal centro O).

Tesi: $AB > CD$.

Dimostrazione. Utilizziamo un metodo simile alla dimostrazione per assurdo, come abbiamo già fatto per la dimostrazione delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo: esaminiamo tutti i casi possibili ed escludiamo i casi che contraddicono il teorema precedente ed il primo caso di questo teorema. Sono possibili le seguenti relazioni tra le lunghezze delle corde AB e CD:

$$(1)\ AB \cong CD; \qquad (2)\ AB < CD; \qquad (3)\ AB > CD.$$

Se fosse vera la relazione (1), per il teorema precedente risulterebbe $OH \cong OK$, contro l'ipotesi.

Se fosse vera la (2), per la prima parte di questo stesso teorema risulterebbe $OH > OK$, contro l'ipotesi.

Rimane solo la possibilità che valga la relazione (3), la quale non è in contraddizione con la prima parte del teorema e che anzi la conferma. Dunque la tesi è verificata. □

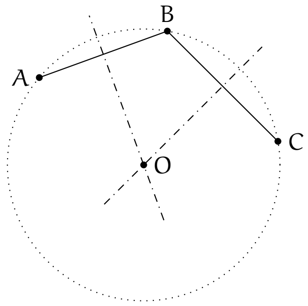
Osservazioni:

- Fissato un punto P, per esso passano infinite circonferenze.
  Infatti, si consideri un qualunque altro punto Q: quest'ultimo può essere il centro di una circonferenza di raggio QP.
- Per due punti fissati A e B passano infinite circonferenze.
  Infatti, poiché tutti i punti dell'asse del segmento AB sono equidistanti sia da A che da B, essi possono essere centri di circonferenze passanti sia per A che per B.

Definizione 5.5. L'insieme di tutte le circonferenze passanti per due punti A e B è detto *fascio di circonferenze*. Chiamiamo A e B *punti base del fascio*, la retta per A e B *asse radicale* e *asse centrale* l'asse del segmento AB che contiene tutti i centri delle circonferenze del fascio.

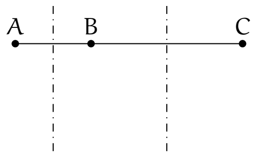
Teorema 5.8. *Per tre punti distinti non allineati passa una ed una sola circonferenza.*

Dimostrazione. Siano A, B e C tre punti non allineati e congiungiamo A con B e B con C. Allora gli assi dei segmenti AB e BC si intersecheranno in un punto O. Per la proprietà degli assi il punto O, appartenendo a entrambi gli assi, è equidistante dai punti A, B e C. Allora si può costruire una circonferenza con centro in O e raggio OA. Questa circonferenza passa per A, B e C, inoltre è unica perché è unico l'asse di un segmento e di conseguenza è unico il punto di intersezione tra i due assi. □



❑ **Osservazione** L'ipotesi che i punti siano non allineati è essenziale. Seguendo le linee della dimostrazione, i segmenti AB e BC sono consecutivi ma non adiacenti, cosa essenziale per affermare che i rispettivi assi non sono paralleli. Vale infatti anche la seguente proprietà:

Teorema 5.9. *Dati tre punti distinti* A, B *e* C *appartenenti ad una stessa retta, non esiste alcuna circonferenza che passa per* A, B *e* C.



Dimostrazione. Verifichiamo che non esiste alcun punto del piano individuato da A, B e C che possa essere il centro di una tale circonferenza, cioè che sia equidistante dai tre punti. Supponendo per assurdo che esista un tal punto O, questo, dovendo essere equidistante da A e da B, dovrebbe appartenere all'asse del segmento AB (luogo dei punti equidistanti dagli estremi) e, per ragioni analoghe, dovrebbe appartenere anche all'asse del segmento BC. Ma i punti A, B e C sono distinti per ipotesi, in particolare A e C non sono sovrapposti. Quindi, detto M il punto medio di AB ed N il punto medio di BC, M ed N sono anch'essi distinti e pertanto gli assi dei segmenti AB, BC non possono essere coincidenti; inoltre gli assi dei segmenti AB, BC sono entrambi perpendicolari alla stessa retta che contiene i tre punti A, B, C e quindi sono paralleli tra loro; essendo dunque rette parallele e distinte, i due assi non hanno punti in comune e pertanto non può esistere un punto O che possa essere il centro della circonferenza passante per A, B e C. □

Corollario 5.10. *Tre punti qualsiasi appartenenti ad una circonferenza non sono allineati.*

A conclusione di queste prime proprietà, possiamo enunciare il seguente

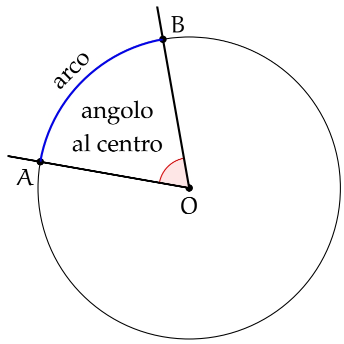
Corollario 5.11. *Una circonferenza è univocamente determinata dal suo centro e dal suo raggio oppure da tre suoi punti.*

Diamo ora la definizione di alcune parti del cerchio e della circonferenza. Ne esamineremo le proprietà in seguito.

Definizione 5.6. Data una circonferenza di centro O,

- chiamiamo *angolo al centro* un qualunque angolo con vertice in O;
- l'intersezione della circonferenza con un angolo al centro γ è detta *arco* e diremo che l'angolo γ insiste su tale arco;
- i punti di intersezione della circonferenza con i lati dell'angolo si dicono *estremi dell'arco*;
- un arco individuato da un angolo al centro piatto si chiama *semicirconferenza*.

Ogni coppia di punti distinti su una circonferenza individua due archi sulla medesima circonferenza. Infatti se consideriamo A e B ottenuti come nella definizione precedente questi punti individuano l'arco su cui insiste l'angolo γ ma anche la restante parte di circonferenza che è pure un arco. Congiungendo A con B il segmento AB è una corda della circonferenza. Diremo che la corda AB sottende l'arco AB o viceversa che l'arco insiste sulla corda. Se in particolare i punti A e B sono diametralmente opposti, essi individuano sulla circonferenza due archi che sono due semicirconferenze.

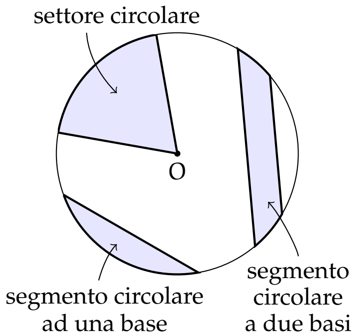


Definizione 5.7. Dato un cerchio

- si dice *settore circolare* l'intersezione del cerchio con un suo angolo al centro: se l'angolo al centro è piatto di parla di *semicerchio*;
- si chiama *segmento circolare ad una base* la parte di cerchio limitata da una corda e da un arco che vi insiste; la corda viene detta *base del segmento circolare*;
- la parte di cerchio limitata da due corde parallele è detta *segmento circolare a due basi*, le due corde prendono il nome di *basi del segmento circolare* e la loro distanza si dice *altezza del segmento circolare*.

Ogni corda divide il cerchio in due segmenti circolari ad una base. In particolare se la corda è un diametro otteniamo due semicerchi. Un semicerchio, quindi, è sia un particolare settore circolare sia un particolare segmento circolare. È anche l'unico caso possibile di settore che sia anche segmento o viceversa.

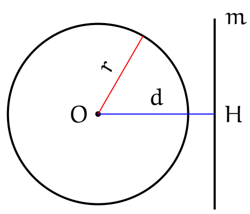
Una coppia di corde parallele individua in un cerchio un segmento circolare a due basi e due segmenti circolari ad una base (se vogliamo considerare solo le tre parti non sovrapposte che hanno in comune al massimo una corda). Più in generale, date due corde parallele e distinte, queste individuano un segmento circolare a due basi e quattro segmenti circolari ad una base, ed il segmento a due basi è anche l'intersezione dei due segmenti ad una base "sovrapposti".



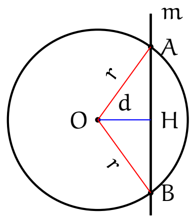
5.3 Posizioni relative fra rette e circonferenze

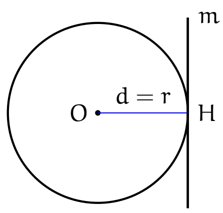
Perché alcune strade a scorrimento veloce vengono chiamate "tangenziali"? Per rispondere a questa domanda dobbiamo definire le posizioni che può assumere una retta rispetto ad una circonferenza. Consideriamo in uno stesso piano una circonferenza C di centro O e raggio r e una retta generica m; la distanza d fra il centro O e la retta m è definita dal segmento OH, che ha un estremo coincidente con il centro O ed è perpendicolare in H alla retta m (H è il piede della perpendicolare). Si possono distinguere i tre casi seguenti:

a) $d > r$: la distanza del centro O dalla retta è maggiore del raggio.
Il punto H è esterno alla circonferenza così come ogni altro punto della retta m. La retta si dice allora *esterna* alla circonferenza e non ha alcun punto in comune con essa, ovvero non vi sono punti di intersezione fra C ed m.



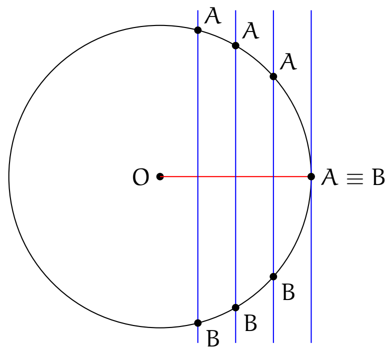
b) $d < r$: la distanza del centro O dalla retta è minore del raggio.
La retta m interseca la circonferenza in due punti distinti A e B; questi appartengono alla circonferenza e quindi $OA \cong OB \cong r$. Il segmento AB appartiene alla retta e definisce anche la corda AB, i cui punti, tutti interni alla circonferenza, hanno una distanza dal centro minore del raggio; il punto di minore distanza è proprio H, che è anche il punto medio della corda AB. I punti della retta non appartenenti alla corda AB sono esterni alla circonferenza e la loro distanza dal centro O è maggiore del raggio. La retta viene detta *secante* alla circonferenza nei punti A e B, che sono i punti di intersezione della retta con la circonferenza stessa.



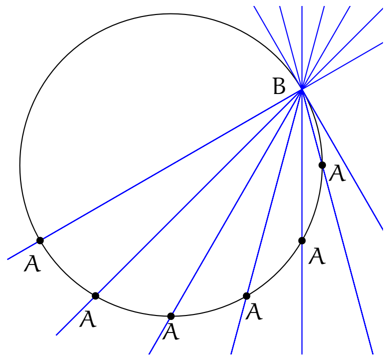


c) $d = r$: la distanza del centro O dalla retta è pari al raggio.
Il punto H appartiene alla circonferenza mentre ogni altro punto della retta m è esterno

alla circonferenza e ha una distanza dal centro O maggiore del raggio. La retta viene detta *tangente* alla circonferenza e H è il punto di tangenza o di contatto.



Si noti che la retta tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. Inoltre, l'unica retta perpendicolare al raggio nel punto di intersezione tra il raggio e la circonferenza è tangente. Consideriamo una circonferenza C di centro O e raggio r e una retta m ad essa secante nei punti distinti A e B. Sia OH la distanza del centro O dalla retta. Trasliamo la retta m in modo da aumentare la sua distanza dal centro O (vedi figura). All'aumentare della distanza $d = OH$, quella fra i punti A e B diminuisce; quando $OH = r$, i punti A e B coincidono nel punto di tangenza. Dunque la tangente è un caso particolare di secante avente due punti di intersezione coincidenti.



Una più efficace "visualizzazione" di questo concetto è la seguente. Consideriamo la stessa circonferenza e la stessa retta dell'esempio precedente. Ruotiamo la retta attorno al punto B (vedi figura). La distanza del punto A dal punto B diminuisce all'aumentare dell'angolo $O\widehat{B}A$ fra la retta e il raggio. Quando il punto A coincide con il punto B, il raggio è perpendicolare alla retta e quest'ultima è tangente alla circonferenza in $B \equiv A$.

Il lettore dimostri per esercizio il seguente teorema (si suggerisce di ricorrere alla dimostrazione per assurdo).

Teorema 5.12. *Se una retta è esterna ad una circonferenza, allora la sua distanza dal centro è maggiore del raggio, se è tangente la distanza dal centro è uguale al raggio e se è secante la distanza dal centro è minore del raggio.*

Possiamo ora rispondere al quesito iniziale. Il termine "tangenziale" viene utilizzato per descrivere una strada a scorrimento veloce, realizzata in zone particolarmente urbanizzate, per permettere il transito degli autoveicoli senza dover entrare in contatto diretto con la circolazione urbana; ciò comporta evidenti benefici per la vivibilità dei centri cittadini. Possiamo immaginare il centro città racchiuso in un cerchio e la tangenziale come una retta di un certo spessore che è, appunto, tangente al cerchio.

5.3.1 Posizioni reciproche di due circonferenze

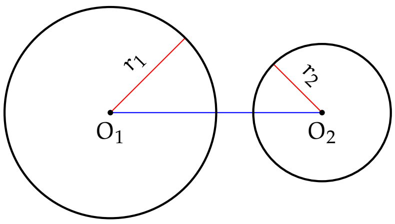
Descriviamo adesso le posizioni reciproche di due circonferenze.

Definizione 5.8. Due circonferenze si dicono:

- *esterne* se tutti i punti dell'una sono esterni all'altra;
- *secanti* quando hanno due punti in comune;
- *una interna all'altra* se i loro raggi sono diseguali e i punti della circonferenza di raggio minore sono tutti interni a quella di raggio maggiore;
- *tangenti* se hanno un solo punto in comune detto punto di tangenza; si possono inoltre distinguere fra:
  - *tangenti esternamente* se, ad eccezione del punto di tangenza, tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra;
  - *tangenti internamente* se i loro raggi sono diseguali e, ad eccezione del punto di tangenza, tutti i punti della circonferenza di raggio minore sono interni a quella di raggio maggiore.

Analizziamo in dettaglio i diversi casi; come esercizio lasciamo allo studente la dimostrazione rigorosa delle seguenti proprietà.

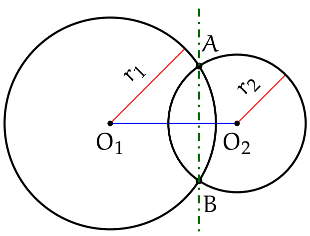
Teorema 5.13. *Date due circonferenze esterne, la distanza fra i due centri è maggiore della somma dei raggi.*



$$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$$

Abbiamo già dimostrato che per tre punti distinti non allineati passa una sola circonferenza, mentre per due punti passano infinite circonferenze. Di conseguenza due circonferenze distinte possono avere al massimo due punti in comune. È il caso delle circonferenze secanti. Se invece il numero di punti in comune è uno, allora ci riduciamo al caso delle circonferenze tangenti.

Teorema 5.14. *Date due circonferenze secanti, la distanza fra i centri è maggiore della differenza dei raggi e minore della loro somma.*

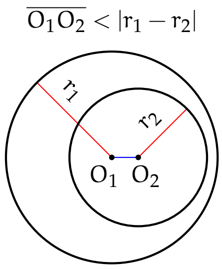


$$|r_1 - r_2| < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$$

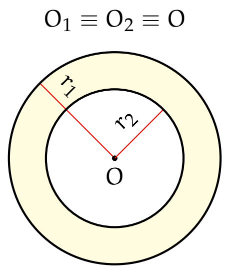
La retta passante per i punti di intersezione viene detta *asse radicale*.

Si dimostra che l'asse radicale è perpendicolare alla retta congiungente i centri.

Teorema 5.15. *Data una circonferenza interna ad un'altra, la distanza fra i centri è minore della differenza fra i raggi.*



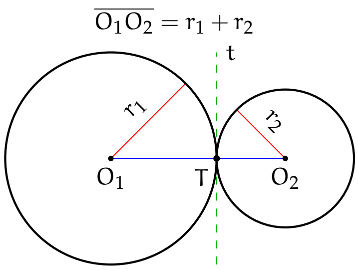
circonferenza interna ad un'altra



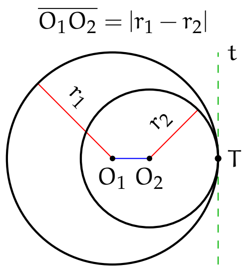
circonferenze concentriche

Un caso particolare di circonferenze una interna all'altra è rappresentato dalle *circonferenze concentriche*, i cui centri coincidono. La zona di piano delimitata dalle due circonferenze è detta *corona circolare*.

Teorema 5.16. *Date due circonferenze tangenti esternamente in un punto* T*, la distanza fra i centri è uguale alla somma dei raggi. La retta tangente passante per* T *è comune alle due circonferenze ed è perpendicolare alla retta congiungente i due centri.*



circonferenze tangenti esternamente

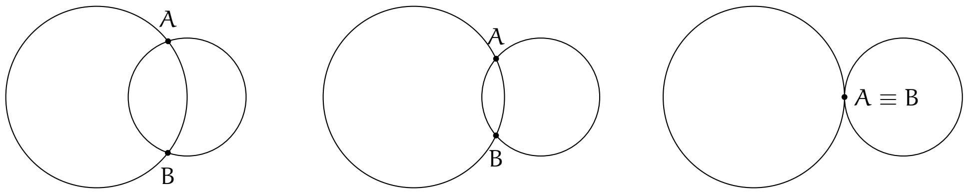


circonferenze tangenti internamente

Teorema 5.17. *Date due circonferenze tangenti internamente, la distanza fra i centri è pari alla differenza dei raggi.*

Anche per le circonferenze si può affermare che nel caso siano tangenti lo sono in due punti coincidenti; infatti se prendiamo due circonferenze secanti e man mano allontaniamo i loro centri, osserviamo che i due punti di intersezione si avvicinano sempre più fino a sovrapporsi nel momento in cui la distanza fra i loro centri è pari alla somma dei raggi.

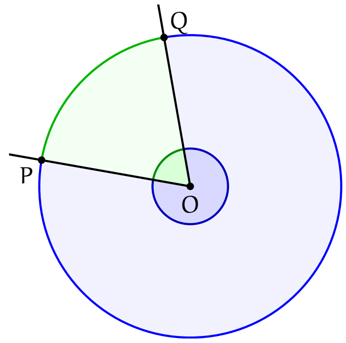
Se esaminiamo le varie posizioni reciproche nel caso di due circonferenze congruenti ($r_1 = r_2 = r$), tenendo conto anche del fatto banale che in tal caso $|r_1 - r_2| = 0$ e $r_1 + r_2 = 2r$, scompaiono le "distinte" possibilità che esse siano concentriche, interne e tangenti internamente, ma compare la possibilità che siano coincidenti, cioè perfettamente sovrapposte.



Lasciamo al lettore la "rivisitazione" dei casi precedentemente analizzati nell'ipotesi che le due circonferenze siano congruenti.

5.4 Angoli nelle circonferenze

Ricordiamo che abbiamo definito *angolo al centro* di una circonferenza di centro O e raggio r un qualsiasi angolo avente come vertice il centro O. Tracciato un angolo al centro, i suoi lati intersecano la circonferenza in due punti P e Q e di conseguenza l'angolo contiene l'arco PQ; si dice che l'angolo al centro $P\widehat{O}Q$ insiste sull'arco PQ o sottende l'arco PQ. Si noti che tracciate due semirette uscenti dal centro O, si vengono a formare due angoli al centro esplementari, ovvero la cui somma è un angolo giro, a cui corrispondono due distinti archi complementari PQ, la cui somma è il perimetro della circonferenza. I due angoli sono uno convesso e uno concavo, tranne il caso particolare in cui essi sono entrambi piatti, con le due semirette opposte. In tal caso, anche i relativi archi sono congruenti e ognuno ha misura pari al semiperimetro della circonferenza.



Diamo ora la seguente

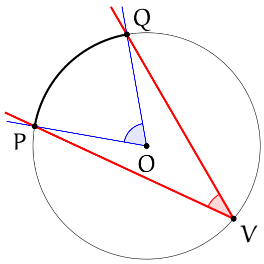
Definizione 5.9. Data una circonferenza, si definisce *angolo alla circonferenza* qualsiasi angolo avente il vertice sulla circonferenza e i cui lati siano secanti o tangenti alla circonferenza stessa.

In base alla definizione si possono distinguere tre casi:

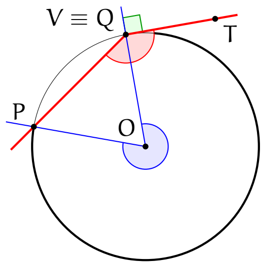
- i lati dell'angolo sono entrambi secanti alla circonferenza;
- un lato è secante e l'altro tangente;
- ambedue i lati sono tangenti.

Anche gli angoli alla circonferenza insistono su archi di circonferenza. Questi appartengono all'angolo stesso e sono delimitati dai punti di tangenza o di intersezione fra i lati dell'angolo e la circonferenza. Nella figura 5.4 gli angoli alla circonferenza sono segnati in rosso ed i rispettivi archi sono più marcati. Sono invece stati evidenziati in blu i corrispondenti angoli al centro, come segue dalla seguente definizione.

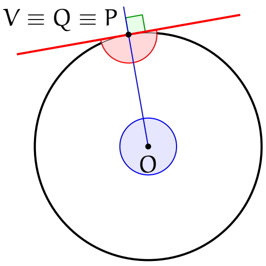
Definizione 5.10. Un angolo al centro ed un angolo alla circonferenza si dicono *corrispondenti* se insistono sullo stesso arco.



