

TAVOLA DEGLI INTEGRALI INDEFINITI

Integrazione di funzioni elementari	Integrazione di funzioni composte
$\int dx = x + c$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin f(x) + c$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$	$\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arccos f(x) + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	
$\int \cosh x dx = \sinh x + c$	$\int \cosh f(x) f'(x) dx = \sinh f(x) + c$
$\int \sinh x dx = \cosh x + c$	$\int \sinh f(x) f'(x) dx = \cosh f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{f'(x) dx}{\cos^2 f(x)} = \operatorname{tg} f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot} x + c$	$\int \frac{f'(x) dx}{\sin^2 f(x)} = -\operatorname{cot} f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + c$	$\int \frac{f'(x) dx}{\cosh^2 f(x)} = \operatorname{tgh} f(x) + c$

GLI INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Calcola i seguenti integrali.

1	$\int (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx$	18	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{1+x^2} \right) dx$
2	$\int (2x^3 + x^2 - 3x - 3) dx$	19	$\int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

3	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$	20	$\int x^3 \sqrt{x^4 - 2} dx$
4	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$	21	$\int \frac{7x^6 - 10x^4 - 2x^{-3}}{2x^7 - 4x^5 + 2x^{-2} + 4} dx$
5	$\int \frac{x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2} dx$	22	$\int \frac{6x^2 - 12x - 6x^{-4}}{x^3 - 3x^2 + x^{-3} + 7} dx$
6	$\int \frac{2x^3 + 2x^2 - x - 4}{x^2} dx$	23	$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$
7	$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	24	$\int -e^{\cos x} \sin x dx$
8	$\int -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$	25	$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$
9	$\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx$	26	$\int \frac{-2e^{-2x} - e^{-x}}{e^{-2x} + e^{-x}} dx$
10	$\int \frac{x^3}{(x^4 - 1)^2} dx$	27	$\int \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{x+5} \right) dx$
11	$\int (2e^x - \cos x + \sqrt[3]{x}) dx$	28	$\int \left(\frac{4}{3x+2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$
12	$\int (3e^x - \sin x - \sqrt[3]{x}) dx$	29	$\int \frac{2x+1}{4x^2-1} dx$
13	$\int \frac{4\sin^3 x + \cos x + \sin(3x)}{\sin x} dx$	30	$\int \frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} dx$
14	$\int \frac{-4\cos^3 x + 2\sin x + \cos(3x)}{\cos x} dx$	31	$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$
15	$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$	32	$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx$
16	$\int \frac{5^{x+1}}{1+5^{2x}} dx$	33	$\int \frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln(x+e^x)^2} dx$
17	$\int \frac{3^{x+2}}{1+3^{2x}} dx$	34	$\int \frac{2+\cos x}{(1+2x+\sin x)\ln(1+2x+\sin x)^2} dx$

L'INTEGRAZIONE PER PARTI

Teorema di integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni reali di classe C^1 nell'intervallo $[a, b]$, si ha:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Dimostrazione:

pressoché ovvia. Essendo per la regola di derivazione del prodotto di due funzioni:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

si ha

$$\int_a^b (f \cdot g)'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

da cui l'asserto.

Es.1

Si calcoli il seguente integrale

$$\int x \cdot \cos x dx$$

La funzione integranda si presenta come il prodotto di due funzioni. L'integrale si risolve seguendo la formula dell'integrazione per parti

$$\int f(x)g(x) dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x) dx$$

Avendo indicato con $G(x)$ una primitiva di $g(x)$ e avendo scelto $f(x)$ come fattore finito e $g(x)$ come fattore differenziale. Nel nostro caso:

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Es.2

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \sqrt{x} \log x dx$$

In questo esercizio, la scelta di $\log x$ come fattore finito è obbligata perché non se ne conosce una primitiva. Pertanto, si ha:

$$\int \sqrt{x} \log x dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \log x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + c$$

Es.3

Si calcoli il seguente integrale

$$\int x \cdot \arctg x dx$$

Anche in questo caso, la scelta di $\arctg x$ come fattore finito è obbligata. Si ha:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arctg x dx &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + c \end{aligned}$$

NB: la scelta del fattore differenziale dipende sostanzialmente da due condizioni; deve essere una funzione di cui si conosce con semplicità la primitiva; inoltre deve essere tale che il nuovo integrale che compare

dall'applicazione della formula di integrazione per parti sia di difficoltà pari o minore a quello di partenza.

Alcuni artifici ed esempi

Es.4

Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \operatorname{tg} x dx, \quad \int \operatorname{cotg} x dx$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + c$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x| + c$$

Es.5

Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \log|\operatorname{tg} x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c = \log \frac{1 - \cos x}{|\sin x|} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c = \log \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} + c$$

Es.6

Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \frac{dx}{\sinh x}, \quad \int \frac{dx}{\cosh x}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = 2 \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = 2 \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = -2 \int \frac{de^x}{1 - (e^x)^2} = \log \frac{|1 - e^x|}{1 + e^x} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \int \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} = 2 \operatorname{arctg} e^x + c$$

Calcola i seguenti integrali.

1	$\int (x+2) \sin x dx$	16	$\int x^2 \cos x dx$
2	$\int (x+3) \cos x dx$	17	$\int \log(3x+5) dx$
3	$\int x^3 \log x dx$	18	$\int x^2 \cdot e^{3x} dx$
4	$\int x^4 \log x dx$	19	$\int x^3 \cdot e^{-x} dx$
5	$\int e^{2x} \operatorname{arctg}(e^{-x}) dx$	20	$\int x^2 \sin x dx$

6	$\int x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x}\right) dx$	21	$\int e^x \cdot \sin x dx$
7	$\int 3^x \sin^2(2x) dx$	22	$\int e^x \cdot \cos 2x dx$
8	$\int 2^x \cos^2(3x) dx$	23	$\int \cos^2(5x + 1) dx$
9	$\int \log x dx$	24	$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$
10	$\int \log^2 x dx$	25	$\int \sqrt{9 + x^2} dx$
11	$\int x^2 e^x dx$	26	$\int x^2 \cdot \log(x + 2) dx$
12	$\int x \cdot \cos x dx$	27	$\int \sqrt{x} \log 3x \cdot dx$
13	$\int \sin^2 x dx$	28	$\int x \log^2 x dx$
14	$\int x \cdot \sin x dx$	29	$\int e^{\sqrt{x}} dx$
15	$\int \operatorname{tg}^2 x dx$	30	$\int \frac{x e^x}{(x + 1)^2} dx$

L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Per calcolare l'integrale $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ di una funzione in cui il grado del denominatore sia maggiore del numeratore

si scompone $D(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili;

si riscrive la funzione integranda come somma di frazioni semplici aventi come denominatore i fattori di $D(x)$;

si applicano le regole di integrazione immediata

$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$	$\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$	$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$
$(ax + b)^n$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \frac{C}{(ax + b)^3} + \dots + \frac{N}{(ax + b)^n}$	$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3}$	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$
$ax^2 + bx + c; \Delta < 0$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$	$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$	$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$
$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ $\Delta < 0$	$\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$		
$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$	$\int \frac{A}{a(x - x_1)} dx + \int \frac{B}{x - x_2} dx$		

$\Delta > 0$	
$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ $\Delta = 0$	$\int \frac{A}{a(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{a(x-x_2)^2} dx$
$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ $\Delta < 0$	$\frac{m}{2a} \log ax^2+bx+c + \frac{2an-mb}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

Se il grado del Denominatore è minore o uguale al grado del Numeratore si procede alla divisione dei due polinomi

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

dove R(x) e Q(x) sono rispettivamente il resto e il quoziente della divisione.