L'angolo al centro $P\hat{O}Q$ corrisponde all'angolo alla circonferenza $P\hat{V}Q$



L'angolo al centro $P\hat{O}Q$ corrisponde all'angolo alla circonferenza $P\hat{V}T$



L'angolo (giro) al centro di vertice O corrisponde all'angolo (piatto) alla circonferenza di vertice V

FIGURA 5.1: Angoli alla circonferenza e corrispondenti angoli al centro

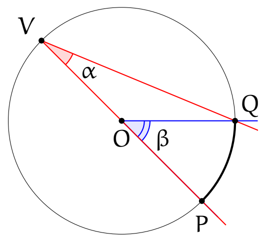
Teorema 5.18. *L'angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.*

Ipotesi: α angolo alla circonferenza che insiste sull'arco PQ;
β angolo al centro corrispondente ad α.

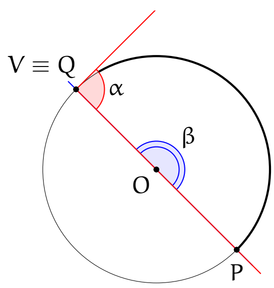
Tesi: $\beta = 2\alpha$.

Dimostrazione. Distinguiamo tre casi:

1. Un lato dell'angolo alla circonferenza passa per il centro e dunque si sovrappone al diametro.
   Abbiamo due possibilità:
   a) L'altro lato è secante alla circonferenza.
   Con riferimento alla figura a fianco, il triangolo OVQ è isoscele sulla base VQ, in quanto i lati OV e OQ sono due raggi della circonferenza; ne segue che gli angoli alla base sono congruenti e dunque $O\hat{Q}V \cong \alpha$. L'angolo al centro $P\hat{O}Q \equiv \beta$ giace sul prolungamento del lato OV e dunque è un angolo esterno al triangolo OVQ. Per il teorema degli angoli esterni ad un triangolo, possiamo affermare che β è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e quindi $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

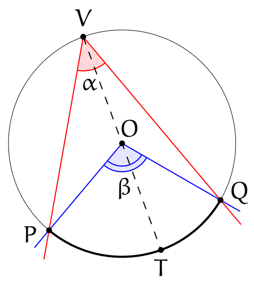


   b) L'altro lato è tangente alla circonferenza.
   In questo caso un lato coincide sempre con il diametro e l'altro è tangente alla circonferenza nel punto V ≡ Q; poiché le rette tangenti alla circonferenza sono sempre ortogonali al raggio nel punto di tangenza, i due lati sono perpendicolari. Di conseguenza l'angolo α è un angolo retto e il corrispondente angolo al centro β è un angolo piatto, per cui $\beta = 2\alpha$.

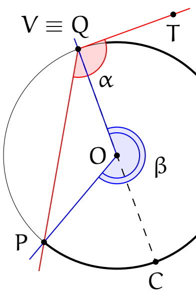


2. Il centro O è interno all'angolo alla circonferenza.
   Anche in questo caso abbiamo due possibilità:

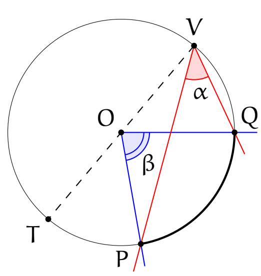
a) I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti.
Si conduca dal vertice V dell'angolo alla circonferenza $P\widehat{V}Q$ il diametro VT; si ottengono in tal modo due angoli alla circonferenza $P\widehat{V}T$ e $T\widehat{V}Q$ la cui somma è proprio l'angolo $P\widehat{V}Q$. Tali angoli hanno il lato comune il lato VT coincidente con il diametro e dunque, essendo $P\widehat{O}T$ e $T\widehat{O}Q$ i rispettivi angoli al centro, possiamo applicare ad ognuno di essi il risultato dimostrato al punto 1: $P\widehat{O}T = 2P\widehat{V}T$ e $T\widehat{O}Q = 2T\widehat{V}Q$. Ma la somma degli angoli $P\widehat{O}T$ e $T\widehat{O}Q$ è pari all'angolo al centro $P\widehat{O}Q$, corrispondente all'angolo alla circonferenza $P\widehat{V}Q$. Dunque $P\widehat{O}Q = P\widehat{O}T + T\widehat{O}Q = 2P\widehat{V}T + 2T\widehat{V}Q = 2(P\widehat{V}T + T\widehat{V}Q) = 2P\widehat{V}Q$.



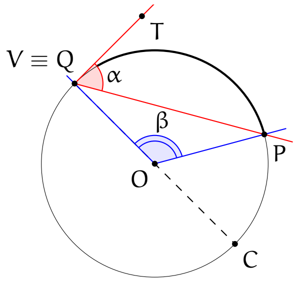
b) Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente.
La dimostrazione è del tutto simile alla precedente. Il diametro VC divide l'angolo alla circonferenza $P\widehat{V}T$ negli angoli $P\widehat{V}C$ e $C\widehat{V}T$. Per il primo angolo vale quanto già dimostrato al punto 1a e ribadito al punto precedente: detto $P\widehat{O}C$ il corrispondente angolo al centro, possiamo scrivere $P\widehat{O}C = 2P\widehat{V}C$. Inoltre, $C\widehat{V}T$ è retto per costruzione e difatti misura la metà del corrispondente angolo al centro $C\widehat{O}V$, che è proprio un angolo piatto (vedi quanto dimostrato nel punto 1b). Anche in questo caso, essendo $P\widehat{O}V$ l'angolo al centro corrispondente all'angolo $P\widehat{V}T$, si dimostra che $P\widehat{O}V = P\widehat{O}C + T\widehat{O}Q = 2P\widehat{V}C + 2C\widehat{V}T = 2(P\widehat{V}C + C\widehat{V}T) = 2P\widehat{V}T$. Si noti che $P\widehat{O}V$ è un angolo concavo, ovvero maggiore di un angolo piatto.



3. Il centro O è esterno all'angolo alla circonferenza.
Anche qui abbiamo due casi:
a) Entrambi i lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti.
Sia $P\widehat{V}Q$ l'angolo alla circonferenza. Tracciamo il diametro VT. Per quanto dimostrato al punto 1.a, l'angolo al centro $T\widehat{O}Q$ è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza $T\widehat{V}Q$ e $T\widehat{O}P$ è il doppio dell'angolo $T\widehat{V}P$. Essendo $P\widehat{O}Q$ l'angolo al centro corrispondente a quello alla circonferenza $P\widehat{V}Q$, possiamo scrivere: $P\widehat{O}Q = T\widehat{O}Q - T\widehat{O}P = 2T\widehat{V}Q - 2T\widehat{V}P = 2(T\widehat{V}Q + T\widehat{V}P) = 2P\widehat{V}Q$.



b) Un lato dell'angolo alla circonferenza è tangente.
La dimostrazione è analoga alla precedente e fa uso delle proprietà 1.a e 1.b. Tracciato il diametro VC, essendo $P\widehat{O}V$ l'angolo al centro corrispondente a quello alla circonferenza $P\widehat{V}T$, possiamo scrivere: $P\widehat{O}V = C\widehat{O}V - C\widehat{O}P = 2C\widehat{V}T - 2C\widehat{V}P = 2(C\widehat{V}T + C\widehat{V}P) = 2P\widehat{V}T$.

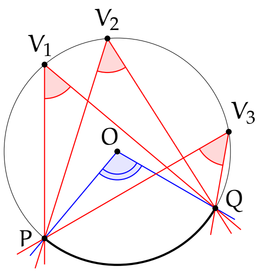


□

I seguenti corollari sono immediata conseguenza del precedente teorema.

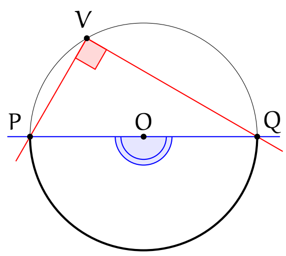
Corollario 5.19. *Angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono congruenti.*

Dimostrazione. Gli angoli alla circonferenza che nelle figura a lato insistono sullo stesso arco PQ misurano tutti la metà del corrispondente angolo al centro $P\widehat{O}Q$. Quindi sono tra loro congruenti. □



Corollario 5.20. *Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto.*

Dimostrazione. Il corrispondente angolo al centro è infatti un angolo piatto. □

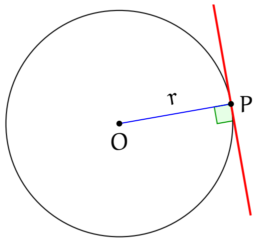


Premesso che affinché due circonferenze siano congruenti è sufficiente che abbiano lo stesso raggio, sussistono i seguenti teoremi, di cui lasciamo la dimostrazione al lettore che può essere effettuata velocemente ricorrendo alla sovrapposizione tramite movimento rigido degli elementi dei quali si vuole dimostrare la congruenza (in una stessa circonferenza questo si otterrà tramite rotazione intorno al centro).

Teorema 5.21. *In una stessa circonferenza o in circonferenze congruenti*

- *ad archi congruenti corrispondono angoli al centro e corde congruenti;*
- *a corde congruenti corrispondono angoli al centro ed archi congruenti;*
- *ad angoli al centro congruenti corrispondono archi e corde congruenti.*

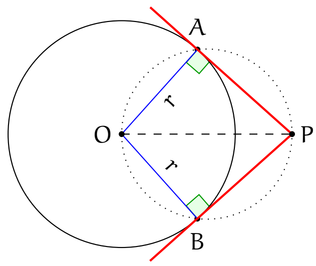
5.5 Proprietà dei segmenti di tangenza



Data una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio r, ed un punto P del piano, quante sono le rette passanti per P e tangenti a $\mathcal{C}$? Ovviamente, dipende dalla posizione del punto P rispetto alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Se P è interno a $\mathcal{C}$, non esiste alcuna retta passante per P e tangente a $\mathcal{C}$, anche perché $OP < r$.

Se invece il punto $P \in \mathcal{C}$, allora esiste una ed una sola retta passante per P e tangente a $\mathcal{C}$ ed in questo caso OP coincide con un raggio di $\mathcal{C}$ e la retta tangente è perpendicolare ad OP.



Se consideriamo un punto P esterno a $\mathcal{C}$, allora esistono due rette distinte passanti per P e tangenti a $\mathcal{C}$. Verifichiamo, con l'aiuto di una costruzione geometrica, che da un punto esterno ad una circonferenza possiamo tracciare due tangenti, e due sole, alla circonferenza stessa. Uniamo P con O e costruiamo la circonferenza di diametro OP; le due circonferenze si intersecano in due punti distinti A e B. Uniamo A e B con O e con P. Gli angoli $O\widehat{A}P$ e $O\widehat{B}P$ sono retti perché sono angoli alla circonferenza che insistono su semicirconferenze. Dunque $OA \perp AP$ e $OB \perp BP$, per cui le rette AP e BP hanno distanza da O pari ad r, e quindi sono tangenti a $\mathcal{C}$. A e B sono gli unici punti per cui valgono le relazioni precedenti, perché sono gli unici punti di intersezione delle due circonferenze. AP e BP sono pertanto le due uniche rette passanti per P e tangenti a $\mathcal{C}$.

I segmenti AP e BP che uniscono i punti di tangenza con il punto esterno P sono detti *segmenti tangenti*.

Teorema 5.22. *I segmenti tangenti condotti da un punto P ad una circonferenza sono congruenti.*

Dimostrazione. Infatti, seguendo le linee della costruzione precedente, i triangoli rettangoli OPA e OPB hanno l'ipotenusa OP in comune e i cateti OA e OB congruenti perché raggi della stessa circonferenza; sono dunque congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli e di conseguenza gli altri due cateti AP e BP risultano congruenti, come volevasi dimostrare. □

Dalla congruenza dei due triangoli rettangoli segue anche la congruenza delle due coppie di angoli acuti: $A\widehat{O}P \cong B\widehat{O}P$ e $A\widehat{P}O \cong B\widehat{P}O$. Da queste due congruenze segue il seguente

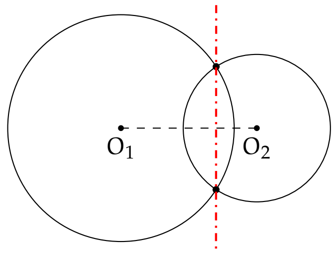
Corollario 5.23. *Il segmento che unisce il centro di una circonferenza con un punto esterno P è bisettrice sia dell'angolo formato dalle due tangenti uscenti da P sia dell'angolo al centro avente come lati i raggi per i punti di tangenza.*

Inoltre, esso è anche perpendicolare alla corda avente per estremi i punti di tangenza.

Corollario 5.24. *Date due circonferenze secanti, la congiungente dei loro centri è perpendicolare alla congiungente dei punti di intersezione.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione.

Abbiamo definito, a pagina 143, l'*asse radicale* come la retta passante per i due punti di intersezione di due circonferenze, ma si parla di asse radicale in maniera più generale, cioè anche nel caso di due circonferenze tra loro non secanti. L'unico caso nel quale l'asse radicale non esiste è quello in cui le due circonferenze sono concentriche. Nel caso in cui le due circonferenze siano tangenti (sia esternamente o internamente), l'asse radicale coincide con la tangente in comune. Nel caso in cui le due circonferenze non abbiano punti in comune (reciprocamente esterne, o l'una interna all'altra, ma non concentriche), l'asse radicale è una particolare retta esterna ad entrambe, perpendicolare alla congiungente dei centri e luogo geometrico dei punti tali che, tracciando da essi i segmenti tangenti alle due circonferenze essi risultano congruenti.

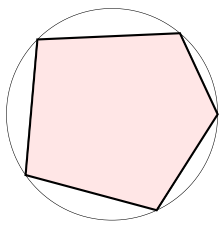


asse radicale

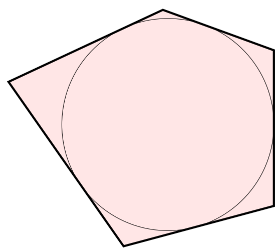
5.6 Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

Definizione 5.11. Un poligono si dice *inscritto in una circonferenza* se tutti i vertici del poligono appartengono alla circonferenza.

Definizione 5.12. Un poligono si dice *circoscritto a una circonferenza* se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.



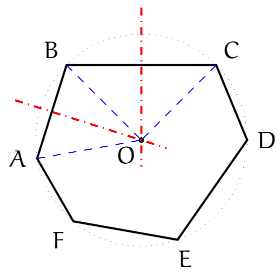
poligono inscritto
in una circonferenza



poligono circoscritto
ad una circonferenza

Teorema 5.25. *Un poligono è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si incontrano tutti in uno stesso punto (centro della circonferenza).*

Dimostrazione diretta.
Sia $ABCDEF$ un poligono che ha gli assi dei suoi lati che passano per uno stesso punto O. Poiché O appartiene all'asse di AB e poiché l'asse è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi, si ha che $OA \cong OB$. Poiché O appartiene anche all'asse di BC allora O è equidistante dagli estremi di BC, cioè $OB \cong OC$. Poiché ciò vale per tutti i lati del poligono si ha: $OA \cong OB \cong OC \cong OD \cong OE \cong OF$. Pertanto la circonferenza di centro O e raggio OA passa per

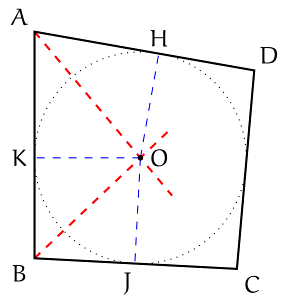


tutti i vertici del poligono e il poligono risulta pertanto inscritto in essa.

Dimostrazione inversa.
Sia $ABCDEF$ un poligono inscritto in una circonferenza e che ha quindi tutti i vertici sulla circonferenza, allora tutti i suoi lati sono corde della circonferenza, di conseguenza, per una proprietà delle corde, gli assi delle corde passano per il centro della circonferenza, e quindi tutti gli assi dei lati del poligono si incontrano nel centro della circonferenza. □

Teorema 5.26. *Un poligono convesso è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se le bisettrici dei suoi angoli passano tutte per uno stesso punto (centro della circonferenza).*

Dimostrazione diretta.
Sia $ABCD$ il poligono convesso; AO la bisettrice dell'angolo in A e BO quella dell'angolo in B. Poiché la bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo, si ha che il punto O è equidistante dal lato AD e dal lato AB, cioè $OH \cong OK$. Analogamente, O, appartenendo alla bisettrice BO dell'angolo in B, è equidistante da AB e da BC, cioè $OJ \cong OK$. Ciò vale per tutti i lati del poligono, pertanto $OH \cong OK \cong OJ \cong \ldots$. Tracciando la circonferenza di centro O e raggio OH si ha la circonferenza alla quale il poligono risulta circoscritto. □



La dimostrazione del teorema inverso si basa anch'essa sulla proprietà della bisettrice dell'angolo.

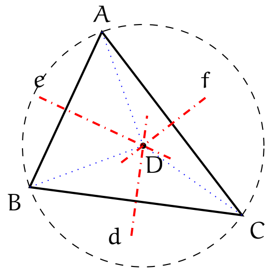
5.7 Punti notevoli di un triangolo

5.7.1 Circocentro

I vertici di un triangolo sono tre punti non allineati, dunque per essi passa una ed una sola circonferenza: il centro di tale circonferenza si trova come intersezione degli assi di due lati del triangolo.

Definizione 5.13. Il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo è detto *circocentro* del triangolo.

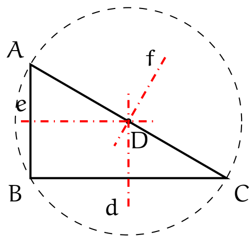
Teorema 5.27. *I tre assi dei lati di un triangolo si incontrano nel suo circocentro.*



Dimostrazione. Sia ABC un triangolo e siano e l'asse di AB, d l'asse di BC ed f l'asse di AC. Sia D il punto di intersezione tra d ed e (che, come detto in precedenza, esiste perché le due rette, in quanto perpendicolari a due segmenti non paralleli, non possono essere parallele). Allora risulta $AB \cong BD$ in quanto $D \in e$, ed anche $BC \cong CD$ in quanto $P \in d$; dunque, per la proprietà transitiva della congruenza, risulta $AD \cong CD$ e quindi $P \in f$. Pertanto D risulta equidistante dai tre vertici ed è quindi il centro della circonferenza circoscritta. □

❑ **Osservazione** Il circocentro di un triangolo può essere interno o esterno al triangolo o sul perimetro. Ricordando le proprietà degli angoli alla circonferenza, il circocentro è sul perimetro solo nel caso in cui il triangolo è rettangolo, ed in tal caso si trova sul punto medio dell'ipotenusa.

Da ciò seguono le seguenti importanti proprietà:



Teorema 5.28. *In un triangolo rettangolo*

- *il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici;*
- *la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.*

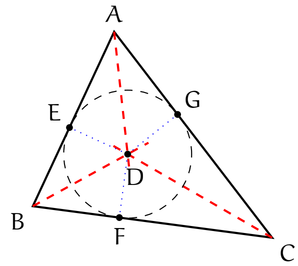
Sempre per le proprietà degli angoli alla circonferenza, il circocentro di un triangolo è interno al triangolo se il triangolo è acutangolo, mentre è esterno se il triangolo è ottusangolo (il corrispondente angolo al centro è rispettivamente convesso o concavo).

5.7.2 Incentro

Esiste uno ed un solo punto equidistante dai tre lati di un triangolo, pertanto un triangolo è sempre circoscrivibile ad una circonferenza, cioè esiste ed è unica la circonferenza inscritta in un triangolo.

Definizione 5.14. Il centro della circonferenza inscritta in un triangolo è detto *incentro* del triangolo.

Teorema 5.29. *Le bisettrici dei tre angoli di un triangolo si incontrano nel suo incentro.*



Dimostrazione. Ricordiamo che la bisettrice è la semiretta che divide a metà l'angolo e quindi è anche il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. Consideriamo un triangolo ABC ed i suoi tre angoli interni. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (π), abbiamo $\widehat{A}+\widehat{B}<\pi$ e a maggior ragione $\frac{1}{2}\widehat{A}+\frac{1}{2}\widehat{B}<\pi$. Quindi poiché i lati AC e BC non sono paralleli a maggior ragione non possono essere parallele le bisettrici degli angoli interni di vertici A e B, anzi i segmenti di bisettrice sono certamente interni al triangolo. Detto D il punto di intersezione delle bisettrici di $\widehat{A}$ e di $\widehat{B}$, verifichiamo che anche la bisettrice di $\widehat{C}$ passa per D. Poiché D appartiene alla bisettrice di $\widehat{A}$, è equidistante dai lati AB e AC ($DE \cong DG$); analogamente, poiché D appartiene alla bisettrice di $\widehat{B}$, è equidistante dai lati AB e BC ($DE \cong DF$). Dunque D deve essere equidistante dai lati AC e BC, pertanto D deve appartenere alla bisettrice di $\widehat{C}$. La distanza comune di D dai tre lati è il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo, che ha centro D. □

5.7.3 Ortocentro

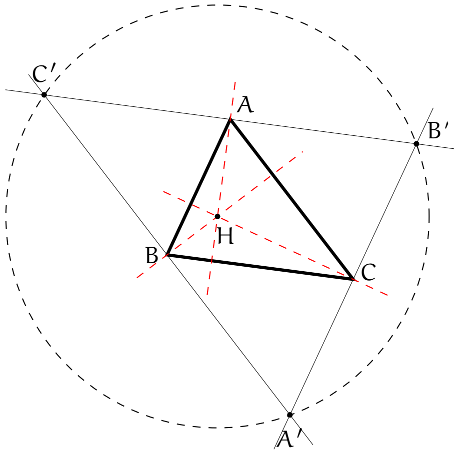
Definizione 5.15. Il punto di incontro delle altezze di un triangolo è detto *ortocentro* del triangolo.