1	$\int \frac{dx}{(x-2)^3}$	31	$\int \frac{3x+1}{x^2+2x-3} dx$
2	$\int \frac{dx}{(x+3)^4}$	32	$\int \frac{x-7}{x^2+4x-5} dx$
3	$\int \frac{dx}{(x+1)^5}$	33	$\int \frac{dx}{x^2-2x-3} dx$
4	$\int \frac{dx}{(2x+3)^4}$	34	$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$
5	$\int \frac{dx}{(3x-1)^5}$	35	$\int \frac{dx}{x^2-x-6}$
6	$\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$	36	$\int \frac{dx}{x^2+x-2}$
7	$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$	37	$\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$
8	$\int \frac{3x-1}{x^2+x+1} dx$	38	$\int \frac{dx}{x^2-3x}$
9	$\int \frac{3x+4}{x^2+x+2} dx$	39	$\int \frac{dx}{x^2-4}$
10	$\int \frac{5x+1}{x^2+2x+3} dx$	40	$\int \frac{2x-1}{3x^2+7x+2} dx$
11	$\int \frac{3x-2}{x^2+3x+7} dx$	41	$\int \frac{x+1}{6x^2+7x+2} dx$
12	$\int \frac{3x+2}{2x^2+x+1} dx$	42	$\int \frac{xdx}{2x^2-3x+1}$
13	$\int \frac{5x-1}{3x^2+x+1} dx$	43	$\int \frac{dx}{4x^2-4x-3}$
14	$\int \frac{3x-1}{2x^2+2x+5} dx$	44	$\int \frac{dx}{4x^2-8x-5}$
15	$\int \frac{2x+3}{5x^2+x+1} dx$	45	$\int \frac{dx}{9x^2+3x-2}$

16	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$	46	$\int \frac{dx}{2x^2-3x}$
17	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$	47	$\int \frac{dx}{4x^2-9}$
18	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$	48	$\int \frac{dx}{9x^2-4}$
19	$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$	49	$\int \frac{2x+11}{(x+5)^2} dx$
20	$\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^2}$	50	$\int \frac{x-5}{(x-6)^2} dx$
21	$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$	51	$\int \frac{2x-3}{(2x-5)^2} dx$
22	$\int \frac{dx}{(x^2+3x+5)^2}$	52	$\int \frac{6x-23}{(2x-7)^2} dx$
23	$\int \frac{3x+2}{(1+x^2)^2} dx$	53	$\int \frac{4x+7}{(4x+5)^2} dx$
24	$\int \frac{5x+1}{(1+x^2)^3} dx$	54	$\int \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} dx$
25	$\int \frac{3x+1}{(1+x^2)^4} dx$	55	$\int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+3)} dx$
26	$\int \frac{3x+7}{(x^2+2x+5)^2} dx$	56	$\int \frac{3x^2+x-2}{(x+3)(x^2+2)} dx$
27	$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} dx$	57	$\int \frac{x^2-7x+1}{(3x+1)(x^2-x+3)} dx$
28	$\int \frac{15x+7}{(5x^2+2x+1)^2} dx$	58	$\int \frac{11x^2-21x+16}{(2x-1)(x^2-3x+4)} dx$
29	$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$	59	$\int \frac{4x^2+2x-21}{(4x+3)(x^2-2x+3)} dx$
30	$\int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$	60	$\int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x^2-5x+6)} dx$

L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$\int R(\cos x, \sin x) dx$ con R funzione razionale	$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t$ $x = 2 \arctg t$ $dx = \frac{2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\int R(e^x) dx$	$e^x = t$ $x = \log t$ $dx = \frac{1}{t}$
$\int R(tg x) dx$	$tg x = t$ $x = \arctg t$

	$dx = \frac{1}{1+t^2}$
$\int R(\sqrt{x})dx$	$\sqrt{x} = t$ $x = t^2$ $dx = 2t$

Integrali del tipo

$$\int R(e^x)dx$$

1	$\int \frac{3e^{2x} + 2e^x}{2e^{2x} + 3e^x + 1} dx$	$\log(e^x + 1) + \frac{1}{2} \log(2e^x + 1)$
2	$\int \frac{e^{2x}}{3e^{2x} - 2e^x - 1} dx$	$\frac{1}{4} \log e^x - 1 + \frac{1}{12} \log(3e^x + 1)$
3	$\int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} dx$	$x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}$
4	$\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{(e^x + 1)^2} dx$	$\log(e^x + 1) - \frac{2}{e^x + 1}$
5	$\int \frac{e^x - 1}{2e^x - 1} dx$	$x - \frac{1}{2} \log 2e^x - 1 $
6	$\int \frac{e^{2x} + 9e^x + 9}{e^{2x} + 3e^x + 3} dx$	$3x - \log(e^{2x} + 3e^x + 3) + \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2e^x + 3}{\sqrt{3}}$
7	$\int \frac{e^{3x} + 6e^{2x} + 9e^x}{(e^x - 3)(e^{2x} + 3)} dx$	$3 \log e^x - 3 - \log(e^{2x} + 3)$
8	$\int \frac{11e^{2x} - 17e^x + 12}{e^{2x} - 3e^x + 4} dx$	$3x + 4 \log(e^{2x} - 3e^x + 4) + \frac{8}{\sqrt{7}} \operatorname{artg} \frac{2e^x - 3}{\sqrt{7}}$
9		

Integrali del tipo

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

1	$\int \frac{1}{1 - \cos x} dx$	
2	$\int \frac{2}{1 + \sin x - 2 \cos x} dx$	
3	$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$	
4	$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$	
5	$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx$	
6	$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}$	$\log \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right $
7	$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 1}$	$\log \left \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + 1 \right $
8	$\int \frac{dx}{1 - \cos x - 3 \sin x}$	$\frac{1}{3} \log \left 1 - 3 \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \right $
9	$\int \frac{\sin x - \cos x - 1}{\sin x (2 \sin x - \cos x - 1)} dx$	$\log \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right - \frac{1}{2} \log \left 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right $

10	$\int \frac{dx}{3(1 + \sin x) + \cos x}$	$\log \left \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right $
11	$\int \frac{4\sin x - 3\cos x + 3}{\sin x(7\sin x + \cos x + 5)} dx$	$\log \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right + \frac{1}{2} \log \left 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right $
12	$\int \frac{2\sin x + 11\cos x + 11}{(6\cos x + \sin x + 6)^2} dx$	$2\log \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 \right + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6}$

Integrali del tipo

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

Per n=1 ricorriamo ad una sostituzione con formule parametriche. Per n=2 si ricorre ad artifici.

Es.7

Si risolva il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x + c$$

1	$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$	
2	$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$	
3	$\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$	
4	$\int \sin^3 x \cdot \cos^n x dx$	
5	$\int \sin^n x \cdot \cos^3 x dx$	
6	$\int \sin^5 x \cdot \cos^n x dx$	
7	$\int \sin^n x \cdot \cos^5 x dx$	
8	$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$	
9	$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$	
10	$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	
11	$\int \frac{dx}{\sin^6 x}$	
12	$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$	
13	$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$	

Alcuni integrali di espressioni trigonometriche si risolvono con formule di ricorrenza

Es. 8

Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \operatorname{tg}^n x dx$$

Vale la seguente formula di ricorrenza di cui si omette la dimostrazione

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

Analogamente per il secondo e il terzo:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$$

Integrali del tipo

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

La sostituzione da effettuare è:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

che fornisce:

$$x = \frac{t^n d - b}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$$

Un caso particolare è dato quando la funzione integranda presenta due o più radici con indice diverso. In questo caso basta porre uguale a t la radice n -sima di un certo radicando, dove n rappresenta il m.c.m. degli indici.

Es. 9

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

Si adopera la sostituzione:

$$t = \sqrt[6]{x}$$

che fornisce:

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \log(t+1) + c$$

E quindi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \log(1 + \sqrt[6]{x}) + c$$

1	$\int \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}} dx$	
2	$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(2x-3\sqrt{x}-2)} dx$	
3	$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}(6x+5-\sqrt{x+1})} dx$	
4	$\int \frac{\sqrt[3]{x}-6}{6x\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^2}-7x} dx$	
5	$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}-2x-4-\sqrt[3]{(x+2)^2}} dx$	
6	$\int \frac{7\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(7\sqrt{x}-1)^2} dx$	
7	$\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{(x+7)\sqrt{x+3}+4(x+3)} dx$	
8	$\int \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$	
9	$\int \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$	