Anche questo esiste ed è unico. Ricordiamo che di solito si parla di altezza come del segmento che unisce un vertice con il piede della perpendicolare al lato opposto. Qui ci occupiamo di retta dell'altezza, cioè della retta perpendicolare ad un lato di un triangolo e passante per il vertice opposto. Osserviamo infatti che, mentre l'incentro è certamente interno al triangolo, l'ortocentro può essere esterno.

Teorema 5.30. *In un triangolo esiste sempre l'ortocentro.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Tracciamo la retta parallela a BC e passante per A; analogamente tracciamo la parallela ad AC passante per B e la parallela ad AB passante per C. Le tre rette, essendo parallele ai tre lati del triangolo ABC, sono a due a due incidenti. Chiamiamo A' il punto di intersezione tra AB ed AC, B' il punto di intersezione tra AB e BC e C' il punto di intersezione tra AC e BC.

Il triangolo BCA' risulta congruente al triangolo ABC per il secondo criterio, in quanto ha BC in comune, $A\widehat{C}B \cong C\widehat{B}A$ e $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}A$ perché angoli alterni interni tra coppie di rette parallele tagliate dalla trasversale BC. Analogamente anche i triangoli ABC' e ACB' risultano congruenti ad ABC per il secondo criterio, quindi i quattro triangoli sono tutti congruenti. In particolare risulta che i segmenti $C'A$, AB' e BC sono paralleli e congruenti, dunque la retta



passante per A e perpendicolare a BC è sia l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC sia l'asse del segmento $C'B'$. Lo stesso vale per le altre due altezze. Dunque le tre altezze del triangolo ABC coincidono con gli assi dei lati del triangolo $A'B'C'$: quindi l'ortocentro di ABC esiste perché coincide con il circocentro di $A'B'C'$. □

❑ **Osservazione** Dalla costruzione precedente, risulta, pertanto ABC è acutangolo, rettangolo, ottusangolo come $A'B'C'$. Possiamo affermare dunque che:

- se ABC è rettangolo lo è pure $A'B'C'$ ed il punto medio dell'ipotenusa di $A'B'C'$ coincide con il vertice dell'angolo retto di ABC;
- se ABC è ottusangolo il suo circocentro è esterno ad esso, quindi l'ortocentro di ABC, dovendo essere esterno al triangolo $A'B'C'$, è a maggior ragione esterno ad ABC;
- se ABC è acutangolo quanto detto in precedenza ci permette solo di affermare che il circocentro di $A'B'C'$, che è anche l'ortocentro di ABC, è interno ad $A'B'C'$, ma in realtà è interno anche ad ABC.

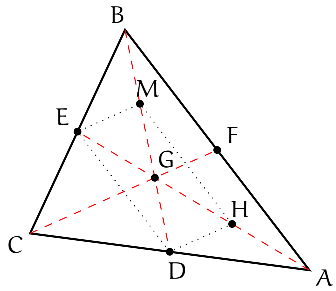
Questo si vede meglio se consideriamo il classico modo di disegnare l'altezza: facciamo eventualmente compiere al triangolo una rototraslazione in modo che il lato rispetto al quale vogliamo tracciare l'altezza sia "orizzontale" ed il vertice opposto si trovi nel "semipiano in alto"; se il triangolo è acutangolo, comunque scegliamo il lato rispetto al quale vogliamo tracciare l'altezza, gli angoli compresi sono entrambi acuti, per cui il piede dell'altezza deve essere necessariamente interno al lato, e pertanto l'intera altezza (segmento) deve essere interna al triangolo. Come nel caso dell'incentro, che è sempre interno al triangolo, anche l'ortocentro è interno nel caso di triangolo ottusangolo. Lasciamo al lettore la dimostrazione dettagliata di queste due affermazioni (si può procedere per assurdo), ed illustriamo quanto detto nella figura seguente. In riferimento alla figura del teorema precedente, l'ortocentro del triangolo ABC, e quindi anche il circocentro del triangolo $A'B'C'$, non può cadere all'interno di uno dei triangoli ABC', $AB'C$ e $A'BC$.

5.7.4 Baricentro

Definizione 5.16. In un triangolo si chiama *baricentro* il punto di incontro delle tre mediane.

Poiché le mediane sono segmenti interni ad un triangolo, anche il baricentro lo è (segue banalmente dal teorema seguente che, oltre a dirci che il baricentro esiste ed è unico, ci dà anche un modo "operativo" per individuarlo).

Teorema 5.31 (del baricentro)**.** *Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto, il baricentro, che divide ciascuna di esse in due parti tali che una (quella che contiene il vertice) è doppia dell'altra.*



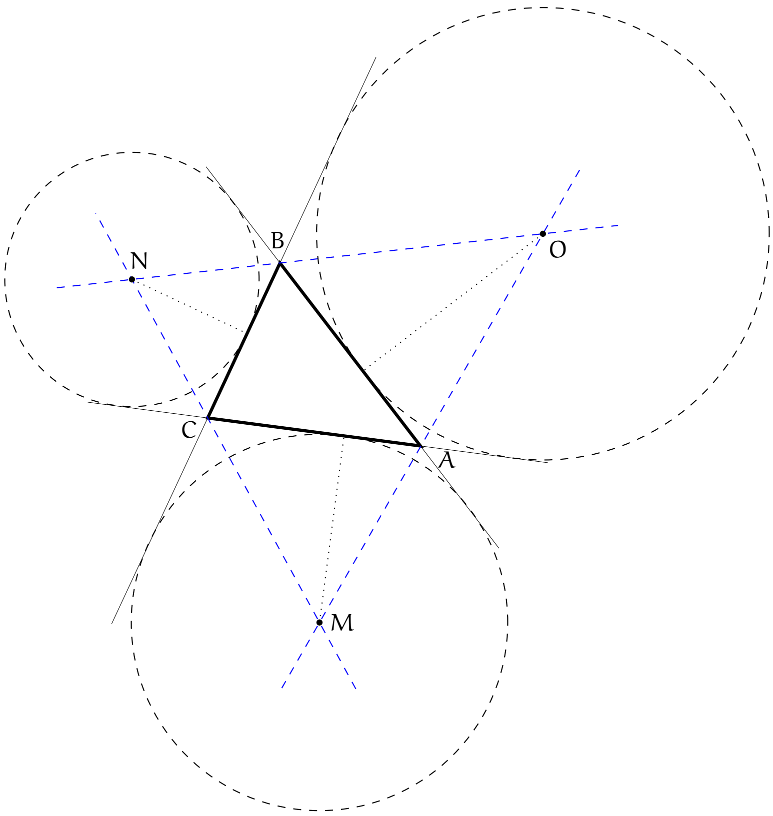
Dimostrazione. Si tratta di una delle principali conseguenze della corrispondenza di Talete, segue in particolare dal corollario riguardante i segmenti che uniscono i punti medi dei lati di un triangolo e dalle proprietà dei parallelogrammi.

Dimostriamo prima che la tesi è verificata per il punto di intersezione di due mediane, e poi dimostriamo che la terza mediana passa per quel punto. Sia ABC un triangolo. Detti D, E ed F i punti medi rispettivamente dei lati AC, BC ed AB, tracciamo le mediane AE e BD. Queste, essendo interne al triangolo, certamente si incontreranno in un punto che chiamiamo G. Chiamiamo inoltre H il punto medio del segmento AG ed M il punto medio di BG. Uniamo D con E ed H con M. Nel triangolo ABC, DE è il segmento che unisce i punti medi dei lati AC e CB, dunque è parallelo al terzo lato AB ed è congruente alla sua metà. Ma nel triangolo ABG la stessa cosa vale per HM: è il segmento che unisce i punti medi dei lati AG e GB, per cui risulta parallelo al terzo lato AB e congruente alla sua metà. Pertanto i segmenti DE ed HM sono tra loro paralleli e congruenti. Questo ci consente di affermare che il quadrilatero HMED è un parallelogramma. Inoltre, per le proprietà dei parallelogrammi, le diagonali DM ed EH si dividono scambievolmente per metà, cioè il punto G è il punto medio sia di DM sia di EH. Dunque $GH \cong GE$ e $GD \cong GM$. Ma, per come abbiamo preso i punti H ed M, risulta anche $GH \cong HA$ e $GM \cong MB$. Pertanto sono congruenti i segmenti AH, HG e GE (ognuno pari ad un terzo della mediana AE) e risultano tra loro congruenti anche i segmenti BM, MG e GD (ognuno pari ad un terzo della mediana BD). È dunque vero che BG misura il doppio di GD, come pure AG misura il doppio di GE.

Abbiamo dunque dimostrato che l'intersezione di due mediane è un punto interno al triangolo tale che divide ciascuna delle due mediane in parti che sono l'una il doppio dell'altra (quella che contiene il vertice è doppia dell'altra). A questo punto, se il ragionamento fatto per le mediane AE e BD si ripete ad esempio per AE e CF, si può affermare che CF incontra AE in un punto tale che divide ciascuna delle due in due parti tali che quella che contiene il vertice è doppia rispetto all'altra; ma tale punto su AE è già stato individuato: è il punto G. Quindi possiamo affermare che anche CF passa per il punto G ed inoltre il segmento CG è congruente al doppio del segmento GF. Questo conclude la dimostrazione del teorema del baricentro. □

5.7.5 Excentri

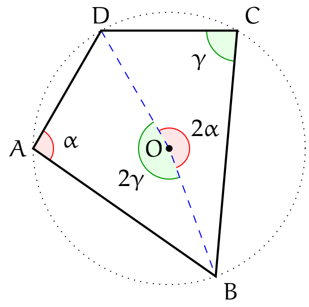
Oltre ai principali punti notevoli di un triangolo esistono altri tre punti particolari, detti *excentri*, che sono i punti di intersezione delle bisettrici degli angoli esterni. Illustriamo quanto affermato con una figura: i punti M, N e O sono gli excentri del triangolo ABC. Ricordando che la bisettrice è il luogo dei punti equidistanti dai lati di un angolo, notiamo ad esempio che il punto N, essendo l'intersezione delle bisettrici degli angoli esterni in B e C, è equidistante da BC e dai prolungamenti dei lati AC e AB: dunque è equidistante dalle rette dei tre lati del triangolo ABC. Se chiamiamo r la distanza di N da ciascuna delle rette dei tre lati di ABC, esiste una ed una sola circonferenza con centro N che ha come tangenti le rette dei tre lati, e tale circonferenza ha raggio r. Analogo discorso si può fare per gli altri due excentri, M ed O.



5.8 Proprietà dei quadrilateri inscritti e circoscritti

Per i quadrilateri, la proprietà di essere inscritto o circoscritto comporta notevoli proprietà.

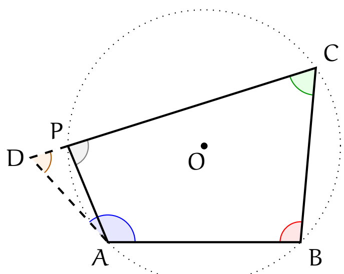
Teorema 5.32. *Se un quadrilatero è inscritto ad una circonferenza, allora la somma di due angoli opposti è uguale alla somma degli altri due, ovvero un angolo piatto.*



Dimostrazione. Consideriamo il quadrilatero $ABCD$ inscritto nella circonferenza di centro O. Dimostriamo che la somma degli angoli in A e in C è un angolo piatto. Per fare questo, tracciamo gli angoli al centro insistenti sui due archi delimitati da D e B: i rispettivi angoli alla circonferenza saranno A e C. Se chiamiamo α l'angolo in A, il relativo angolo al centro varrà α, per il teorema che lega angolo al centro e quello corrispondente alla circonferenza. Ripetiamo lo stesso procedimento per l'angolo in C, che chiamiamo γ: il corrispondente angolo al centro varrà 2γ. La somma degli angoli 2α e 2γ, ovvero l'angolo $2(\alpha+\gamma)$, forma un angolo giro, dunque la sua metà $\alpha+\gamma$ è un angolo piatto. Ma α è proprio l'angolo in A e γ è quello in C. La loro somma, come volevamo dimostrare, dà un angolo piatto. Dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è data da un angolo giro, sottraendo l'ampiezza degli angoli in A e in C, che insieme danno un angolo piatto, si ottiene l'ampiezza della somma degli angoli in B e D, dunque, anche per questi ultimi due angoli, la somma è un angolo piatto. □

Si può dimostrare che vale anche il teorema inverso: se, in un quadrilatero, la somma degli angoli opposti è uguale a un angolo piatto, allora quel quadrilatero è inscrivibile ad una circonferenza. Possiamo dunque enunciare il teorema completo.

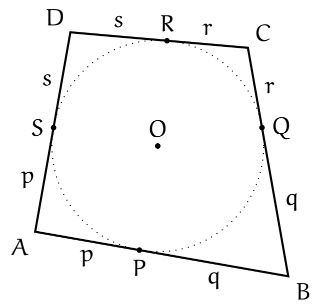
Teorema 5.33 (inverso del 5.32)**.** *Se un quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari, allora il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza.*



Dimostrazione. Si dimostra per assurdo. Supponiamo che la circonferenza passi per ABC ma intersechi il quadrilatero in un punto P diverso da D. $ABCP$ è quindi un quadrilatero inscritto in una circonferenza, e per il teorema diretto gli angoli opposti dovranno essere supplementari: $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$, $\widehat{B} + \widehat{P} = \pi$. Ma per ipotesi è anche $\widehat{B} + C\widehat{D}A = \pi$ e quindi gli angoli $C\widehat{D}A$ e $C\widehat{P}A$ devono essere congruenti in quanto supplementari dello stesso angolo $\widehat{B}$. Questo però è assurdo, in quanto avremmo che $C\widehat{D}A$, angolo esterno del triangolo ADP, sarebbe congruente ad un angolo interno non adiacente ad esso, mentre per il primo teorema dell'angolo esterno deve essere sempre maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti ad esso. Dunque anche il punto D appartiene alla circonferenza. □

Vediamo ora alcune proprietà dei quadrilateri circoscritti.

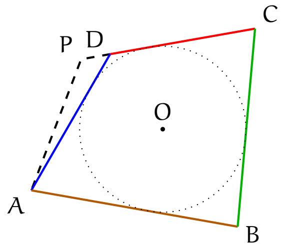
Teorema 5.34. *Se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza, allora la somma delle lunghezze di due suoi lati opposti è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.*



Dimostrazione. Sia $ABCD$ il quadrilatero circoscritto alla circonferenza di centro O, come in figura. Siano P, Q, R ed S i punti di tangenza rispettivamente dei lati AB, BC, CD e AD. Per il teorema sull'uguaglianza dei segmenti di tangente ad una circonferenza condotti da un punto esterno, si ha $AP \cong PS$, $BP \cong BQ$, $CQ \cong CR$ e $DR \cong DS$. Chiamando $AP = p$, $BQ = q$, $CR = r$ e $DS = s$ (vedi figura) si ha che $AB + CD = AP + PB + CR + RD = p + q + r + s$ e che $BC + AD = BQ + QC + DS + AS = p + q + r + s$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, risulta che $AB + CD = AD + BC$, che è proprio quanto volevamo dimostrare. □

Teorema 5.35 (inverso del 5.34)**.** *Se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, allora il quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza.*

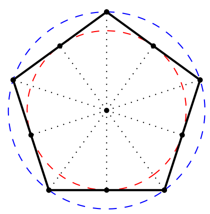
Dimostrazione. Anche questo teorema si dimostra per assurdo. Supponiamo che il quadrilatero non sia circoscrivibile. Sia $ABCD$ il quadrilatero; tracciamo una circonferenza che sia tangente ai lati AB, BC e CD; questa esiste sicuramente poiché, se prolungassimo i lati AB (dalla parte di A) e CD (dalla parte di D), si formerebbe un triangolo, e in un triangolo è sempre possibile inscrivere una circonferenza. Supponiamo che la tangente condotta da A alla circonferenza intersechi la retta CD in un punto P diverso da D, che si trovi sul prolungamento del lato CD. Allora $CP = CD + DP$. Poiché $ACBP$ è un quadrilatero circoscritto, possiamo applicare il teorema diretto: $AP + BC = AB + CD + DP$. Per ipotesi abbiamo $AB + CD = AD + BC$;



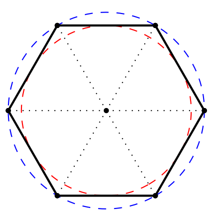
sostituiamo nella relazione precedente $AD + BC$ al posto di $AB + CD$ e otteniamo $AP + BC = AD + BC + DP$. Sottraendo ad ambo i membri BC si ha $AP = AD + DP$. Siamo giunti all'assurdo, in quanto avremmo che nel triangolo ADP un lato è uguale alla somma degli altri due, mentre deve essere sempre minore. Quindi la tesi è vera. □

5.9 Poligoni regolari

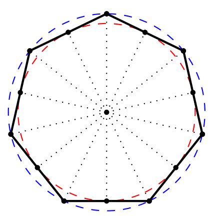
I poligoni regolari, cioè quelli che hanno tutti i lati e tutti gli angoli interni congruenti, sono sia inscrivibili sia circoscrivibili, e la circonferenza circoscritta e quella inscritta sono concentriche. Il centro comune alle due circonferenze si dice anche *centro della figura*. Nel caso di poligoni con un numero pari di lati, il centro coincide con il punto di incontro di tutte le diagonali che congiungono vertici opposti. Nel caso di poligoni con un numero dispari di lati, coincide con il punto di incontro di tutti i segmenti che uniscono un vertice al punto medio del lato opposto.



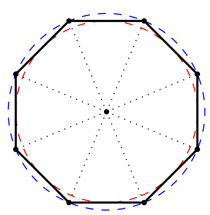
pentagono regolare



esagono regolare

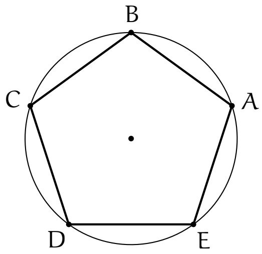


ettagono regolare



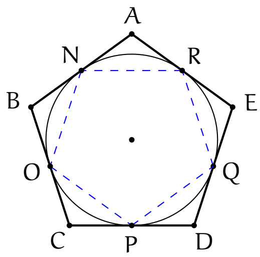
ottagono regolare

Teorema 5.36. *Se si divide la circonferenza in un numero* $n \geqslant 3$ *di archi congruenti e si congiungono gli estremi di archi consecutivi, si ottiene un poligono regolare.*



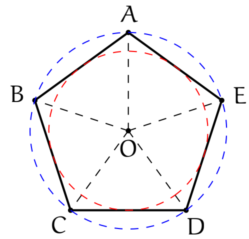
Dimostrazione. Consideriamo una circonferenza e dividiamola in 5 archi congruenti (vedi figura); otteniamo il pentagono $ABCDE$. I lati del pentagono sono tutti congruenti, in quanto corde sottese da archi congruenti, ed anche gli angoli sono tutti congruenti, in quanto inscritti in archi congruenti (si ottengono infatti sommando due archi congruenti). Dunque il pentagono ottenuto è regolare poiché ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti. □

Teorema 5.37. *Se si divide la circonferenza in un numero $n \geqslant 3$ di archi congruenti e si tracciano le tangenti alla circonferenza negli estremi di archi consecutivi, i punti intersezione di tali tangenti sono i vertici di un poligono regolare.*



Dimostrazione. Dividiamo nuovamente una la circonferenza in 5 archi congruenti, conduciamo le tangenti negli estremi degli archi; otteniamo il pentagono circoscritto $ABCDE$. Congiungiamo ora gli estremi di tali archi, ottenendo, in base a quanto dimostrato prima, il pentagono regolare inscritto $NOPQR$. Consideriamo i triangoli che si vengono così a formare; sono tutti triangoli isosceli in quanto abbiamo $A\widehat{N}R \cong A\widehat{R}N$, $B\widehat{O}N \cong B\widehat{N}O, \ldots$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco; inoltre questi angoli sono tutti congruenti tra loro in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti. Infine i lati compresi tra questi angoli sono anch'essi tutti congruenti tra loro perché lati del pentagono regolare inscritto. Dunque questi triangoli sono tutti congruenti tra loro per il secondo criterio di congruenza. Da qui possiamo dedurre che $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C} \cong \widehat{D} \cong \widehat{E}$ perché angoli al vertice di triangoli isosceli congruenti, e che $AB \cong BC \cong CD \cong DE \cong EA$ perché somme di segmenti congruenti (i lati obliqui dei triangoli isosceli). Quindi il poligono circoscritto, avendo tutti i lati e tutti gli angoli congruenti, è regolare. □

Teorema 5.38. *Ad ogni poligono regolare si può sempre circoscrivere una circonferenza ed in esso se ne può sempre inscrivere un'altra concentrica con la prima.*



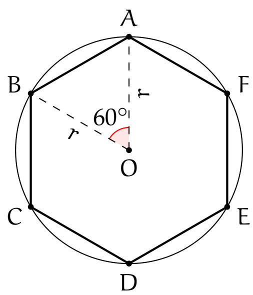
Dimostrazione. Consideriamo il pentagono regolare $ABCDE$. Tracciamo le bisettrici dei due angoli consecutivi $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ che si incontrano in un punto O. Il triangolo BOA è isoscele poiché $O\widehat{B}A \cong O\widehat{A}B$ in quanto metà di angoli congruenti, quindi sarà $BA \cong AO$. Congiungiamo ora O con il vertice E. I triangoli BOA e AOE sono congruenti per il primo criterio di congruenza, poiché hanno AO in comune, $AB \cong AE$ perché lati del poligono regolare, $B\widehat{A}O \cong E\widehat{A}O$ perché metà dello stesso angolo. Dunque avremo che $BO \cong AO \cong EO$. Congiungendo successivamente O con gli altri vertici si arriva a dimostrare in modo analogo che $BO \cong AO \cong EO \cong DO \cong CO$. Questo vuol dire che O è equidistante dai vertici del poligono ed è quindi il centro della circonferenza circoscritta.