10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$	
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - 2\sqrt[3]{x+2}}$	
12	$\int \frac{\sqrt[6]{x} - 3}{6x\sqrt[6]{x} - 2\sqrt[6]{x^5} - x} dx$	
13	$\int \frac{3 + \sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}(4x+8-3\sqrt{2x+5})} dx$	
14	$\int \frac{\sqrt[3]{\frac{3x+1}{5x+2}} + 3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{5x+2}\right)^2 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{3x+1}{5x+2}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{(5x+2)^2} dx$	
15	$\int \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}(2x - 3\sqrt{x} - 2)} dx$	

Integrali del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Caso $a > 0$

Un integrale del genere si risolve per sostituzione. La sostituzione da effettuare è

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{a}(t - x) \\ x &= \frac{at^2 - c}{b + 2at}; \quad dx = \frac{2a(at^2 + bt + c)}{(b + 2at)^2} dt \end{aligned}$$

In questo modo l'integranda si riduce a una funzione della variabile t :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left(t - \frac{at^2 - c}{b + 2at} \right) = \sqrt{a} \left(\frac{at^2 + bt + c}{b + 2at} \right)$$

A titolo di esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \text{con } a > 0$$

ammette come soluzione, facilmente verificabile tramite la sostituzione appena vista:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + k$$

16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 3}}$	
17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$	
18	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + x + 1}}$	
19	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + x + 2}}$	
20	$\int \sqrt{x^2 + 3} dx$	
21	$\int \frac{dx}{2x + \sqrt{x^2 + 3}}$	
22	$\int \frac{dx}{3x + \sqrt{x^2 + 5}}$	
23	$\int \frac{dx}{3x + 2\sqrt{x^2 + 1}}$	
24	$\int \frac{dx}{x - 3\sqrt{x^2 + 5}}$	
25	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2} - 1}$	
26	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 5} - 2}$	
27	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2}$	
28	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 8} - 3}$	
29	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}$	
30	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 4} - 2}$	

Caso $a < 0$

La sostituzione da effettuare in questo caso è la seguente:

$$\sqrt{\frac{x_2 - x}{x - x_1}} = t$$

dove x_1, x_2 sono le soluzioni del polinomio sotto radice, che avrà un $\Delta > 0$.

Dalla sostituzione si ricava:

$$x = \frac{x_2 + x_1 t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2(x_1 - x_2)}{(1 + t^2)^2} t dt$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\sqrt{|a|} \frac{x_2 + x_1 t^2}{1 + t^2} - x_1 \right) t = \sqrt{|a|} (x_2 - x_1) \frac{t}{1 + t^2}$$

A titolo di esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{2}{\sqrt{|a|}} \operatorname{artg} \sqrt{\frac{x_2 - x}{x - x_1}} + k$$

Come si può facilmente verificare ammettendo la sostituzione appena vista.

31	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 6}}$	
32	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 20}}$	
33	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 5x - 6}}$	
34	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$	
35	$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 8x - 3}}$	
36	$\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2 + 9x - 2}}$	
37	$\int \frac{dx}{\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}}$	
38	$\int \frac{(15x - 4)dx}{\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}}$	
39	$\int \sqrt{-25x^2 + 15x - 2} dx$	
40	$\int \sqrt{-9x^2 + 15x - 4} dx$	
41	$\int \sqrt{-x^2 + 1} dx$	

Altri esempi

Es. 10

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$$

Possiamo procedere per sostituzione di variabile, ponendo

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (t^4 + t^6) dt \\ &= \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

NB. La sostituzione $tgx = t$ è possibile ogni volta che l'elemento $f(x)dx$ è invariante rispetto a $x \rightarrow \pi + x$

Es. 11

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \cos^5 x dx$$

Tale integrale può essere considerato un particolare caso di integrali del tipo:

$$\int \cos^n x dx, \text{ con } n \text{ dispari}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (1 + \sin^4 x - 2\sin^2 x) d(\sin x) = \sin x + \frac{\sin^5 x}{5} - 2\frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

Es. 12

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \cos^4 x dx$$

$$\int \cos^4 x dx = \int \cos^3 x \cdot \cos x dx$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \cdot \cos x dx &= \cos^3 x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \cdot 3\cos^2 x dx = \cos^3 x \cdot \sin x + 3 \int (\cos^2 x - \cos^4 x) dx = \cos^3 x \\ &\cdot \sin x + 3 \int \cos^2 x dx - 3 \int \cos^4 x dx \end{aligned}$$

Portando il valore dell'ultimo integrale a primo membro e sfruttando la proprietà di additività si ha:

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx$$

Essendo poi:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right)$$

segue che

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} x + \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + c$$

Formula di Newton-Leibnitz o secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow R$ una funzione che ammette una primitiva F su $[a, b]$. Se f è integrabile si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Tale relazione è detta *formula fondamentale del calcolo integrale*.