Dimostriamo ora che $ABCDE$ è circoscritto ad un'altra circonferenza di centro O. I lati del poligono sono corde congruenti della circonferenza ad esso circoscritta, e sappiamo che corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro. Dunque O è equidistante da tutti i lati del poligono ed è perciò il centro della circonferenza inscritta. □

Definizione 5.17. Dato un poligono regolare, si chiama *raggio* il raggio della circonferenza ad esso circoscritta.

Definizione 5.18. Dato un poligono regolare, si chiama *apotema* il raggio della circonferenza ad esso inscritta.

Teorema 5.39. *Il lato dell'esagono regolare è congruente al raggio della circonferenza circoscritta.*



Dimostrazione. Disegniamo la circonferenza circoscritta di centro O e raggio r, cosa che, in base al teorema 5.38, è sempre possibile quando si tratta di un poligono regolare. Congiungiamo due vertici consecutivi dell'esagono con il centro della circonferenza e consideriamo il triangolo ABO. Questo triangolo è isoscele in quanto $AO \cong BO$ perché raggi della circonferenza.

Poiché se congiungessimo col centro O gli altri vertici del poligono otterremmo, per quanto dimostrato in precedenza, 6 triangoli congruenti, l'angolo al vertice $A\widehat{O}B$ sarà di 60° cioè 1/6 dell'angolo giro. Ma allora anche gli angoli alla base, essendo congruenti tra loro, saranno di 60° (la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto) e quindi il triangolo è equilatero. Ed essendo $AO \cong BO \cong r$, sarà anche $AB \cong r$. $\square$

5.10 Esercizi

5.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

5.1 - Luoghi geometrici

5.1. Dimostra che il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti (con il punto P in comune) è l'unione delle due rette, perpendicolari tra loro, che costituiscono le quattro bisettrici degli angoli (di vertice P) individuati dalle due rette.

5.2. Dimostra che il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da due rette parallele e distinte, r ed s, è la retta t, parallela ad entrambe, interna alla striscia di piano compresa tra r ed s, che divide la striscia in due strisce congruenti.

5.3. Dagli estremi B e C della base di un triangolo isoscele ABC condurre le perpendicolari al lato obliquo, più precisamente, per B condurre la perpendicolare ad AB, per C la perpendicolare ad AC. Detto D il punto in cui si incontrano le due perpendicolari, dimostrare che AD è asse di BC.

5.4. Nel triangolo ABC con AB maggiore di AC, condurre la bisettrice AD dell'angolo in A. Dal punto D traccia una retta che incontri AB nel punto E in modo che $A\widehat{D}C \cong A\widehat{D}E$. Dimostra che AD è asse di CE.

5.2 - Circonferenza e cerchio: definizioni e prime proprietà

5.5. Vero o falso?

a) Si chiama corda il segmento che unisce il centro della circonferenza a un suo punto $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) Si chiama diametro la corda che passa per il centro $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) Si chiama angolo alla circonferenza un angolo che ha i lati sulla circonferenza $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) Si chiama angolo al centro un angolo che ha per vertice il centro della circonferenza $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) Due corde che si trovano alla stessa distanza dal centro sono congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) L'angolo alla circonferenza è il doppio del corrispondente angolo al centro $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) Una retta è esterna a una circonferenza se la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) Due circonferenze che hanno due punti in comune si dicono concentriche $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) Una retta che passa per il centro della circonferenza è sempre secante $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
j) Una retta tangente a una circonferenza è sempre perpendicolare al raggio che passa per il punto di tangenza $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5.6. Dimostra che il luogo dei punti medi delle corde tra loro congruenti di una stessa circonferenza è una circonferenza.

5.7. Sia AB il diametro di una circonferenza. Dagli estremi del diametro si conducano due corde AC e BD tra loro parallele. Dimostra che le due corde sono congruenti e che DC è diametro.

5.8. Sia OAB un triangolo isoscele. Si tracci la circonferenza con centro in O e raggio r minore di OA. Siano C e D i punti di intersezione della circonferenza con i lati obliqui del triangolo isoscele. Dimostra che $ABCD$ è un trapezio isoscele.

5.9. Siano AB e BC due corde congruenti di una circonferenza di centro O. Dimostra che AO è bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$.

5.10. Sia AB una corda di una circonferenza ed M il suo punto medio. Sia C un punto di AM e D un punto di MB tali che AC sia congruente a BD. Condurre da C e da D le perpendicolari alla corda AB. Dimostrare che queste perpendicolari incontrandosi con la circonferenza individuano due corde congruenti.

5.11. Sia AB una corda di una circonferenza di centro O. Si prolunghi AB di un segmento BC congruente al raggio della circonferenza. Dimostrare che l'angolo $A\widehat{O}C$ è il triplo dell'angolo $A\widehat{C}O$.

5.12. Siano AB e AC due corde congruenti di una stessa circonferenza. Dimostra che il diametro passante per A è bisettrice dell'angolo alla circonferenza di arco BC.

5.13. Siano AB e CD due corde congruenti che si intersecano nel punto E. Dimostra che il diametro passante per E è bisettrice dell'angolo AEC.

5.14. Dimostra che se due corde si incontrano nel loro punto medio comune allora necessariamente le corde sono diametri.

5.15. Dimostrare che in una circonferenza di diametro AB e centro O il luogo geometrico dei punti medi delle corde con un estremo in A è la circonferenza di diametro AO.

5.16. In una circonferenza di centro O due corde, AB e BC si incontrano in un punto P interno alla circonferenza tale che OP è bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. Dimostra che AB e CD sono congruenti.

5.17. Sia AB una corda di una circonferenza di centro O e sia P il punto di intersezione tra la corda e la sua perpendicolare condotta dal centro O. Dimostra che ogni altra corda passante per P è maggiore di AB.

5.18. Sia AB il diametro di una circonferenza e CD una corda perpendicolare ad AB. Dimostra che ACD e BCD sono triangoli isosceli.

5.19. Dimostra che due corde parallele e congruenti di una stessa circonferenza sono lati del rettangolo che ha per vertici gli estremi delle corde.

5.5 - Proprietà dei segmenti di tangenza

5.20. Partendo dai due segmenti consecutivi e congruenti OA e AB costruire le due circonferenze di centro O e raggio rispettivamente OA e OB. Per il punto A si conduca la tangente alla circonferenza di raggio OA. Detti C e D i punti in cui la suddetta tangente incontra la circonferenza di raggio AB, dimostrare che $OCBD$ è un rombo.

5.21. Su una circonferenza di centro O si consideri un punto C e un diametro AB; sia t la tangente in C alla circonferenza e siano A' e B' le proiezioni su t rispettivamente di A e di B. Dimostrare che C è punto medio di $A'B'$ e che CO è congruente alla semisomma di AA' e BB'.

5.22. Una retta r taglia due circonferenze concentriche C_1 e C_2, siano A e B i punti individuati da r sulla circonferenza C_1 e C e D i punti sulla circonferenza C_2. Dimostra che AC è congruente a BD.

5.23. Un triangolo isoscele ABC di base BC è inscritto in un cerchio di raggio OC. Prolunga l'altezza BH relativa al lato obliquo AC fino a incontrare la circonferenza in D. Quali triangoli rettangoli si ottengono? Quali angoli della figura sono congruenti all'angolo in D?

5.24. Dimostrare che le tangenti a una circonferenza condotte dagli estremi di un suo diametro sono parallele tra di loro.

5.25. Nel triangolo ABC traccia le altezze AH e BK. Dimostra che la circonferenza di diametro AB passa per i punti H e K.

5.26. Date due circonferenze concentriche dimostrare che la corda staccata dalla circonferenza maggiore su una tangente alla circonferenza minore è dimezzata dal punto di tangenza.

5.27. Da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le due tangenti alla circonferenza, esse incontrano la circonferenza in A e in B. Per un punto Q della circonferenza, diverso da A e da B, e dalla parte di P, si conduce una tangente alla circonferenza, la quale incontra la tangente PA in D e la tangente PB in C. Dimostrare che $A\widehat{O}B \cong 2 \cdot D\widehat{O}C$.

5.28. Da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le tangenti alla circonferenza che risultano tangenti tra di loro, siano A e B i punti di tangenza. Sia B un punto della circonferenza tale che l'angolo in A è retto. Dimostra che AC è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{C}P$.

5.29. Dagli estremi del diametro AB di una circonferenza si conducono due corde tra loro congruenti, dimostrare che la congiungente gli altri due estremi delle corde passa per il centro della circonferenza.

5.30. Dimostra che unendo gli estremi di due corde parallele ma non congruenti si ottiene un trapezio isoscele.

5.31. Sia AB il diametro di una circonferenza, Siano C e D i punti di intersezione di una secante con la circonferenza, C il punto più vicino a B e D il punto più vicino ad A. Da A e da B si conducono le perpendicolari alla secante che la intersecano rispettivamente in H e in K. Dimostra che DH è congruente a CK.

5.32. Siano C e C' due circonferenze concentriche, il raggio di C sia doppio del raggio di C'. Da un punto P della circonferenza maggiore condurre le due tangenti all'altra circonferenza. Dimostra che il triangolo formato da P e dai punti di tangenza è un triangolo equilatero.

5.33. Per un punto P esterno a una circonferenza di centro O traccia le due tangenti alla circonferenza e indica con A e B i due punti di tangenza. Dimostra che la retta PO è asse di AB. Siano C e D i punti di intersezione della retta OP con la circonferenza. Dimostra che i triangoli ABC e ADB sono isosceli. Conduci per O il diametro parallelo alla corda AB, il prolungamento del diametro incontra le tangenti PA e PB rispettivamente in E e in F. Dimostra che PC è asse di EF. E che EA è congruente a BF.

5.34. In una circonferenza di diametro AB, dagli estremi A e B si conducano due corde parallele AC e BD. Dimostra che AC è congruente a BD e che CD è un diametro.

5.35. In una circonferenza si disegnino due corde AB e CD congruenti e incidenti in E in modo tale che $AE \cong CE$. Dimostra che gli estremi delle corde sono i vertici di un trapezio isoscele.

5.36. In una circonferenza di diametro AB si individuino due punti D e C tali che siano congruenti gli angoli al centro $A\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}C$. Dimostra che BC è congruente a BD.

5.37. Dagli estremi della corda AB di una circonferenza disegna le tangenti alla circonferenza stessa e sia C il loro punto di intersezione. Dimostra che il triangolo ABC è isoscele.

5.38. Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza. Disegna l'asse del segmento AB che interseca in D l'arco AB non contenente C. Dimostra che CD è bisettrice dell'angolo $A\widehat{C}B$.

5.39. Data una circonferenza di centro O, da un punto P tale che PO sia congruente al diametro della circonferenza si conducano le tangenti alla circonferenza e siano A e B i punti di tangenza. Siano M ed N rispettivamente i punti medi di PA e PB. Dimostra che i triangoli ABM e ABN sono congruenti.

5.40. Siano t e t' due tangenti ad una circonferenza negli estremi di un diametro AB. Sul prolungamento del diametro AB dalla parte di A prendi un punto P e da esso conduci una tangente t'' alla circonferenza. Siano R ed S i punti in cui t'' incontra rispettivamente t e t'. Dimostra che il triangolo ROS è rettangolo in O, dove O è il centro della circonferenza.

5.8 - Proprietà dei quadrilateri inscritti e circoscritti

5.41. Quali dei seguenti gruppi di angoli possono essere angoli interni di un quadrilatero inscritto in una circonferenza?

a) $\alpha = 80°$ $\beta = 60°$ $\gamma = 100°$ $\delta = 120°$;
b) $\alpha = 45°$ $\beta = 30°$ $\gamma = 45°$ $\delta = 60°$;
c) $\alpha = 185°$ $\beta = 90°$ $\gamma = 90°$ $\delta = 15°$;
d) $\alpha = 110°$ $\beta = 120°$ $\gamma = 70°$ $\delta = 60°$.

5.42. Quali dei seguenti gruppi possono essere le lunghezze dei lati di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza?

a) $a = 80$ cm $b = 60$ cm $c = 1\,000$ cm $d = 120$ cm;
b) $a = 4{,}5$ cm $b = 3$ cm $c = 4{,}5$ cm $d = 3$ cm;
c) $a = 18{,}5$ cm $b = 90$ cm $c = 0{,}5$ cm $d = 100$ cm;
d) $a = 110$ cm $b = 120$ cm $c = 130$ cm $d = 120$ cm.

5.43. Di quali delle seguenti figure esiste sempre sia la circonferenza inscritta che quella circoscritta?

a) triangolo equilatero V F
b) triangolo isoscele V F
c) triangolo rettangolo V F
d) rettangolo V F
e) rombo V F
f) trapezio isoscele V F
g) quadrato V F
h) parallelogramma V F
i) deltoide V F

5.44. Dimostra che in un triangolo la distanza tra l'ortocentro e il baricentro è il doppio della distanza tra baricentro e circocentro.

5.45. Il triangolo ABC ha le mediane BM e NC congruenti. Le diagonali si incontrano nel punto O. Dimostra che BON è congruente a COM.

5.46. Dimostra che in un esagono regolare ciascun angolo al vertice è diviso in quattro parti uguali dalle diagonali che partono da quel vertice.

5.47. Sia ABC un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O, sia DEF il triangolo equilatero simmetrico di ABC rispetto ad O. Dimostra che $AFBDCE$ è un esagono regolare.

5.48. Sia $ABCDE$ un pentagono regolare; prolunga ciascun lato del pentagono nello stesso verso di un segmento congruente al lato del pentagono. Dimostra che gli estremi dei lati prolungati formano un poligono inscrittibile e circoscrittibile.

5.49. Sia $ABCDEF$ un esagono regolare e sia G il punto di intersezione delle diagonali BE e CF. Dimostra che $ABGF$ è un rombo.

5.50. Sia P il punto di intersezione delle diagonali di un trapezio isoscele. Dimostra che il diametro passante per P della circonferenza circoscritta al trapezio è perpendicolare alle basi del trapezio.

5.51. Dimostra che in un triangolo rettangolo, la bisettrice dell'angolo retto è anche bisettrice dell'angolo formato dall'altezza e dalla mediana relative all'ipotenusa.

5.52. Dimostra che ogni parallelogramma circoscrivibile a una circonferenza è un rombo.

5.53. Una circonferenza di centro O è inscritta in un trapezio, non necessariamente isoscele, di basi AB e CD. Dimostra che gli angoli $A\widehat{O}D$ e $B\widehat{O}C$ sono retti.

5.54. Dimostra che la circonferenza inscritta e quella circoscritta a un quadrato sono concentriche.

5.55 (Olimpiadi della matematica 2005). Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB > AC$ e sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sulla retta BC si prenda D tale che H sia punto medio di BD; sia poi E il piede della perpendicolare condotta da C ad AD. Dimostrare che $EH = AH$
Suggerimenti: il triangolo ABD è isoscele su base BD quindi ldots; considerare poi la circonferenza di diametro AC a cui appartengono i punti H ed …; osservare angoli alla circonferenza … archi … corde …

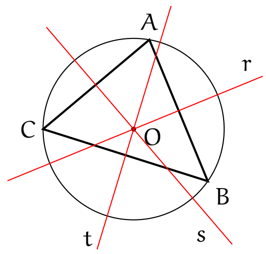
5.56 (Olimpiadi della matematica 2006). Sia $ABCD$ un quadrilatero; chiamiamo E l'intersezione (distinta da A) tra le circonferenze di diametri AB e AC ed F l'intersezione (sempre distinta da A) tra le circonferenze di diametri AC e AD. Dimostrare che: a) se l'angolo EAD è retto, allora BC è parallelo ad AD; b) se gli angoli $E\widehat{A}D$ e $F\widehat{A}B$ sono retti, allora $ABCD$ è un parallelogramma; c) se $ABCD$ è un parallelogramma, allora gli angoli $E\widehat{A}D$ e $F\widehat{A}B$ sono retti.
Suggerimenti: osservare parallelismi e ricordare il teorema di Talete.

5.57 (Olimpiadi di matematica 1998). Dato il triangolo ABC con $C\widehat{A}B - A\widehat{B}C = 90°$, detti M il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa ad AB, dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è uguale ad HM.

5.58 (Prove invalsi 2003). Un esagono regolare e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto fra un lato dell'esagono e un lato del quadrato?

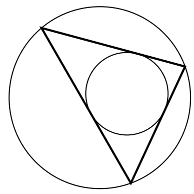
a) 2/3;
b) 3/4;
c) 1;
d) 3/2;
e) Dipende dal valore del perimetro.

5.59 (Prove invalsi 2005). Osserva la figura a lato. Quale delle seguenti affermazioni relative alla figura è falsa?



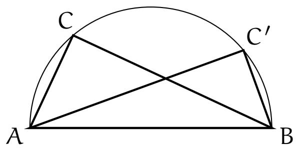
a) Il triangolo ABC è acutangolo.
b) Il punto O è l'intersezione delle altezze del triangolo ABC.
c) Le rette r, s e t sono gli assi dei lati del triangolo ABC.
d) I punti A, B e C sono equidistanti da O.

5.60 (Prove invalsi 2007). Osserva la figura. Quale delle seguenti affermazioni è vera?



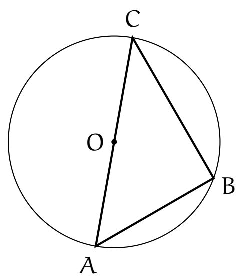
a) Il triangolo è inscritto nella circonferenza minore.
b) Il triangolo è inscritto nella circonferenza maggiore.
c) La circonferenza maggiore è inscritta nel triangolo.
d) Il triangolo è circoscritto alla circonferenza maggiore.

5.61 (Prove invalsi 2002). Osserva la figura. I due angoli $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{C'}B$ sono uguali? Quali sono le loro ampiezze in gradi?



a) Non sono uguali e $A\widehat{C}B = 90°$ e $A\widehat{C'}B = 60°$
b) Non sono uguali e $A\widehat{C}B = 60°$ e $A\widehat{C'}B = 45°$
c) Sono uguali e $A\widehat{C}B = A\widehat{C'}B = 60°$
d) Sono uguali e $A\widehat{C}B = A\widehat{C'}B = 90°$
e) Sono uguali e $A\widehat{C}B = A\widehat{C'}B = 180°$

5.62 (Prove invalsi 2003). Nella figura seguente O è il centro della circonferenza, B un punto su di essa e AC un suo diametro. Sapendo che $A\widehat{O}B = 80°$, quanto vale $C\widehat{A}B - A\widehat{C}B$?

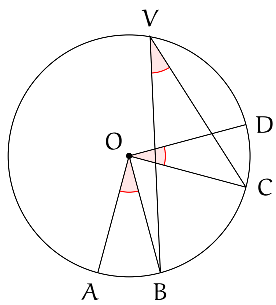


a) 5°
b) 10°
c) 15°
d) 20°
e) 40°

5.63 (Prove invalsi 2003). Qual è il massimo numero di punti che una circonferenza e i quattro lati di un quadrato possono avere in comune?

a) 2; b) 4; c) 6; d) 8; e) 10.

5.64 (Prove invalsi 2005). Osserva attentamente la figura. Sapendo che $A\widehat{O}B \cong C\widehat{O}D \cong B\widehat{V}C = \alpha$, quanto misura $A\widehat{O}D$?



a) α; b) 2α; c) 3α; d) 4α.

5.65 (Prove invalsi 2005)**.** Qual è il massimo numero possibile di punti di intersezione fra una circonferenza e un triangolo?

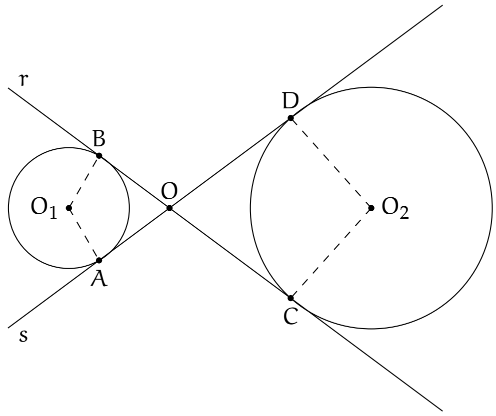
a) 6; b) 5; c) 4; d) 3;

5.66 (Prove invalsi 2005)**.** Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

a) In ogni triangolo isoscele l'altezza e la mediana relative alla base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono.
b) In ogni triangolo isoscele baricentro, incentro, ortocentro e circocentro sono allineati.
c) In ogni triangolo isoscele baricentro, ortocentro, incentro e circocentro coincidono.
d) In ogni triangolo equilatero baricentro, ortocentro, incentro e circocentro coincidono.

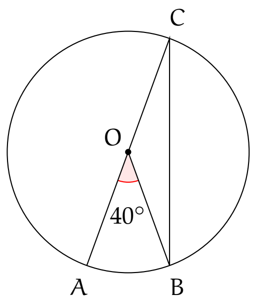
5.67 (Prove invalsi 2006)**.** Considera la figura seguente. Se le due circonferenze hanno raggi diversi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Le due circonferenze sono simmetriche rispetto al punto O.
b) Le due circonferenze sono simmetriche rispetto a ciascuna delle rette r e s.
c) $AO_1 : O_2C = OC : AO$.
d) $AO_1 : O_2C = AO : OC$.



5.68. Nella figura seguente il punto O è il punto medio del diametro AC. L'angolo $A\widehat{O}B$ misura 40°. Quanto misura l'angolo $O\widehat{B}C$?

a) 10°; b) 20°; c) 40°; d) 60°.



5.10.2 Risposte

5.5. a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V, g) V, h) F, i) V, j) V.

5.41. a, d.

5.42. d.

5.43. a) V, b) V, c) V, d) F, e) F, f) F, g) V, h) F, i) F.

5.58. a.

5.59. b.

5.60. b.

5.61. d.

5.62. b.

5.63. d.

5.64. d.

5.65. a.

5.66. a.

5.67. d.

5.68. b.

Proporzionalità e similitudine 6

"Geometria"
Foto di Ramón Peco
http://www.flickr.com/photos/desdetasmania/1606257376/

6.1 La misura

6.1.1 Classi di grandezze omogenee

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di ottenere un procedimento teorico per misurare alcuni enti geometrici come segmenti, angoli, superfici, solidi. Non è possibile invece misurare punti, rette, semirette. L'operazione del *misurare* consiste sostanzialmente nell'assegnare a una grandezza geometrica, ma non solo, un numero ben definito. Questo numero si ottiene confrontando la grandezza da misurare con una grandezza di riferimento, detta *misura campione*. Infatti, quello che ci interessa delle grandezze è il fatto di poterle confrontare tra di loro per stabilire qual è la più grande ed eventualmente effettuarne la somma. In generale, gli oggetti che ci circondano hanno delle caratteristiche: lunghezza, peso, forma, altezza, superficie, colore, temperatura, morbidezza, ... Alcune di queste caratteristiche sono confrontabili tra loro, per esempio la lunghezza di due segmenti o il peso di due corpi; altre non sono confrontabili. Le caratteristiche che si possono confrontare si dicono omogenee. Ci sono poi caratteristiche che sono additive, cioè si possono addizionare. Queste caratteristiche che hanno la peculiarità di essere confrontabili e sommabili si chiamano grandezze. Nei capitoli precedenti abbiamo visto come confrontare e sommare segmenti, confrontare e sommare angoli. Vogliamo fare la stessa cosa con gli archi di circonferenza, le superfici e i volumi. Non possiamo evidentemente confrontare e sommare punti, perché i punti sono tutti congruenti tra loro e sommando due punti non otteniamo un altro punto ma rimangono gli stessi due punti. Non possiamo confrontare rette perché sono tutte congruenti tra loro e non possiamo sommarle perché non otterremmo un'altra retta. Non possiamo per esempio sommare due triangoli. Né possiamo confrontare segmenti con angoli perché non sono grandezze omogenee, cioè non sono dello stesso tipo; non possiamo confrontare angoli con superfici perché anche questo non sono grandezze tra loro omogenee, ... Diamo ora il concetto generale di classe di grandezze.

Definizione 6.1. Un insieme di grandezze geometriche si dice che forma una *classe di grandezze* quando:

- date due qualunque grandezze, è sempre possibile confrontarle, cioè stabilire se sono uguali o, in caso contrario, quali di esse sia la maggiore e quale la minore;
- è sempre possibile definire un'operazione di somma tra grandezze che goda delle proprietà associativa e commutativa.

Le grandezze di una stessa classe si dicono tra loro *omogenee*.

A partire da questa definizione possiamo dare quella di multiplo e sottomultiplo.

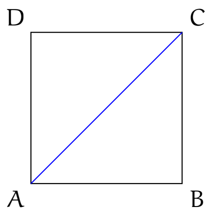
Definizione 6.2. Data una grandezza geometrica A ed un numero naturale n, la grandezza geometrica B si dice *multipla* di A secondo il numero n se è data dalla somma di n grandezze tutte uguali ad A e scriveremo $B = n \cdot A$. In questo caso A è definita grandezza *sottomultipla* di B secondo il numero naturale n e scriviamo $A = \frac{B}{n}$.

Dato un segmento AB possiamo dare un significato alla scrittura $\frac{3}{2}AB$ nel seguente modo: Il segmento AB è costituito da 3 segmenti ciascuno congruente alla metà di AB.

Definizione 6.3. Due grandezze omogenee A e B si dicono *commensurabili* quando esiste una terza grandezza C, ad esse omogenea, che è sottomultipla sia di A che di B: $A = n \cdot C$, $B = m \cdot C$. Due grandezze omogenee A e B si dicono *incommensurabili* quando non esiste una terza grandezza C, ad esse omogenea, che sia sottomultipla sia di A che di B.

L'esistenza di grandezze incommensurabili è confermata dal seguente teorema.

Teorema 6.1. *Il lato e la diagonale di un quadrato sono grandezze incommensurabili.*



Dimostrazione. La dimostrazione si sviluppa per assurdo. Con riferimento alla figura, verifichiamo che il lato AB e la diagonale AC del quadrato ABCD sono incommensurabili. Per assurdo, supponiamo che esista una grandezza U, omogenea sia al lato sia alla diagonale, che sia un sottomultiplo comune, cioè $AC = n \cdot U$ e $AB = m \cdot U$. Per il teorema di Pitagora $AC^2 = AB^2 + BC^2$ e poiché $AB = BC$ si ha $AC^2 = AB^2 + AB^2 = 2 \cdot AB^2$. Tenendo conto che $AC = n \cdot U$ e $AB = m \cdot U$ la formula precedente ci permette di affermare che $n^2 \cdot U^2 = 2m^2 \cdot U^2$. Dividendo per U^2 ambo i membri dell'uguaglianza otteniamo $n^2 = 2m^2$, dove n e m sono due numeri naturali. È abbastanza facile dimostrare che questa uguaglianza non può sussistere. Infatti, se m è un numero pari allora m^2 avrà un numero pari di fattori uguali a 2 e quindi $2m^2$ avrà un numero dispari di fattori uguali a 2, ciò implica che anche n^2 deve avere un numero dispari di fattori uguali a 2; se m è dispari allora $2m^2$ avrà un solo fattore uguale a 2 e di conseguenza non può essere uguale al quadrato di un numero n. Da cui l'assurdo che m non può essere né pari né dispari. □

Storicamente, questa è stata la prima scoperta di grandezze incommensurabili, probabilmente dovuta al Ippaso di Metaponto, matematico vissuto tra Crotone e Metaponto (Calabria e Basilicata) nel 500 a.C.circa. La tradizione dice che morì in un naufragio per aver rivelato la scoperta dell'esistenza delle grandezze incommensurabili, in contrasto con il pensiero del maestro Pitagora. Siano A e B due grandezze omogenee commensurabili, sia C la grandezza sottomultipla in comune, si avrà $A = n \cdot C$ e $B = m \cdot C$. Da cui $C = \frac{1}{n}A$ e $C = \frac{1}{m}B$. Dal confronto si ha $\frac{1}{n}A = \frac{1}{m}B$ da cui $A = \frac{n}{m}B$.

Definizione 6.4. Si dice *rapporto di due grandezze omogenee* A e B il numero razionale $\frac{n}{m}$ tale che $A = \frac{n}{m}B$.

Occorre supporre la validità dei seguenti postulati.

Postulato della divisibilità. Ogni grandezza geometrica è sempre divisibile in un numero qualunque di parti.

Postulato di Eudosso-Archimede. Date due grandezze omogenee disuguali esiste sempre una grandezza multipla della minore che supera la maggiore.

Possiamo dare ora la definizione di misura di un segmento rispetto a un altro, nel caso in cui i due segmenti sono commensurabili.

Definizione 6.5. Date due grandezze A e U tra loro commensurabili si definisce *misura di A rispetto a U* il numero razionale $\frac{m}{n}$ per il quale $A = \frac{m}{n}U$. La grandezza U viene detta *unità di misura*.

Per le definizioni precedenti, la misura di U rispetto a se stessa è evidentemente 1.

Solitamente si usa come unità di misura delle lunghezze il metro (indicato con il simbolo m), con il suo multipli (decametro dam, ettometro hm, chilometro km, ...) ed i suoi sottomultipli (decimetro dm, centimetro cm, millimetro mm, ...). Per misurare gli angoli si usa il grado che è la 360ª parte dell'angolo giro. Per misurare le superfici si usa come unità di superficie quella di un quadrato di lato 1 m (metro quadrato, indicato con il simbolo m^2) con i suoi multipli e sottomultipli. Per misurare i solidi si usa il volume di un cubo di lato 1 m (metro cubo, indicato con il simbolo m^3).

Per quanto riguarda la scrittura delle misure, in Italia valgono le seguenti norme: l'unità di misura si scrive sempre dopo il numero che la indica, tranne per le misure monetarie: si scrive 12 m e non m 12; si scrive € 12 e non 12 €. L'unità di misura non è mai seguita dal puntino e non va mai espressa al plurale.

È possibile estendere la definizione di rapporto e la conseguente definizione di misura anche per la grandezze tra loro incommensurabili, come per esempio lato e diagonale dello stesso quadrato. Il percorso però è più lungo e complesso, poiché il rapporto tra due grandezze commensurabili è sempre un numero razionale mentre il rapporto tra due grandezze incommensurabili non è un numero razionale.

Partiamo dalla definizione di classi contigue.

Definizione 6.6. Due classi di grandezze omogenee si dicono *contigue* se godono delle seguenti proprietà:

- sono *separate*: ogni grandezza della prima classe è minore di ogni grandezza della seconda classe. Vale a questo proposito il *postulato della continuità*, secondo il quale due classi di grandezze separate ammettono almeno un elemento separatore (ne esiste sicuramente uno, ma potrebbero anche essercene infiniti), cioè una grandezza che sia maggiore (o uguale) di ogni grandezza della prima classe e minore (o uguale) di ogni grandezza della seconda.
- godono della *proprietà dell'avvicinamento indefinito*: presa una grandezza ϵ, piccola a piacere, omogenea a quelle date, esiste sempre una grandezza della seconda classe ed una della prima la cui differenza sia minore di ϵ.

Per due classi di grandezze contigue vale l'*assioma di Cantor*: due classi di grandezze contigue ammettono uno e un solo elemento separatore.

Basandoci sul concetto di contiguità possiamo a questo punto definire un qualunque *numero irrazionale* come l'unico elemento separatore tra due classi contigue di numeri razionali; nella prima classe mettiamo tutti i numeri che approssimano il numero irrazionale per difetto e nella seconda quelli che lo approssimano per eccesso.

Prendendo come esempio il numero irrazionale $\sqrt{2}$ le due classi sono:

$$A: 1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad \dots$$

$$B: 2 \quad 1{,}5 \quad 1{,}42 \quad 1{,}415 \quad 1{,}4143 \quad \dots$$

Si può osservare che le due successioni sono separate, in quanto ogni numero della prima è minore di ogni numero della seconda, inoltre godono della proprietà dell'avvicinamento indefinito, in quanto è sempre possibile trovare un numero razionale appartenente ad A ed uno appartenente a B la cui differenza sia minore di un qualsiasi numero ϵ, per quanto piccolo questo si prenda. Quindi, per l'assioma di Cantor, esiste ed è unico l'unico elemento separatore di queste due successioni; possiamo identificare questo numero con la coppia di successioni e scrivere: $\sqrt{2} = (A, B)$.

Questa definizione vale non solo per i numeri irrazionali, ma anche per quelli razionali. Per esempio, la frazione $\frac{15}{4} = 3,75$ è definita dalle classi contigue:

$$A: 3 \quad 3{,}7 \quad 3{,}74 \quad 3{,}749 \quad 3{,}7499 \quad \dots$$

$$B: 4 \quad 3{,}8 \quad 3{,}75 \quad 3{,}750 \quad 3{,}7501 \quad \dots$$

Possiamo naturalmente definire in questo modo anche i numeri interi. Per esempio 5 è l'elemento separatore delle classi:

$$A: 4 \quad 4{,}9 \quad 4{,}99 \quad 4{,}999 \quad 4{,}9999 \quad \dots$$

$$B: 6 \quad 5{,}1 \quad 5{,}01 \quad 5{,}001 \quad 5{,}0001 \quad \dots$$

Concludiamo quindi affermando che un qualunque numero reale r può essere definito come l'elemento separatore di una coppia di classi numeriche contigue.

I numeri reali sono pertanto il raggruppamento di numeri razionali e irrazionali:

$$\text{Reali}\begin{cases}\text{Razionali}\begin{cases}\text{Interi}\\[1ex] \text{Frazionari}\begin{cases}\text{con decimali limitati}\\ \text{con decimali illimitati periodici}\end{cases}\end{cases}\\[4ex] \begin{array}{l}\text{Irrazionali}\\ \text{(con decimali illimitati non periodici: non possono essere scritti in forma di frazione)}\end{array}\end{cases}$$

Passiamo ora a definire la misura delle grandezze incommensurabili. Date le lunghezze incommensurabili AB e CD, poniamo

$$A = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \mid \frac{m}{n}CD < AB\right\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \mid \frac{m}{n}CD > AB\right\}.$$

Si dimostra che la coppia (A, B) è una coppia di classi contigue di $\mathbb{Q}^+$. In maniera intuitiva possiamo dire che A contiene i valori approssimati per difetto e B contiene i valori approssimati per eccesso del rapporto $\frac{m}{n}$. Chiamiamo *rapporto fra le lunghezze incommensurabili* AB e CD il numero irrazionale dato dalle classi contigue (A, B).

6.2 Proporzionalità tra grandezze

Definizione 6.7. Date quattro grandezze A, B, C e D, le prime due omogenee tra loro così come le ultime due, queste formano una *proporzione* se il rapporto delle prime due è uguale al rapporto delle ultime due. Si scrive

$$\boxed{A : B = C : D}$$

e si legge "A sta a B come C sta a D".

Definizione 6.8. In una proporzione

- il primo ed il terzo termine (A e C) si chiamano *antecedenti*;
- il secondo ed il quarto termine (B e D) si chiamano *conseguenti*;
- B e C si chiamano *medi*;
- A e D si chiamano *estremi*;
- la grandezza D si chiama *quarta proporzionale*.

Definizione 6.9. Se in una proporzione tra grandezze tutte omogenee i medi sono uguali tra loro $A : B = B : C$, la proporzione si dice *continua*, la grandezza B si chiama *media proporzionale* e la grandezza C si dice *terza proporzionale*.

Teorema 6.2 (fondamentale delle proporzioni)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro grandezze siano in proporzione è che siano in proporzione le loro misure.*

Dimostrazione. Siano A e B due grandezze omogenee, a e b le loro misure rispetto ad un'unità di misura omogenea ad A e B; C e D due grandezze anch'esse omogenee tra loro e c e d le loro misure rispetto ad un'unità di misura omogenea a C e D.

1. (condizione necessaria $\Rightarrow$)
   Dimostriamo innanzitutto che la condizione è necessaria: supposto che le quattro grandezze siano in proporzione, dimostriamo che sono in proporzione le loro misure.
   Ipotesi: $A : B = C : D$ Tesi: $a : b = c : d$.
   Applicando il teorema secondo cui il rapporto tra due grandezze è uguale al quoziente delle loro misure, avremo $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ e $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$. Ma per ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ e quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, avremo che $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, che si può anche scrivere nella forma $a : b = c : d$.
2. (condizione sufficiente $\Leftarrow$)
   Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente.
   Ipotesi: $a : b = c : d$ Tesi: $A : B = C : D$.
   Sempre dal teorema citato precedentemente, poiché $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ e $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza avremo che $\frac{a}{b} = \frac{C}{D}$, vale a dire $A : B = C : D$.

□

Ricordiamo che per la proporzionalità tra numeri vale la seguente

Proprietà 6.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro numeri siano in proporzione è che il prodotto dei medi sia uguale al prodotto degli estremi.*

6.2.1 Proprietà delle proporzioni

Grazie al teorema fondamentale delle proporzioni (teorema 6.2) possiamo trasferire le proprietà delle proporzioni tra numeri alle proporzioni tra grandezze.

1. **Proprietà dell'invertire**
   Scambiando ogni antecedente col proprio conseguente otteniamo una nuova proporzione equivalente alla precedente.
   $$A : B = C : D \;\Rightarrow\; B : A = D : C.$$
2. **Proprietà del permutare** Se le quattro grandezze sono tutte omogenee, possiamo scambiare tra loro i medi o gli estremi, ed otterremo sempre una nuova proporzione equivalente alla precedente.
   $$A : B = C : D \;\Rightarrow\; D : B = C : A.$$
3. **Proprietà del comporre** La somma delle prime due grandezze sta alla prima (o alla seconda) grandezza come la somma delle altre due sta alla terza (o alla quarta).
   $$A : B = C : D \;\Rightarrow\; (A + B) : A = (C + D) : C$$
   e
   $$A : B = C : D \;\Rightarrow\; (A + B) : B = (C + D) : D$$

4. **Proprietà dello scomporre** La differenza tra la prima e la seconda grandezza sta alla prima (o alla seconda) grandezza come la differenza tra le altre due sta alla terza (o alla quarta). Questa proprietà richiede che ogni antecedente sia maggiore del proprio conseguente. Se dunque $A > B$ e $C > D$ avremo che

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : A = (C - D) : C$$

e

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : B = (C - D) : D$$

In riferimento alla disuguaglianza precedente, va precisato che se quattro grandezze sono in proporzione, tra antecedenti e conseguenti intercorre sempre la stessa relazione, vale a dire che se la prima grandezza è uguale, maggiore o minore della seconda, anche la terza sarà uguale, maggiore o minore della quarta.

Teorema 6.4 (della quarta proporzionale)**.** *Date tre grandezze A, B e C, con A e B omogenee tra loro, esiste ed è unica una grandezza D, omogenea alla terza, che con le tre date formi una proporzione.*

Dimostrazione. Siano A, B e C tre grandezze, le prime due omogenee tra loro. Supponiamo che esista una quarta grandezza X, omogenea a C, tale che valga la proporzione $A : B = C : X$. Sostituendo alle grandezze le loro misure, per il teorema fondamentale delle proporzioni (6.2) dovrà essere $a : b = c : x$. Applichiamo ora la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche, uguagliando il prodotto dei medi a quello degli estremi $ax = bc$. Risolvendo l'equazione in x otteniamo $x = \frac{bc}{a}$, e poiché a, b e c sono diversi da zero (e positivi), in quanto misure di grandezze geometriche, quest'equazione avrà come soluzione uno e un solo numero reale (positivo), in quanto la soluzione di un'equazione di primo grado, se esiste, è unica. Questo numero reale sarà quindi la misura della quarta grandezza X, e poiché tra grandezze omogenee ad ogni numero reale corrisponde una e una sola grandezza, questa quarta proporzionale esiste ed è unica. □

6.2.2 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Consideriamo due classi di grandezze

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad \ldots$$

$$A', \quad B', \quad C', \quad D', \quad \ldots$$

Queste due classi si dicono in *corrispondenza biunivoca* quando ad ogni grandezza della prima classe corrisponde una e una sola grandezza della seconda e viceversa. Le grandezze A e A', B e B', C e C', D e D', … si dicono *corrispondenti*.

Le grandezze di queste due classi si dicono *direttamente proporzionali* quando il rapporto di due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto delle due grandezze corrispondenti della seconda classe, cioè quando valgono le proporzioni

$$A : B = A' : B' \qquad A : C = A' : C' \qquad B : C = B' : C' \qquad \ldots$$

Se poi le grandezze della prima classe sono omogenee con quelle della seconda, allora possiamo permutare i medi

$$A : A' = B : B' \qquad A : A' = C : C' \qquad B : B' = C : C' \qquad \ldots$$

e, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza, otteniamo

$$A : A' = B : B' = C : C' = \ldots = k$$

da cui segue che *il rapporto tra due grandezze corrispondenti è costante*. Questo rapporto costante è un numero detto *costante di proporzionalità*.

Se le grandezze della prima classe non fossero omogenee con quelle della seconda, dovremmo passare dalla proporzionalità tra le grandezze a quella tra le loro misure (reso sempre possibile dal teorema fondamentale delle proporzioni – 6.2), ed in questo caso sarebbe il rapporto tra le loro misure ad essere costante.

Per determinare se due classi di grandezze sono direttamente proporzionali si applica il seguente teorema

Teorema 6.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che*

- *a grandezze uguali della prima classe corrispondano grandezze uguali della seconda;*
- *alla somma di due o più grandezze della prima classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti della seconda classe.*

Dimostrazione.

- (condizione necessaria $\Rightarrow$)
  Dimostriamo che la condizione è necessaria, cioè che se le grandezze sono proporzionali, allora devono valere le due proprietà. Dette A e B due grandezze della prima classe, e A', B' le grandezze corrispondenti della seconda classe, per ipotesi avremo $A : B = A' : B'$. Se $A = B$, il loro rapporto è 1, e tale deve essere il rapporto tra A' e B', da cui segue $A' = B'$. Quindi la prima proprietà è verificata. Applichiamo ora alla proporzione data la proprietà del comporre $(A + B) : A = (A' + B') : A'$. Se C è la grandezza della prima classe tale che $C = A + B$, sostituendo nella proporzione avremo: $C : A = (A' + B') : A'$. Se C' è la grandezza che corrisponde a C, poiché per ipotesi le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali, dovrà valere anche la seguente proporzione $(A + B) : A = C' : A'$, e per l'unicità della quarta proporzionale dovrà essere $C' = A' + B'$. Anche la seconda proprietà risulta dunque verificata.
- (condizione sufficiente $\Leftarrow$)
  Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente: se valgono le due proprietà, le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali. Consideriamo due grandezze qualunque della prima classe A e B; possono essere uguali o disuguali. Se $A = B$, allora per la prima proprietà sarà pure $A' = B'$; poiché $A : B = 1$ e $A' : B' = 1$, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza dovrà essere $A : B = A' : B'$, quindi il rapporto tra due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto delle grandezze corrispondenti della seconda, e perciò le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali. Supponiamo ora A e B disuguali, sia ad esempio $A > B$. Questo vuol dire

che esiste una terza grandezza C tale che $A = B + C$. Per la seconda proprietà a $B + C$ corrisponde $B' + C'$ e per la prima proprietà ad $A = B + C$ corrisponde $A' = B' + C'$, da cui si deduce che $A' > B'$. Analogamente si dimostra che se $A < B$, allora $A' < B'$. Sempre per la seconda proprietà, moltiplicando le grandezze per uno stesso numero naturale avremo che ad $n \cdot A$ corrisponderà $n \cdot A'$ e ad $m \cdot B$ corrisponderà $m \cdot B'$. Per quanto premesso, avremo che se $n \cdot A = m \cdot B$, sarà anche $n \cdot A' = m \cdot B'$; se $n \cdot A > m \cdot B$, sarà anche $n \cdot A' > m \cdot B'$ ed infine, se $n \cdot A < m \cdot B$, ne deriverà che $n \cdot A' < m \cdot B'$. Questo vuol dire che, andando a costruire il rapporto tra le grandezze, avremo

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A'}{B'} = \frac{m}{n} \qquad \frac{A}{B} > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A'}{B'} > \frac{m}{n} \qquad \frac{A}{B} < \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A'}{B'} < \frac{m}{n}.$$

Dunque i rapporti $\frac{A}{B}$ e $\frac{A'}{B'}$ ammettono gli stessi valori approssimati per difetto o per eccesso, e quindi questi rapporti rappresentano lo stesso numero reale. Per cui, concludendo, si ha $A : B = A' : B'$.