1	$\int_1^2 (x^3 - x + 2) dx$	$\left[\frac{17}{4} \right]$
2	$\int_1^2 (x^3 + x - 1) dx$	$\left[\frac{17}{4} \right]$
3	$\int_1^4 \frac{2x^2 + 3}{x} dx$	$[15 + 3 \ln 4]$
4	$\int_1^3 \frac{3x^3 + 2}{x} dx$	$[26 + 2 \ln 3]$
5	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx$	$[1 - \sqrt{2}]$
6	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$	$[1 - \sqrt{2}]$
7	$\int_0^2 x e^{x^2} dx$	$\left[\frac{e^4 - 1}{2} \right]$
8	$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$	$\left[\frac{e - 1}{3} \right]$
9	$\int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 3x^2 - 10x + 9}{x + 2} dx$	$\left[\frac{28}{3} + \ln 3 \right]$
10	$\int_3^6 \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{x - 1} dx$	$\left[\frac{213}{2} + 3 \ln \frac{5}{2} \right]$
11	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} dx$	$\left[\frac{8 - 5\sqrt{2}}{3} \right]$
12	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1+x}} dx$	$\left[\frac{8 - 3\sqrt{6}}{3} \right]$
13	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos^2 x} dx$	$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right]$
14	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin^2 x} dx$	$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right]$
15	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin x dx$	$\left[1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right]$

16	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \cos x dx$	$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \sqrt{2} - 1 \right]$
----	--	---

IL CALCOLO DELLE AREE DI SUPERFICI PIANE

Disegna le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle funzioni seguenti, definite negli intervalli indicati, poi calcolane l'area.

1	$y = e^x + 1, [0;2].$	$[e^2 + 1]$
2	$y = e^x + 2, [0;1].$	$[e + 1]$
3	$y = -x^2 + 2x, [-1;2].$	$\left[\frac{8}{3} \right]$
4	$y = -x^2 - 2x, [-2;1].$	$\left[\frac{8}{3} \right]$
5	$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, [1;3]$	$\left[\frac{1}{2} \right]$
6	$y = x^3 - 3x^2 + 2x, [0;2].$	$\left[\frac{1}{2} \right]$
7	Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta di equazione $2x + 2y - 9 = 0$ e dall'iperbole di equazione $y = \frac{2}{x}$.	$\left[\frac{63}{8} - 3 \ln 4 \right]$
8	Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta di equazione $2x - 2y - 9 = 0$ e dall'iperbole di equazione $y = -\frac{2}{x}$.	$\left[\frac{63}{8} - 3 \ln 4 \right]$

Esercizi di riepilogo sugli integrali

1	$\int \frac{3x-2}{9x^2-6x+1} dx$	
2	$\int \frac{2}{x^2+8x+18} dx$	
3	$\int \frac{1}{4x^2-4x+3} dx$	
4	$\int \frac{x+4}{x^2+2x+3} dx$	
5	$\int \frac{x-2}{x^2+2x+5} dx$	