□

6.2.3 Grandezze inversamente proporzionali

Le grandezze di due classi in corrispondenza biunivoca si dicono *inversamente proporzionali* quando il rapporto di due grandezze qualunque della prima classe è uguale al rapporto inverso delle due grandezze corrispondenti della seconda classe, cioè quando valgono le proporzioni

$$A : B = B' : A' \qquad A : C = C' : A' \qquad B : C = C' : B' \qquad \ldots$$

Se dalla proporzionalità tra le grandezze passiamo a quella tra le loro misure avremo

$$a : b = b' : a' \qquad a : c = c' : a' \qquad b : c = c' : b' \qquad \ldots$$

Applicando la proprietà fondamentale della proporzionalità tra numeri (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi) avremo

$$aa' = bb' \qquad aa' = cc' \qquad bb' = cc' \qquad \ldots$$

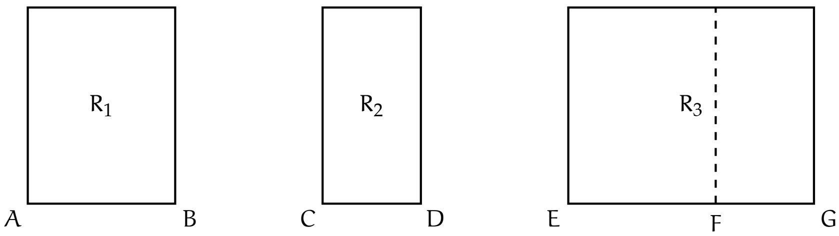
e, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza

$$aa' = bb' = cc' = \ldots = k$$

da cui segue che *il prodotto tra le misure di due grandezze corrispondenti è costante*. Anche in questo caso il prodotto costante è un numero detto *costante di proporzionalità*.

Teoremi su particolari classi di grandezze direttamente proporzionali

Teorema 6.6. *I rettangoli aventi altezze congruenti sono proporzionali alle rispettive basi.*



Dimostrazione. Consideriamo la classe di grandezze costituita da tutti i rettangoli con altezze congruenti e la classe costituita dalle rispettive basi. Queste due classi sono in corrispondenza biunivoca, in quanto ad ogni rettangolo corrisponde una ed una sola base e viceversa. Per dimostrare che queste due classi sono direttamente proporzionali applichiamo il teorema 6.5 dimostrato precedentemente. Dobbiamo cioè verificare che siano soddisfatte le due proprietà.

Prima proprietà: a grandezze uguali della prima classe devono corrispondere grandezze uguali della seconda.
Si nota facilmente che questa proprietà è sempre verificata, in quanto se si suppone che $AB = CD$, allora anche i rettangoli che hanno questi segmenti come base, avendo le altezze congruenti, saranno sicuramente congruenti.

Seconda proprietà: ad un segmento che sia la somma di due segmenti deve corrispondere un rettangolo che sia la somma di due rettangoli aventi quei segmenti come base.
Supponiamo infatti $EG = AB + CD$; prendiamo su EG il punto F che divida il segmento in due parti: $EF = AB$, $FG = CD$. Tracciando la perpendicolare in F ad EG, questa divide il rettangolo R_3 in due rettangoli rispettivamente congruenti ad R_1 e ad R_2, e quindi $R_3 = R_1 + R_2$.

Poiché dunque valgono le due proprietà richieste dal teorema, avremo che $R_1 : R_2 = AB : CD$, $R_2 : R_3 = CD : EG, \dots$ e quindi le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali. □

In modo analogo si dimostra che:

- *I rettangoli aventi basi congruenti sono direttamente proporzionali alle rispettive altezze.*
- *Gli archi di una stessa circonferenza sono direttamente proporzionali ai corrispondenti angoli al centro.*

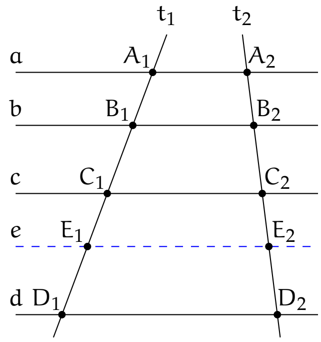
6.3 Teorema di Talete, caso generale

Teorema 6.7 (di Talete)**.** *Un fascio di rette parallele determina su due trasversali classi di segmenti direttamente proporzionali.*

Dimostrazione. Assumiamo come ipotesi di avere quattro rette parallele a, b, c e d. Dimostriamo che sono proporzione i segmenti $A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2 = A_1C_1 : A_2C_2 = B_1D_1 : B_2D_2$.

A questo scopo ricorriamo alla condizione necessaria e sufficiente sulla proporzionalità tra grandezze (teorema 6.5): condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che

- a grandezze uguali della prima classe corrispondano grandezze uguali della seconda;



- alla somma di due o più grandezze della prima classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti della seconda classe.

La prima proprietà è stata dimostrata nel capitolo 5, dove è stato esposto il teorema di Talete: a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

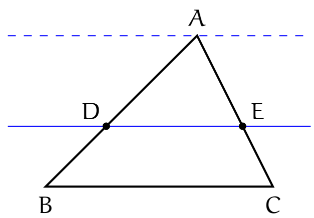
Dimostriamo allora che vale anche la seconda proprietà. Consideriamo il fascio di rette parallele tagliato da due trasversali t_1 e t_2 della figura. Abbiamo come ipotesi che $C_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ e dobbiamo dimostrare che $C_2D_2 = A_2B_2 + B_2C_2$.

Poiché $C_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1$, determiniamo al suo interno il punto E_1 che lo divide nei due segmenti $C_1E_1 = A_1B_1$ e $E_1D_1 = B_1C_1$. Tracciamo la parallela e alle rette date passante per E_1, che intersecherà la trasversale t_2 nel punto E_2. Per la prima parte del teorema, avremo che da $C_1E_1 = A_1B_1$ segue che $C_2E_2 = A_2B_2$ e da $E_1D_1 = B_1C_1$ segue che $E_2D_2 = B_2C_2$. Ma $C_2D_2 = C_2E_2 + E_2D_2 = A_2B_2 + B_2C_2$. □

6.3.1 Conseguenze del teorema di Talete

Dal teorema di Talete discendono due importanti corollari.

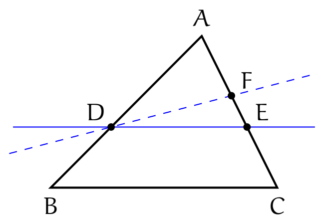
Corollario 6.8. *Una retta parallela ad un lato di un triangolo determina sugli altri due lati, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali.*



Dimostrazione. Sia ABC il triangolo in questione. Tracciamo una retta parallela al lato BC che intersechi gli altri due nei punti D ed E. Vogliamo dimostrare che $AE : AD = EC : DB$.

Tracciamo una retta passante per A e parallela a DE ed a BC. Ci troviamo così nelle condizioni di poter applicare il teorema di Talete, in quanto abbiamo tre rette parallele tagliate da due trasversali (AB ed AC), per cui possiamo scrivere la proporzione tra segmenti corrispondenti $AE : AD = EC : DB$. La stessa dimostrazione vale nel caso in cui la parallela al lato BC interseca i prolungamenti dei lati AB e AC. □

Corollario 6.9. *La retta che divide due lati di un triangolo (o i loro prolungamenti) in segmenti proporzionali è parallela al terzo lato.*



Dimostrazione. Abbiamo in ipotesi che $AE : AD = AC : AB$ e dobbiamo dimostrare che DE è parallela a BC.

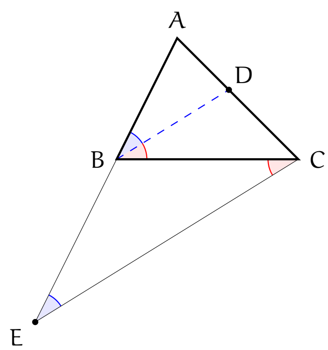
Ragioniamo per assurdo; neghiamo quindi la tesi e supponiamo che DE non sia parallela a BC. Esisterà allora un'altra retta passante per D parallela a BC; questa retta intersecherà il lato AC in un punto F. Per il corollario 6.8 avremo che $AF : AD = AC : AB$. Ma per il teorema della quarta proporzionale sappiamo che la quarta grandezza che con le tre date forma una proporzione deve essere unica, e quindi il punto F deve coincidere con E e la retta DF coincidere con la retta DE, che perciò è parallela a BC. □

Un'altra importante conseguenza del teorema di Talete è il *teorema della bisettrice*.

Teorema 6.10 (della bisettrice)**.** *La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.*

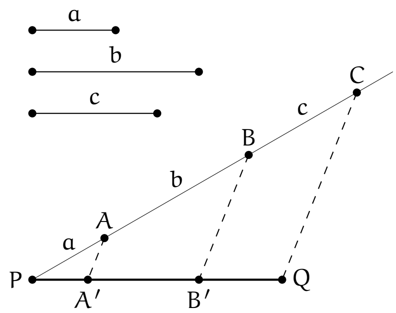
Ipotesi: $A\widehat{B}D \cong D\widehat{B}C$. Tesi: $AD : DC = AB : BC$.

Dimostrazione. Dal vertice C tracciamo la parallela alla bisettrice BD che incontra il prolungamento del lato AB in E. Notiamo le seguenti congruenze tra angoli: $A\widehat{D}B \cong B\widehat{E}C$ in quanto corrispondenti rispetto alle parallele BD ed EC tagliate da AE; $D\widehat{B}C \cong B\widehat{C}E$ in quanto alterni interni rispetto alle parallele BD ed EC tagliate da BC. Confrontando queste congruenze con quella in ipotesi ed applicando la proprietà transitiva della congruenza possiamo scrivere $B\widehat{E}C \cong B\widehat{C}E$. Dunque il triangolo BEC è isoscele e per questo ha due lati congruenti $BE = BC$. Applichiamo ora il primo corollario del teorema di Talete (corollario 6.8) al triangolo AEC. Si ha $AB : BE = AD : DC$. Per quanto appena dimostrato possiamo sostituire BC a BE ed avremo $AB : BC = AD : DC$. □



Dividere un dato segmento in parti direttamente proporzionali a più segmenti dati

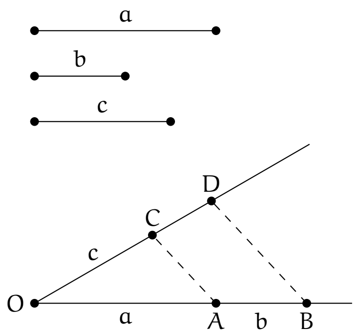
Sia PQ il segmento da dividere in parti direttamente proporzionali a tre segmenti dati a, b e c. Da un suo estremo, ad esempio P, si tracci una semiretta (non contenente Q) e su di essa si prendano i segmenti PA, AB e BC rispettivamente congruenti ad a, b e c; si unisca C con Q e si traccino per A e per B le parallele a CQ che incontrano il segmento PQ rispettivamente in A' e B'. Il segmento PQ risulta così diviso nei segmenti PA', $A'B'$ e $B'Q$ che, per il teorema di Talete, sono direttamente proporzionali ai segmenti a, b e c.



Da notare che se i segmenti dati fossero tutti fra loro congruenti, il problema equivarrebbe a quello della divisione di un dato segmento in un numero assegnato di parti congruenti.

Costruire il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati

Siano a, b, c i tre segmenti dati; si vuol costruire un segmento d tale che valga la proporzione $a : b = c : d$. Si consideri un angolo di vertice O e su un suo lato si prendano i punti A e B tali che i segmenti OA ed AB siano congruenti rispettivamente ai segmenti a e b; sull'altro lato dell'angolo si prenda il punto C tale che il segmento OC sia congruente al segmento c. Si traccino la retta AC e la parallela ad essa per B, indicando con D il punto in cui quest'ultima incontra la semiretta OC. Per il teorema di Talete il segmento CD è il quarto proporzionale richiesto.

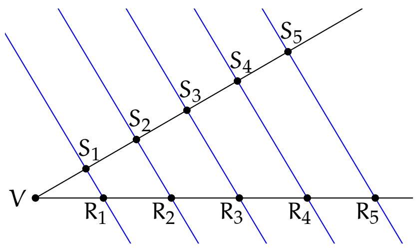


Si noti che, per il teorema della quarta proporzionale, il segmento richiesto è unico, quindi si giunge allo stesso segmento indipendentemente dall'angolo utilizzato nella costruzione.

Nel caso particolare in cui $b = c$, la costruzione appena descritta consente di trovare il segmento terzo proporzionale a due segmenti dati.

Proprietà

Dato un angolo di vertice V e lati due semirette r ed s, staccare su r il segmento VR_5 e su s il segmento VS_1, di lunghezza arbitraria. Successivamente, usando un compasso, staccare su s i segmenti S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4 e S_4S_5, tutti congruenti a VS_1. Dimostrare che, tracciando la retta per R_5S_5 e le corrispondenti parallele per S_1, S_2, S_3 ed S_4, il segmento VR_5 risulta suddiviso in parti uguali.



Osservando che questo procedimento può essere esteso per induzione a qualunque numero finito di segmenti, si può constatare che la divisibilità di un segmento in parti uguali non è un postulato autonomo, ma una proprietà intrinseca della geometria euclidea.

6.4 Avere la stessa forma

Osserviamo le coppie di figure rappresentate a lato e cerchiamo di capire cosa intendiamo dire quando affermiamo che due figure hanno la stessa forma.

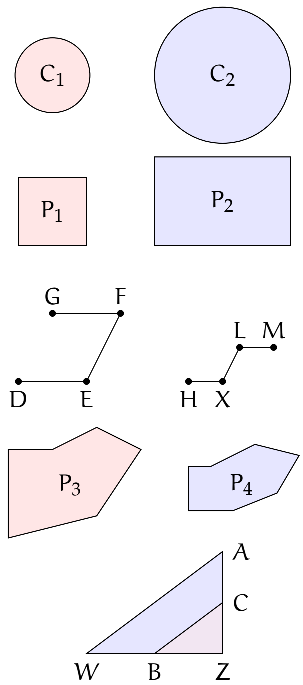
I due cerchi C_1 e C_1 hanno certamente la stessa forma.

I poligoni P_1 e P_2 hanno gli angoli rispettivamente congruenti, ma non possiamo dire che abbiano la stessa forma.

I segmenti di HKLM sono rispettivamente la metà dei segmenti di DEFG, ma anche in questo caso non possiamo dire che i due disegni abbiano la stessa forma: gli angoli formati dai segmenti non sono rispettivamente congruenti.

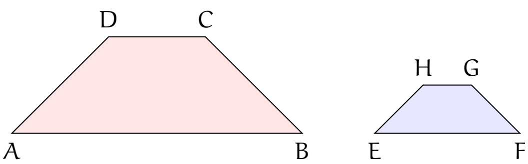
I poligoni P_3 e P_4 non hanno la stessa forma, addirittura non hanno lo stesso numero di lati.

I triangoli AWZ e BCZ hanno la stessa forma. Hanno gli angoli rispettivamente congruenti. Inoltre, essendo B punto medio di WZ e C punto medio di AZ, i lati di BCZ sono ciascuno la metà dei corrispondenti lati del triangolo AWZ, anche il lato BC che congiunge i punti è la metà di AW, per un teorema che hai già studiato; in definitiva, il rapporto tra BC e WA, tra BZ e WZ, tra CZ e AZ è sempre di 1 a 2; i lati sono quindi in proporzione $AZ : CZ = WZ : BZ = AW : BC$.



Definizione 6.10. Due poligoni P e Q aventi angoli rispettivamente congruenti e lati in proporzione si dicono *simili* e scriviamo $P \sim Q$.

Nella figura precedente, i due triangoli AWZ e CBZ sono simili. Sono simili anche i due trapezi della figura a lato, hanno infatti gli angoli congruenti e i lati in proporzione: i lati del primo trapezio sono tutti il doppio di quelli del secondo trapezio.



Definizione 6.11. Si chiamano *omologhi* sia i vertici degli angoli rispettivamente congruenti sia i lati e le diagonali che congiungono vertici omologhi. Si chiama *rapporto di similitudine* il rapporto tra due lati omologhi.

Relativamente ai due trapezi della figura precedente:

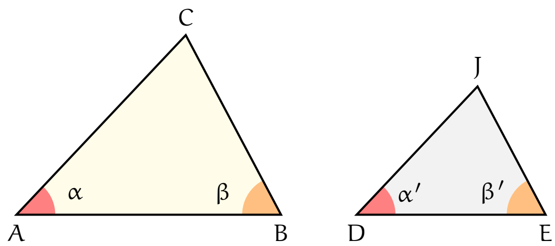
- sono vertici omologhi A ed E; . . . e . . . ; . . . e . . . ; . . . e . . . ;
- sono lati omologhi DC e HG; . . . . . . e . . . . . . ; . . . . . . e . . . . . . ; . . . . . . e . . . . . . ;
- sono diagonali omologhe . . . . . . e . . . . . . ; . . . . . . e . . . . . . ;
- il rapporto di similitudine è . . . . . .

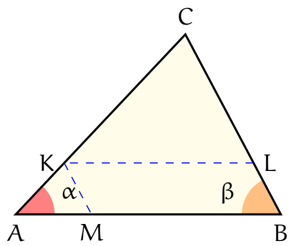
❑ **Osservazione** Se due poligoni sono congruenti allora sono anche simili con rapporto di similitudine 1.

6.5 La similitudine nei triangoli

La definizione di triangoli simili non si differenzia da quella data per i poligoni. Per i triangoli, però, esistono dei teoremi, detti criteri, che permettono di verificare se due triangoli sono simili restringendo le verifiche da effettuare.

Teorema 6.11 (1° criterio di similitudine)**.** *Due triangoli aventi due angoli rispettivamente congruenti sono simili.*



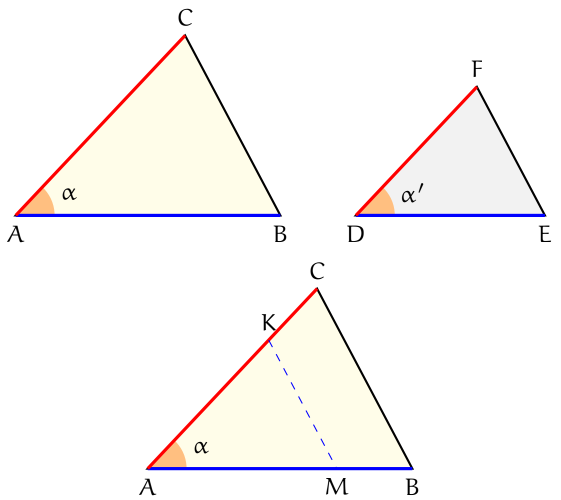


Dimostrazione. Osserviamo che se due triangoli hanno due angoli congruenti, per il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo, avranno anche il terzo angolo congruente. Nella figura, i due triangoli ABC e DEJ hanno $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ di conseguenza $\widehat{C} \cong \widehat{J}$. Vogliamo dimostrare che i due triangoli hanno anche i lati in proporzione.

Se $DJ = AC$ i due triangoli sarebbero congruenti per il secondo criterio di congruenza, in quanto hanno un lato e i due angoli adiacenti rispettivamente congruenti, dunque anche simili, il rapporto di similitudine sarebbe 1. Esaminiamo allora il caso $DJ \neq AC$, in particolare $DJ < AC$. Su AC fissiamo un punto K in modo che $CK = DJ$ e tracciamo da questo la parallela al lato AB che incontra CB in L; il triangolo CKL risulta congruente al triangolo DJE avendo $CK \cong DJ$, $\widehat{K} \cong \widehat{D}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{J}$. Inoltre per il teorema di Talete possiamo scrivere la proporzione $CA : CK = CB : CL$. Se tracciamo da K la parallela al lato CB che incontra AB in M, per il teorema di Talete si ha $CA : CK = AB : MB$. Per costruzione $KLBM$ è un parallelogramma, quindi $KL = MB$ e sostituendolo nella precedente proporzione otteniamo $CA : CK = AB : KL$. Confrontando le proporzioni ottenute possiamo scrivere $CA : CK = AB : KL = CB : CL$ e dalla congruenza tra i triangoli CKL e DJE concludiamo che $CA : DJ = AB : DE = CB : JE$. □

Teorema 6.12 (2^o criterio di similitudine)**.** *Due triangoli aventi due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso congruente sono simili.*

Ipotesi: $AC : DF = AB : DE$, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$. Tesi: $B \cong E$, $C \cong F$, $CB : FE = AB : DE$.