6	$\int \frac{x-2}{x^2+2x+5} dx$	
7	$\int \frac{2x+1}{x^3-1} dx$	
8	$\int \frac{x-3}{1-x^3} dx$	
9	$\int \frac{5x^4+2x^2+4x}{3x^5+2x^3+6x^2-3} dx$	
10	$\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1} dx$	
11	$\int \frac{3x-1}{x+2} dx$	
12	$\int \frac{2x-1}{2x+1} dx$	
13	$\int \frac{2x-1}{x^2+2x-24} dx$	
14	$\int \frac{x-7}{x^2-2x-8} dx$	
15	$\int \frac{x+1}{x^2-8x+16} dx$	
16	$\int \frac{tgx}{1-\cos x} dx$	
17	$\int \frac{2}{3+\sqrt{x}} dx$	
18	$\int \frac{2}{e^x+e^{-x}} dx$	
19	$\int \sqrt[3]{e^{2x}}(e^x+1) dx$	
20	$\int \frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$	
21	$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^2 x}$	
22	$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - 2\sin x - 3} dx$	
23	$\int \frac{3+tgx}{\cos x} dx$	
24	$\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$	$\log \left 1 + tg \frac{x}{2} \right + c$
25	$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$	$-x + \frac{4}{\cotg \frac{x}{2} - 1} + c$
26	$\int \frac{3+tgx}{\cos x} dx$	$\frac{1}{\cos x} + 3 \log \left \frac{tg \frac{x}{2} + 1}{tg \frac{x}{2} - 1} \right + c$
27	$\int \frac{1}{1+\cos x} dx$	$tg \frac{x}{2} + c$
28	$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{tgx}{\sqrt{2}} + c$

29	$\int e^{3-4x} dx$	$-\frac{1}{4}e^{3-4x} + c$
30	$\int \frac{x^4 - 3x}{x^2 + 2x + 1} dx$	$3x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 7\log x+1 - \frac{4}{x+1} + c$
31	$\int \frac{e^x(x+1)}{xe^x + 1} dx$	$\log(xe^x + 1) + c$
32	$\int \frac{\cos x - 1}{\sin \frac{x}{2}} dx$	$4\cos \frac{\pi}{2} + c$
33	$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$	$-2\sqrt{4-x} + c$
34	$\int \sin^6 x \cos x dx$	$\frac{\sin^7 x}{7} + c$
35	$\int \frac{2}{x^2 + x + 1} dx$	$\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctg \frac{1}{3}\sqrt{3}(2x+1) + c$
36	$\int \sqrt[3]{x} \log x dx$	$\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}(4\log x - 3) + c$
37	$\int \frac{x+1}{x} \log x dx$	$x \log x - x + \frac{1}{2}\log^2 x + c$
38	$\int \frac{1}{\sqrt{4+9x^2}} dx$	$\frac{1}{3}\log\left(\frac{3}{2}x + \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + 1}\right) + c$
39	$\int \sqrt{9+x^2} dx$	$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\log(x + \sqrt{x^2+9}) + c$
40	$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$	$\sin x + \cos x + c$
41	$\int \frac{\sin 2x + \sin x}{\sin x} dx$	$x + 2\sin x + c$
42	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$	$\arctg(x+2) + c$
43	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}} dx$	$-\frac{1}{3}\log\left \frac{3+\sqrt{x^2+9}}{x}\right + c$
44	$\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^2}} dx$	$-\frac{1}{4}\log\left \frac{4+\sqrt{16-x^2}}{x}\right + c$
45	$\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2} dx$	$\frac{1}{12}\log\left \frac{x-3}{x+3}\right - \frac{x}{2x^2-18} + c$
46	$\int \arccos x dx$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$
47	$\int \frac{\log x}{x^3} dx$	$-\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2}\log x + c$
48	$\int \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 4} dx$	$\frac{1}{2}x^2 - x - 2\log(x^2+4) + 2\arctg \frac{x}{2} + c$
49	$\int \log e^{x^2} dx$	$\frac{x^3}{3} + c$
50	$\int e^{2x} \cos 3x dx$	$\frac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + c$
51	$\int \frac{3x^3 + 7x^2 + 4x - 1}{3x^2 + 7x + 2} dx$	
52	$\int \frac{4x^3 + 4x^2 - 18x + 11}{2x^2 + 5x - 3} dx$	

53	$\int \frac{3x^4 - 10x^2 + 9x - 4}{(x-1)^2} dx$	
54	$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)} dx$	
55	$\int \frac{2x^4 + x^3 + 7x^2 + 5x + 2}{x(x^2 + x + 2)} dx$	
56	$\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 18}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 5)^2} dx$	