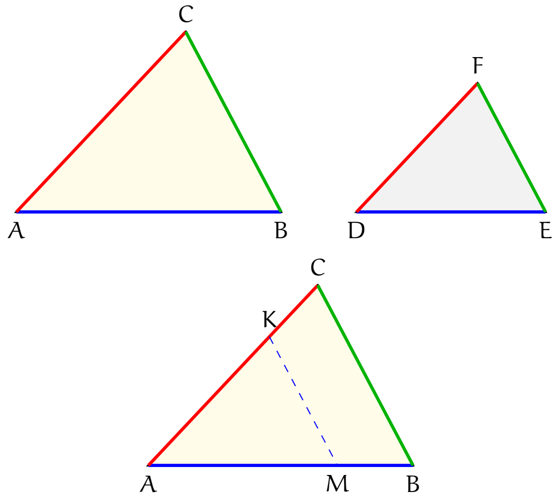
Dimostrazione. Se $DF = AC$, dalla proporzione in ipotesi $AC : DF = AB : DE$ si avrebbe $DE \cong AB$ e i due triangoli sarebbero congruenti per il primo criterio di congruenza, pertanto anche simili. Supponiamo $AC > DF$; su AC fissiamo un punto K in modo che $AK = DF$, da K tracciamo la parallela a CB che incontra AB in M. Si ha che $\widehat{M} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{K} \cong \widehat{C}$ perché corrispondenti delle rette parallele KM e CB rispettivamente con trasversale AB e AC, dunque AMK e ABC sono simili per il primo criterio di similitudine, quindi $AB : AM = AC : AK = CB : KM$.

Confrontiamo i primi due rapporti con l'ipotesi. $AK = DF$ per costruzione, quindi $AM = DE$ poiché la grandezza quarta proporzionale dopo tre date è unica. I due triangoli AKM e DFE risultano congruenti avendo $AK = DF$ per costruzione, $AM = DE$ per averlo dimostrato, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$. Di conseguenza i due triangoli hanno anche gli altri elementi congruenti, cioè $KM = DE$, $\widehat{M} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{K} \cong \widehat{F}$. Dai risultati ottenuti possiamo concludere che $AB : DE = AC : DF = BC : FE$. □

Teorema 6.13 (3^o criterio di similitudine)**.** *Due triangoli aventi i lati in proporzione sono simili.*

Ipotesi: $AC : DF = AB : DE = CB : EF$. Tesi: $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$.

Dimostrazione. Se $DF = AC$, dall'ipotesi si avrebbe anche $DE = AB$ e $FE = CB$, i due triangoli sarebbero allora congruenti per il terzo criterio di congruenza e dunque anche simili. Supponiamo $AC > DF$; su AC fissiamo un punto K in modo che $AK = DF$ e da questo tracciamo la parallela a CB che incontra AB in M ottenendo $\widehat{M} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{K} \cong \widehat{C}$ perché corrispondenti delle rette parallele KM e CB rispettivamente con trasversale AB e AC. Per il 1^o criterio di similitudine $ABC \sim AKM$, possiamo allora scrivere $AC : AK = AB : AM = CB : KM$; confrontandola con la proporzione nell'ipotesi e tenendo presente la costruzione effettuata



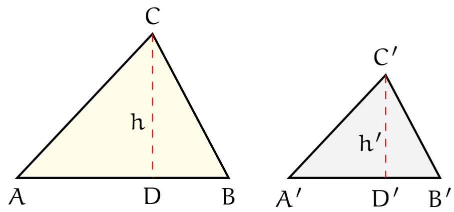
e l'unicità della quarta proporzionale, si deducono le congruenze $AM = DE$ e $KM = EF$. Pertanto risulta $AMK \cong DEF$ per il 3º criterio di congruenza e dunque anche $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{M} \cong \widehat{E}$, $\widehat{K} \cong \widehat{F}$; quindi anche $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$. □

6.5.1 Proprietà dei triangoli simili

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato che in due triangoli simili, il rapporto tra due lati omologhi è uguale

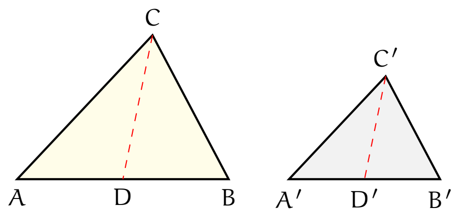
- al rapporto tra le rispettive altezze;

Ipotesi: $ABC \sim A'B'C'$, $CD \perp AB$, $C'D' \perp A'B'$
Tesi: $AB : A'B' = CD : C'D'$



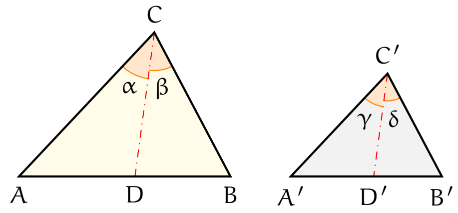
- al rapporto tra le rispettive mediane;

Ipotesi: $ABC \sim A'B'C'$, $AD \cong DB$, $A'D' \cong D'B'$
Tesi: $AB : A'B' = CD : C'D'$



- al rapporto tra le bisettrici uscenti da due vertici omologhi.

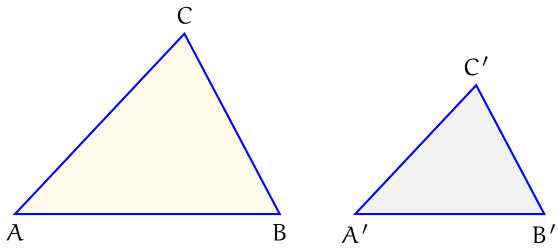
Ipotesi: $ABC \sim A'B'C'$, $\alpha \cong \beta, \gamma \cong \delta$
Tesi: $AB : A'B' = CD : C'D'$



Ricordiamo che il rapporto di similitudine è il rapporto tra due lati omologhi.

Teorema 6.14. *Il rapporto tra i perimetri di due triangoli simili è uguale al rapporto di similitudine.*

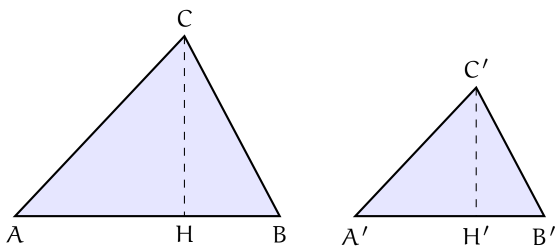
Ipotesi: $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$. Tesi: $2p : 2p' = AB : A'B'$.



Dimostrazione. Dall'ipotesi, applicando la proprietà del comporre si ha $(AB + AC + BC) : AB = (A'B' + A'C' + B'C') : A'B'$ e permutando i medi si ottiene la tesi $(AB + AC + BC) : (A'B' + A'C' + B'C') = AB : A'B'$. □

Teorema 6.15. *Il rapporto tra le aree*[1] *di due triangoli simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.*

Ipotesi: $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$. Tesi: $A_{ABC} = A_{A'B'C'} = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$.



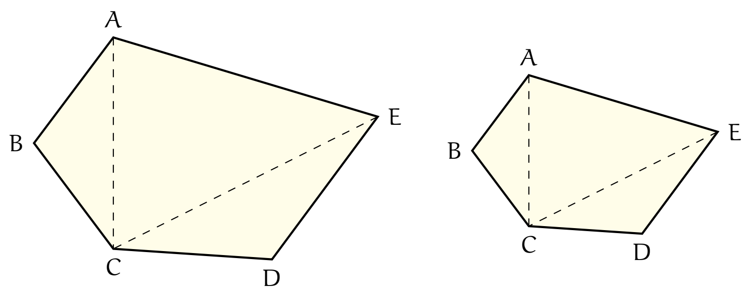
[1]una definizione più rigorosa dell'area di un poligono verrà data nel capitolo seguente.

Dimostrazione. Prendiamo come riferimento la figura, sappiamo che $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH}$ e $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}$ quindi $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \dfrac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}}$. Per quanto stabilito al primo punto di questo paragrafo, il rapporto tra le altezze è uguale al rapporto tra le basi: $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$. □

6.6 Similitudine tra poligoni

Teorema 6.16. *Dati due poligoni simili, le diagonali uscenti da uno stesso vertice li decompongono in triangoli ordinatamente simili.*

Ipotesi: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$. Tesi: $ABC \sim A'B'C'$; $ACE \sim A'C'E'$; $ECD \sim E'C'D'$.



Dimostrazione. Ricordiamo che due poligoni si dicono simili se hanno tutti gli angoli congruenti e tutti i lati ordinatamente in proporzione. Consideriamo, ad esempio, i due pentagoni simili della figura; tracciamo le diagonali CE, CA e le corrispondenti $C'E'$, $C'A'$. Confrontiamo i triangoli ABC e $A'B'C'$; essi sono simili per il secondo criterio in quanto hanno due lati in proporzione $AB : A'B' = BC : B'C'$ e l'angolo in B congruente a quello in B'. Possiamo quindi scrivere la proporzione tra i lati omologhi $AB : A'B' = AC : A'C'$ e dedurre che $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$. Dalla similitudine dei due poligoni deduciamo che $C\widehat{A}E \cong C'\widehat{A'}E'$ perché differenze di angoli congruenti, e dalla proporzione $AB : A'B' = AE : A'E'$, confrontata con la precedente, deduciamo la proporzione $AC : A'C' = AE : A'E'$. Consideriamo a questo punto i triangoli ACE e $A'C'E'$; anch'essi sono simili per il secondo criterio. Ragionando in modo analogo si dimostra la similitudine dell'ultima coppia di triangoli. □

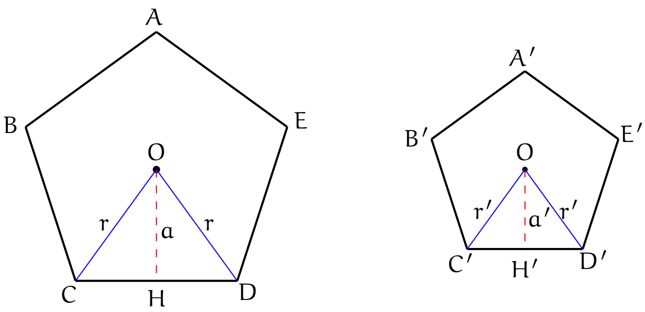
6.6.1 Similitudine tra poligoni regolari

Ricordiamo che un poligono si definisce regolare quando ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti e che la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due. Sono poligoni regolari il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare, … Pertanto, affinché due poligoni regolari siano simili è sufficiente che abbiano lo stesso numero di lati. Difatti, due poligoni regolari con lo stesso numero di lati avranno tutti gli angoli congruenti tra loro ed i lati in proporzione, in quanto il rapporto tra due lati omologhi qualsiasi sarà sempre lo stesso.

Teorema 6.17. *I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno tra loro come i rispettivi raggi e come i rispettivi apotemi.*

Ricordiamo che si chiama raggio di un poligono regolare il raggio della circonferenza ad esso circoscritta e che si chiama apotema il raggio della circonferenza ad esso inscritta. Poiché in un poligono regolare è sempre possibile inscrivere una circonferenza e circoscriverne un'altra (vedi i teoremi dimostrati nel capitolo 5), questo teorema vale per tutti i poligoni regolari con lo stesso numero di lati e quindi simili.

Consideriamo, ad esempio, due pentagoni regolari: $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$
Ipotesi: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.
Tesi: $2p : 2p' = r : r'$, $2p : 2p' = a : a'$ (dove r ed r' sono i raggi, a e a' gli apotemi).



Dimostrazione. Innanzitutto ricordiamo che in due poligoni simili i perimetri stanno tra loro come due lati omologhi, quindi avremo ad esempio che

$$2p : 2p' = CD : C'D' \tag{6.1}$$

Congiungiamo il centro O della circonferenza (sia di quella inscritta sia di quella circoscritta) con i due vertici C e D e congiungiamo O' con i vertici C' e D'. I triangoli isosceli COD e $C'O'D'$ sono simili, in quanto l'angolo in O è congruente all'angolo in O' (entrambi sono un quinto dell'angolo giro) e gli angoli alla base sono congruenti perché ciascuno è metà di un angolo congruente, quindi, per il primo criterio di similitudine, sono simili. Possiamo allora scrivere la proporzione $CD : C'D' = CO : C'O'$. Poiché $CO = r$ e $C'O' = r'$; tenendo presente la (6.1) ed applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza possiamo dunque scrivere $2p : 2p' = r : r'$. Abbiamo così dimostrato che i perimetri dei due poligoni stanno tra loro come i rispettivi raggi.

Ora applichiamo ai due triangoli simili COD e $C'O'D'$ il teorema secondo cui in due triangoli simili le altezze sono proporzionali alle rispettive basi $OH : O'H' = CD : C'D'$. Applicando anche questa volta la proprietà transitiva della congruenza e ponendo $OH = a$ e $O'H' = a'$, avremo $2p : 2p' = a : a'$. Quindi i perimetri dei due poligoni stanno tra loro come i rispettivi apotemi. □

Il lettore dimostri da solo, ricorrendo ai teoremi precedenti, che le aree di due poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno tra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi raggi o apotemi.

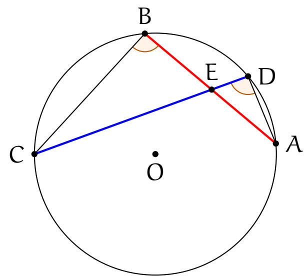
6.7 Proprietà di secanti e tangenti ad una circonferenza

Osserviamo che in una circonferenza, due corde possono intersecarsi internamente al cerchio o esternamente.

Teorema 6.18 (delle corde)**.** *Se due corde di una circonferenza si incontrano in un punto interno al cerchio allora le due corde restano divise in modo che le parti di una siano i medi e le parti dell'altra gli estremi della stessa proporzione.*

Ipotesi: AB e CD sono due corde che si intersecano in E. Tesi: $EB : ED = EC : EA$.

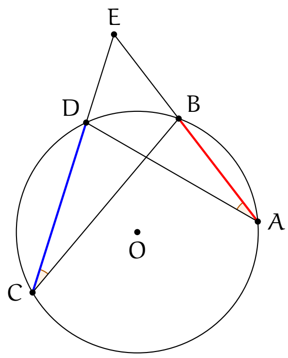
Dimostrazione. Dovendo arrivare ad una proporzione tra segmenti, cercheremo di individuare la similitudine tra due triangoli; a questo scopo congiungiamo B con C e A con D. Consideriamo i triangoli ...... ed ...... Essi hanno: ...... $\cong$ ...... perché opposti al vertice, $C\widehat{B}A \cong C\widehat{D}A$ perché insistono .... Dunque risultano simili per il primo criterio di similitudine. Quindi, individuati i lati omologhi, possiamo scrivere la proporzione $BC : DA = EB : ED = EC : EA$. □



Teorema 6.19 (delle secanti)**.** *Se da un punto esterno a un cerchio si conducono due secanti alla circonferenza, allora un'intera secante e la sua parte esterna formano i medi e l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una stessa proporzione.*

Ipotesi: AB e CD sono due corde che si intersecano in E esterno alla circonferenza.
Tesi: $EC : ED = EA : EB$.

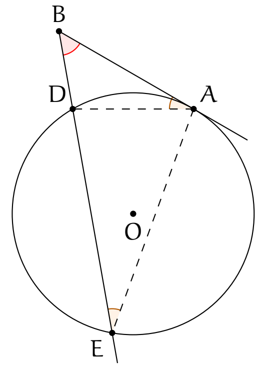
Dimostrazione. Dovendo determinare una proporzione tra segmenti, cercheremo di individuare la similitudine tra due triangoli; a questo scopo congiungiamo B con C e A con D. I triangoli EBC ed EAD sono simili perché hanno: $B\widehat{E}C \cong D\widehat{E}A$ in comune, $B\widehat{C}E \cong D\widehat{A}E$ perché insistono sullo stesso arco DB. Risultano quindi simili per il primo criterio di similitudine. Possiamo allora scrivere la proporzione tra i lati $EC : ED = EA : EB$. □



Teorema 6.20 (della secante e della tangente)**.** *Se da un punto esterno a un cerchio si conduce una secante e una tangente alla circonferenza, allora il segmento di tangente è medio proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna alla circonferenza.*

Ipotesi: B punto esterno alla circonferenza, BA tangente in A, BE secante in D ed E.
Tesi: $BE : BA = BA : BD$.

Dimostrazione. Dovendo determinare una proporzione tra segmenti, cercheremo di individuare la similitudine tra due triangoli; a questo scopo congiungiamo A con E e A con D e consideriamo i triangoli EBA e DBA. Essi hanno $E\widehat{B}A \cong D\widehat{B}A$ perché coincidenti, $B\widehat{E}A \cong D\widehat{B}A$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC. I due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine. Individuati i lati omologhi si può scrivere la proporzione $BE : BA = BA : BD$. □



6.8 La sezione aurea

Definizione 6.12. La *sezione aurea* di un segmento AB è quella parte AC del segmento media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente CB.

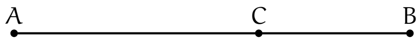


FIGURA 6.1: AC è la sezione aurea del segmento AB

In riferimento alla figura 6.1 si ha $AB : AC = AC : CB$.

6.8.1 Il punto di vista algebrico

Dato un qualunque segmento AB di misura a, è sempre possibile determinare su di esso il punto C tale che valga la proporzione $AB : AC = AC : CB$?

La risposta è affermativa. Infatti, poniamo $\overline{AC} = x \Rightarrow \overline{CB} = a - x$ e riscriviamo la proporzione passando alle misure: $a : x = x : (a - x)$. Per la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche si ottiene $x^2 = a(a - x)$, da cui sviluppando i calcoli si ha l'equazione di secondo grado $x^2 + ax - a^2 = 0$ che ha discriminante $5a^2$, positivo per qualunque a. Quindi l'equazione ammette due soluzioni, di cui una negativa che va scartata. Rimane la soluzione $x = a\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, positiva poiché $a > 0$.

6.8.2 Il punto di vista geometrico

Possiamo determinare la sezione aurea di un segmento con una costruzione geometrica?

La risposta è positiva. La costruzione che riportiamo è quella di Eulero, che sfrutta il teorema della tangente e della secante. La costruzione, riportata in figura 6.2, si compone dei passi passi sotto descritti (per riprodurla si può anche utilizzare un software di geometria dinamica come *Geogebra*):

1. si disegni un segmento AB;
2. si tracci la retta p, perpendicolare ad AB e passante per B;
3. si disegni la circonferenza γ_1 di centro B e raggio AB;

4. sia H uno dei punti di intersezione della retta p con γ_1;
5. sia M il punto medio di BH;
6. si disegni la circonferenza γ_2 di centro M e raggio MB;
7. si tracci la retta AM;
8. siano P ed E i punti di intersezione della retta AM con la circonferenza γ_2 (sia P quello più vicino ad A);
9. si tracci la circonferenza γ_3 di centro A e raggio AP;
10. sia C il punto di intersezione di γ_3 con AB.

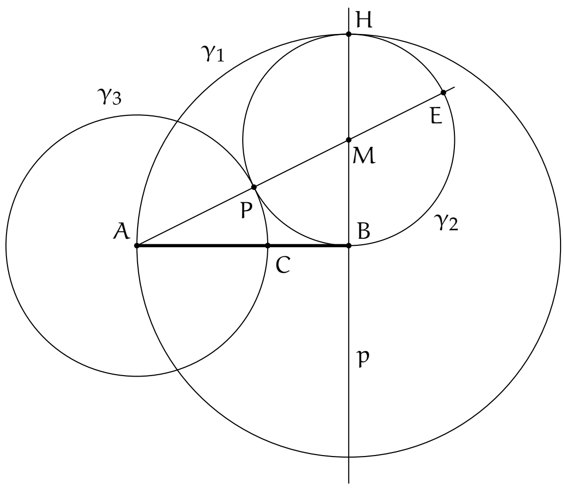


FIGURA 6.2: Costruzione della sezione aurea AC di AB

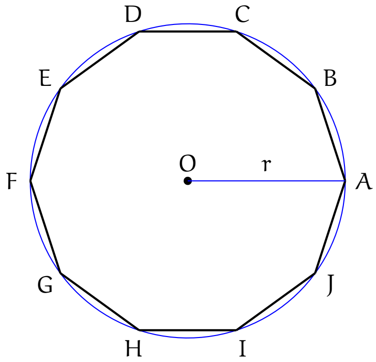
Dimostriamo che il segmento AC così costruito è la sezione aurea del segmento AB.

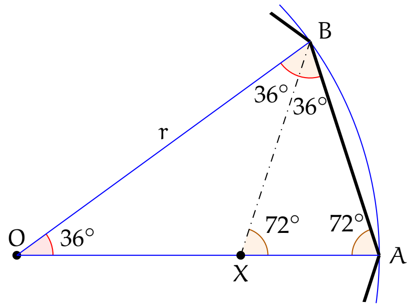
Dimostrazione. Per costruzione risulta AB tangente a γ_2 e AE secante, quindi per il teorema della tangente e della secante si ha: $AE : AB = AB : AP$; per la proprietà dello scomporre $(AE - AB) : AB = (AB - AP) : AP$. Per costruzione si sa che: $AB \cong HB \cong PE$ e quindi $AE - AB \cong AE - PE \cong AP$. Dal momento che $AP \cong AC$ si ottiene $AB - AP \cong AB - AC \cong CB$. Sostituendo nella proporzione $(AE - AB) : AB = (AB - AP) : AP$ si ottiene la proporzione $AP : AB = CB : AP$. E infine, applicando la proprietà dell'invertire, si ottiene la tesi $AB : AC = AC : CB$. □

Teorema 6.21. *Il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza ad esso circoscritta.*

Detto OA il raggio della circonferenza e AB il lato del decagono regolare, si deve dimostrare che: $OA : AB = AB : (OA - AB)$.

Dimostrazione. Quando si congiungono i vertici di un poligono regolare con il centro della circonferenza (inscritta o circoscritta) si ottengono tanti triangoli isosceli quanti sono i lati, e questi triangoli sono tutti congruenti tra loro. Consideriamo, per il decagono regolare, uno solo di questi triangoli, per esempio AOB. L'angolo in O vale $36°$ (è infatti un decimo dell'angolo giro), quindi gli angoli alla base varranno ciascuno $\dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$.

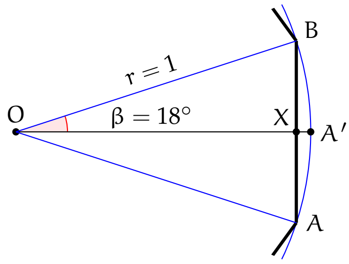




Tracciamo la bisettrice BX dell'angolo $A\widehat{B}O$. Si ottiene il triangolo OBX che è isoscele in quanto ha due angoli di 36°, ed il triangolo AXB anch'esso isoscele poiché ha due angoli di 72° (l'angolo $A\widehat{B}X$ e l'angolo $A\widehat{X}B$). Quindi avremo $BX \cong OX \cong AB$. Inoltre, i triangoli AOB e ABX sono simili in quanto hanno gli angoli rispettivamente congruenti. Si può quindi scrivere la proporzione $OA : AB = AB : AX$, dove il primo AB è il lato obliquo del triangolo ABX e il secondo AB è la base di AOB. Abbiamo così dimostrato il teorema, in quanto AX è congruente a $OA - OX \cong OA - AB$ ($OA \cong OB$ perché raggi della stessa circonferenza, $OX \cong AB$ per quanto dimostrato precedentemente). □

Sostituendo alle grandezze le loro misure, chiamando ad esempio r il raggio della circonferenza circoscritta ed l il lato del decagono regolare, la proporzione diventa $r : l = l : (r - l)$. Moltiplicando tra loro gli estremi ed i medi, si ha $l^2 = r^2 - rl \Rightarrow l^2 + rl - r^2 = 0$. Risolvendo l'equazione rispetto ad l si ha $l = \dfrac{-r \pm r\sqrt{5}}{2}$, tenendo conto che è accettabile solo la lunghezza positiva, si ottiene $l = r\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Un'importante applicazione di questo teorema è il calcolo del valore del seno dell'angolo di 18°. Considerando la circonferenza goniometrica (di raggio unitario), se poniamo l'angolo di 36° col vertice nell'origine degli assi, questo verrà dimezzato dall'asse x e di conseguenza verrà dimezzato anche il lato opposto (abbiamo infatti un triangolo isoscele in cui la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana relativa alla base). Il seno di 18° corrisponde alla lunghezza di XB, che è quindi metà del lato del decagono regolare, perciò vale $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.



6.9 Esercizi

6.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

6.1 - La misura

6.1. Vero o falso?

a) Date due grandezze A e B è sempre possibile stabilire qual è la più grande $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) Due grandezze geometriche si dicono commensurabili quando esiste una terza grandezza che è sottomultipla comune alle altre due $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) Un qualunque numero razionale può essere definito come elemento separatore di due classi numeriche contigue $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) La misura di un segmento è un segmento $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) la diagonale di un quadrato è incommensurabile con il lato $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

6.2. L'insieme delle ampiezze degli angoli rappresenta una classe di grandezze omogenee? Giustifica la risposta.

6.3. Disegna un segmento AB a piacere, costruisci poi il segmento $CD = \frac{3}{5}AB$.

6.4. Qual è il rapporto tra i segmenti AB e CD rappresentati in figura 6.3? Indica nel disegno quale può essere l'unità di misura comune ad entrambi.

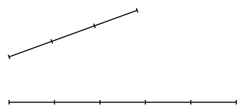


FIGURA 6.3: Esercizio 6.4

6.5. Disegna due segmenti AB e CD per i quali valga il rapporto $\frac{3}{2}AB = \frac{2}{3}CD$.

6.6. È possibile che due angoli siano tra loro incommensurabili?

6.7. È possibile che i perimetri di due quadrati siano tra loro incommensurabili? Fai un esempio.

6.8. In quali casi le due grandezze A e B sono incommensurabili?

a) $A = \frac{1}{3}B$; b) $A = 1{,}3B$; c) $A = 1{,}\overline{3}B$; d) $A = \sqrt{2}B$;

6.9. Nel triangolo rettangolo ABC, i cateti AB e AC hanno rapporto $\frac{3}{4}$. Qual è il rapporto tra l'ipotenusa BC e il cateto AB? Sono grandezze tra di loro commensurabili?

6.10. Date le relazioni $AB = CD + \frac{1}{2}EF$ e $\frac{2}{3}CD = \frac{1}{4}EF$, disegna i segmenti AB, CD ed EF scegliendo un'opportuna unità di misura e determina la misura di AB rispetto a CD.

6.11. Il segmento AB misura $3a$, quanto misura rispetto a $\frac{1}{2}a$?

6.12. Per quali dei seguenti valori di a il numero $\sqrt{a}$ è un numero irrazionale?

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 5;
f) 6;
g) 8;
h) 9;
i) 10.

6.2 - Proporzionalità tra grandezze

6.13. Se tra quattro grandezze omogenee è vera la proporzione $x : y = v : z$, quali delle seguenti proporzioni sono vere di conseguenza?

a) $x : v = y : z$
b) $x : z = v : y$
c) $v : x = x : y$
d) $z : y = v : x$

6.14. Sapendo che $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ e $\frac{x}{z} = \frac{5}{4}$ completa la proporzione $x : z = \ldots : \ldots$

6.15. Sapendo che $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ e $\frac{x}{z} = \sqrt{3}$ completa la proporzione $x : z = \ldots : \ldots$

6.16. Quattro grandezze A, B, C e D sono tali che $3A = 2B$ e $3C = 2D$. Verifica se sono in proporzione e in caso affermativo scrivila.

6.17. Dimostra che se vale la proporzione $3A : 2B = 3C : 2D$ vale anche la proporzione $A : B = C : D$.

6.18. Siano A, B, C, D, E, F e G grandezze omogenee, dimostra che se $A : B = C : D$ e $B : G = F : C$ allora $A : F = G : D$.

6.19. Le misure delle lunghezze dei lati di un triangolo sono proporzionali ai numeri 5, 6 e 10. Sapendo che il perimetro misura 273 cm, determina le misure dei lati del triangolo.

6.20. Stabilisci se in una stessa circonferenza le corde sono direttamente proporzionali ai corrispondenti angoli (convessi) al centro.

6.21. Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono proporzionali ai numeri 6, 8, 10. Determina le ampiezze degli angoli.

6.22. Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono proporzionali ai numeri 3 e 4. Determina le ampiezze degli angoli.

6.23. I lati di un rettangolo sono proporzionali ai numeri 6 e 15. Sapendo che il perimetro del rettangolo misura 120 cm, determina le misure in cm dei lati del rettangolo.

6.24. Determina le misure dei lati di un trapezio sapendo che sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5 e, 4 e che il perimetro è 80 cm. Di che tipo di trapezio si tratta?

6.25. Il perimetro di un rettangolo misura 12 m. Sapendo che le sue misure sono nel rapporto 2/3, determina le misure dei lati.

6.26. Le misure di due segmenti sono tali che la loro differenza è 23 cm e che il loro rapporto è 4/5. Determina attraverso una proporzione le misure dei segmenti.

6.27. Determina le ampiezze degli angoli di un triangolo rettangolo sapendo che stanno tra di loro come 7 sta a 4.

6.28. La differenza di due segmenti misura 7 cm, determina le loro misure sapendo che

a) uno è il doppio dell'altro;
b) uno è il triplo dell'altro;
c) uno è la metà dell'altro;
d) uno è la quarta parte dell'altro.

6.29. La somma di due segmenti misura 12 cm, determina le loro misure sapendo che

a) uno è il doppio dell'altro;
b) uno è il triplo dell'altro;
c) uno è la metà dell'altro;
d) uno è la quarta parte dell'altro.

6.30. Determina le misure di due angoli α e β sapendo che

a) $\alpha = \frac{2}{3}\beta$ e $\alpha + \beta = 130°$;
b) $\alpha = \beta + 12°$ e $\frac{\alpha}{\beta} = 3$;
c) $\beta = \frac{3}{4}\alpha$ e $\alpha - \beta = 15°$;
d) $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ e α e β sono complementari.

6.3 - Teorema di Talete, caso generale

6.31. Determina, per ogni parte della figura 6.4, la misura mancante, indicata con un punto interrogativo.

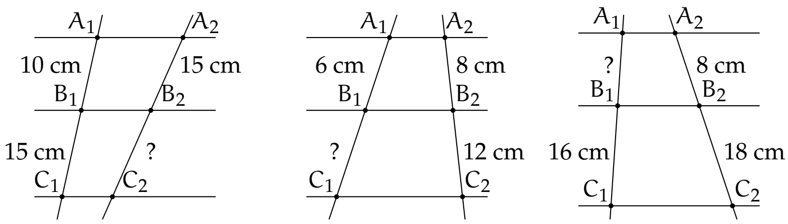
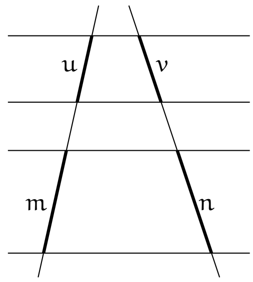


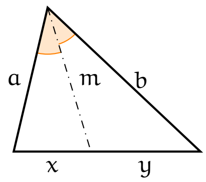
FIGURA 6.4: Esercizio 6.31

6.32. Con riferimento alla figura a fianco, quali proporzioni sono conseguenza del teorema di Talete?



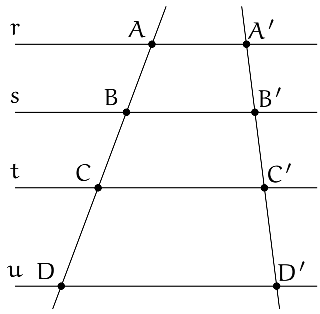
a) $u : v = m : n$
b) $u : m = v : n$
c) $(u + m) : m = (v + n) : n$
d) $v : m = u : n$
e) $(u + v) : (m + n) = m : n$
f) $(m - u) : u = (n - v) : v$

6.33. Nella figura a fianco c'è un triangolo e una delle sue bisettrici. Quali proporzioni sono conseguenza del teorema della bisettrice?



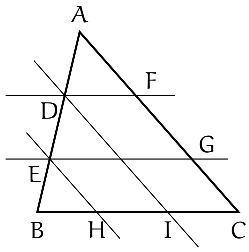
a) $a : b = x : y$
b) $a : m = m : b$
c) $x : m = m : y$
d) $a : x = m : y$

6.34. Sapendo che le rette r, s, t e u della figura a fianco sono parallele, completa le proporzioni



a) $AB : CD = \ldots : \ldots$
b) $AC : BD = \ldots : \ldots$
c) $AB : \ldots = \ldots : B'C'$
d) $AC : A'C' = \ldots : \ldots$

6.35. Nel triangolo ABC, individua sul lato AB i punti D ed E, con D più vicino ad A. Da D ed E traccia le parallele sia al lato AC che al lato BC, come nella figura a fianco. Dimostra che sussiste la seguente proporzione $AC : BC = FG : HI$.



6.36. Dato un triangolo qualunque ABC, si consideri il punto medio M del lato AB. Si consideri il segmento parallelo al lato BC che parte da M ed incontra il lato AC nel punto N. Si prolunghi questo segmento di un segmento ND uguale ad MN. Dimostra che il quadrilatero $MDCB$ è un parallelogramma. Esplicita ipotesi, tesi, fai il disegno e dimostra la tesi.

6.37. Dato un parallelogramma $ABCD$, si consideri M il punto medio del lato AB. Si congiunga il vertice D con il punto M; si congiunga il vertice A con il punto medio N del segmento DM. Dimostra che la retta AN divide la diagonale DB del parallelogramma in due parti di cui una è il doppio dell'altra.

6.38. Due rette incidenti r ed s si incontrano in un punto A; sulla retta r considera i punti A' e A'', individua su s le proiezioni ortogonali di A' e A'' e chiama questi punti rispettivamente B' e B''. Dimostra che sussiste la seguente proporzione $AA' : AA'' = BB' : BB''$.

6.39. Dal baricentro G di un triangolo ABC manda la parallela al lato AB, sia A' il punto in cui questa parallela incontra il lato AC. Dimostra che CA' è il doppio di $A'A$. Ricorda le proprietà del baricentro.

6.40. Dato il trapezio $ABCD$, sia E il punto di intersezione dei due lati non paralleli AD e BC. Dimostra che una qualsiasi retta per E che incontri i lati paralleli del trapezio nei punti K ed L, determina due segmenti EK e KL il cui rapporto è costante.

6.41. Dimostrare che, in un trapezio, il segmento che congiunge i punti medi dei lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi.

6.42. Nel parallelogramma $ABCD$ si individuino il punto E su AB tale che $AB : AE = 3 : 2$ e il punto F su DC tale che $DC : FC = 3 : 2$. Traccia la diagonale DB e le rette AF ed EC, le quali intersecano DB rispettivamente in L e in M. A quali numeri sono proporzionali i segmenti DL, LM e MB?

6.43. Dimostra che nel triangolo ABC la mediana AM è il luogo dei punti medi delle parallele al lato BC.

6.44. Nel triangolo ABC prendi un punto qualsiasi D su AB, da D traccia la parallela ad AC che incontra BC in E, da E traccia la parallela ad AB che incontra AC in F, da F traccia la parallela a BC che incontra AB in G, da G la parallela ad AC che incontra BC in H, da H la parallela ad AB che incontra AC in I e così via. Ripeti questa costruzione fino a che non trovi il primo punto che va a sovrapporsi a uno dei punti trovati in precedenza. Esiste questo punto? Qual è? Dimostra perché.

6.45. Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AK dell'angolo in A. Sapendo che la somma dei lati adiacenti all'angolo misura 47 cm, che $BK : CK = 3 : 4$ e che BK misura 7 cm, determinare le misure dei lati del triangolo.

6.46. Dal punto K della mediana AM del triangolo ABC traccia le parallele ai tre lati del triangolo, siano D ed E i punti di intersezione di AB e AC con la parallela a BC, siano F e G i punti di intersezione delle altre due parallele con il lato BC. Dimostra che AK è mediana del triangolo ADE e che KM è la mediana del triangolo KFG.

6.47. Sia E il punto di intersezione delle diagonali del trapezio $ABCD$. Dimostra che $AE : EC = BE : ED$.

6.48. Dimostra che in qualsiasi triangolo ABC la retta che passa per i punti medi dei lati AB e AC divide in due parti uguali l'altezza relativa a BC.

6.49. In un triangolo ABC sia $AB < AC$ e AM la mediana relativa al lato BC. Sia N punto medio di BM. Conduci da N la parallela alla mediana AM che incontra la retta AB in P e la retta AC in Q. Dimostra che $AQ : AC = AP : AB$.

6.50. Dimostra che in un qualsiasi trapezio le diagonali si dividono scambievolmente in parti tra loro direttamente proporzionali.

6.4 - Avere la stessa forma

6.51. In un trapezio congiungi i punti medi dei lati obliqui, sono simili i due trapezi in cui quello dato risulta spezzato dalla congiungente tracciata?

6.52. Congiungi i punti medi M, N, P rispettivamente dei lati AB, AC e BC di un triangolo ABC e determina il valore di verità della proposizione: $MNP \sim ABC$ con rapporto di similitudine 0,5.

6.53. È vero che due poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati sono simili? Giustifica la risposta.

6.54. Assegnato il quadrato $MNPQ$, costruisci il quadrato $M'N'P'Q'$ la cui diagonale sia doppia della diagonale MP. È vero che $M'N'P'Q' \sim MNPQ$? Qual è il rapporto di similitudine? Costruisci il quadrato $M''N''P''Q''$ avente diagonale metà di MP. È vero che $M''N''P''Q'' \sim MNPQ$? Qual è il rapporto di similitudine? È vero che tra le aree dei tre quadrati valgono le seguenti relazioni?

$$A_{MNPQ} = \frac{1}{2}A_{M'N'P'Q'} = 2A_{M''N''P''Q''}$$

6.55. Verifica che la relazione "essere simili" nell'insieme dei poligoni è una relazione di equivalenza (gode cioè della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva).

6.5 - La similitudine nei triangoli

6.56. Dimostra che la parallela ad un lato di un triangolo che interseca gli altri due determina un triangolo simile a quello dato. Scrivi la proporzione che sussiste tra i lati.

6.57. Nel triangolo isoscele ABC di vertice A, traccia la mediana AM e dal punto M traccia la perpendicolare al lato obliquo AB. Individua tutti i triangoli simili che si vengono a formare nella figura.

6.58. Nel triangolo ABC traccia l'altezza AH relativa al lato BC e l'altezza CK relativa al lato AB. Individua tutti i triangoli simili che si vengono a formare nella figura.

6.59. Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in B, traccia la bisettrice AL e da L la perpendicolare all'ipotenusa AC. Individua tutti i triangoli simili che si vengono a formare nella figura.

6.60. Nel trapezio $ABCD$ di basi AB e CD, detto P il punto d'incontro delle diagonali, risultano simili i triangoli ABP e CDP. Se le basi sono una doppia dell'altra, concludete la proposizione: «il punto P divide ciascuna diagonale in . . . . »

6.61. Dal punto K dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC tracciate la perpendicolare all'ipotenusa stessa che incontra le rette dei cateti AC e AB rispettivamente nei punti F e G. Dimostrate che: $FKC \sim FAG$ e $GKB \sim GAF$. Se $AC : AB = 7 : 5$ è vero che lo stesso rapporto sussiste tra i cateti dei triangoli nominati?

6.62. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ con AD perpendicolare alle basi, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Dimostrate che i due triangoli in cui la diagonale divide il trapezio sono simili. Nella prima riga della seguente tabella abbiamo posto i lati di un triangolo; Completate la seconda riga con i lati omologhi dell'altro triangolo e quindi la proporzione $CB : \ldots = AC : \ldots = AB : \ldots$.

ABC	CB	AC	AB
ADC	...	...	...

6.63. ABC e $A'B'C'$ sono due triangoli simili, CR e $C'R'$ sono le bisettrici rispettivamente degli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$ ($R \in AB$ e $R \in A'B'$). Dimostrate che $CR : C'R' = AB : A'B'$. Se CR e $C'R'$ sono rispettivamente le altezze relative ad AB e $A'B'$, vale la stessa proporzione? È possibile dimostrare, utilizzando il primo criterio di similitudine, che tale proporzione sussiste anche se CR e $C'R'$ fossero le mediane relative ad AB e $A'B'$?

6.64. In un trapezio $ABCD$ di basi $AB = 4$ cm, $DC = 8$ cm, traccia le diagonali AC e BD sapendo che esse misurano rispettivamente 7,62 cm e 5,83 cm. Indicato con K il punto di intersezione delle diagonali, determina le misure in cui ciascuna diagonale resta divisa dall'altra.

6.65. Nel triangolo ABC traccia le altezze AH e BK. Dimostra che il triangolo $4CHK$ è simile al triangolo ABC. Osserva che BKA e AHB sono inscrivibili in una semicirconferenza.

6.66. Siano BH e CK due altezze del triangolo ABC. Dimostra che AKH è simile ad ABC. Osserva che BCK e BCH sono inscrivibili in una semicirconferenza.

6.67. Un trapezio ha le basi di 4 cm e 10 cm, i lati obliqui di 4,57 cm e 5,94 cm. Prolungandoli si ottiene un triangolo che ha in comune con il trapezio la base minore. Determina il perimetro del triangolo.

6.68. Dimostra che due triangoli sono simili se hanno i lati del primo triangolo rispettivamente perpendicolari ai lati del secondo triangolo.

6.69. In un trapezio rettangolo la base minore CD è doppia del lato obliquo BC e questo è i 5/4 del lato AD perpendicolare alle due basi. Sapendo che l'area del trapezio è 184 cm^2, calcolare la misura della distanza di D dalla retta BC.

6.70. Nel triangolo ABC, traccia da un punto M del lato AB la parallela a BC; essa incontra AC in N. Traccia poi la bisettrice AL del triangolo; essa incontra MN in K. Dimostra che AMK è simile ad ABL.

6.71. Da un punto P dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC invia le parallele ai cateti del triangolo. Esse individuano Q au AB e R su AC. Dimostra che sono simili i triangoli ABC, QBP e RPC.

6.72. Due circonferenze, di centri O ed O' e raggi di misura rispettivamente 6 cm e 12 cm, sono tra loro tangenti esternamente in A; da O si tracci una tangente alla circonferenza di centro O' e sia B il punto di tangenza. Indicato con M il punto in cui il segmento BO incontra la circonferenza di centro O, calcolare le misure dei lati del triangolo AOM.

6.73. Il rapporto tra l'altezza AH e la base BC del triangolo isoscele ABC è $2 : 3$. Indicata con D la proiezione ortogonale di C sulla retta AB, dimostrare che D è un punto interno al segmento AB. Si costruisca poi il triangolo ECD, isoscele su base CD e simile ad ABC, in modo che il punto E si trovi dalla stessa parte di A rispetto a BC. Si dimostri che CE è parallelo ad AH, che i triangoli CDB e CEA sono simili e che il quadrilatero $ECDA$ è inscrivibile in una circonferenza.

6.74. Dimostrate che in due triangoli simili le mediane relative a due lati omologhi rispettano il rapporto di similitudine.