EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

1. Equazioni lineari del primo ordine omogenee [cfr. (2) pag. 36].

A $y'-y\cos x=0$ $\left[y=ce^{\operatorname{sen}x}\right]$, $y'-y\operatorname{cotg}x=0$ $\left[y=c\operatorname{sen}x\right]$,

A $y'-2xy=0$ $\left[y=ce^{x^2}\right]$, $y'-y\log x=0$ $\left[y=ce^{x(\log x-1)}\right]$,

$y'-\frac{(3x^2+1)y}{x^3+x+5}=0$ $\left[y=c(x^3+x+5)\right]$, $y'-\frac{y}{\operatorname{sen}x}=0$ $\left[y=c\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$,

$y'-\frac{y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}=0$ $\left[y=c\arcsin x\right]$, $y'-\frac{y}{1+\cos x}=0$ $\left[y=ce^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]$,

$y'-y\operatorname{arctg}x=0$ $\left[y=c\frac{\exp(x\operatorname{arctg}x)}{\sqrt{1+x^2}}\right]$, $y'-\frac{(2x-1)y}{x^2-3x+2}=0$ $\left[y=c\frac{|x-2|^3}{|x-1|}\right]$,

$y'-y\arcsin x=0$ $\left[y=c\exp\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)\right]$,

$y'-\frac{ye^x}{e^{2x}+5e^x+6}=0$ $\left[y=c\frac{e^x+2}{e^x+3}\right]$, $y'-\frac{y}{1+\sqrt{x+2}}=0$ $\left[y=c\frac{\exp(2\sqrt{x+2})}{x+3+2\sqrt{x+2}}\right]$,

$y'-y\operatorname{sen}3x\cos4x=0$ $\left[y=c\exp\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{14}\cos7x\right)\right]$,

$y'-\frac{2(x+1)y}{x^2+x+1}=0$ $\left[y=c(x^2+x+1)\exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$,

$y'-\frac{y}{x^3+1}=0$ $\left[y=c\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)^{\frac{1}{3}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$,

$y'-x^2ye^{3x}=0$ $\left[y=c\exp\left(\frac{1}{3}e^{3x}\left[x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right]\right)\right]$,

$y'-\frac{y}{2x^2-3x}=0$ $\left[y=c\exp\sqrt[3]{\frac{2x-3}{x}}\right]$.

$y'-\frac{(x^3-16x^2-39x+74)y}{x^4+4x^3-7x^2-22x+24}=0$ $\left[y=c\frac{|(x+3)(x+4)^3|}{|x-1|(x-2)^2}\right]$.

2. Equazioni lineari del primo ordine non omogenee [cfr. pag. 37 dopo la (6)].

• $y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad \left[y = cx + \frac{1}{2}x^3 \right]$, • $y' - y\cot g x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad [y = c \operatorname{sen} x - \cos x]$,

• $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x \quad \left[y = (\operatorname{sen} x + c)\, e^{x^2} \right]$,

• $y' - y \cos x = e^{\operatorname{sen} x} \log x \quad \left[y = (c - x + x \log x)\, e^{\operatorname{sen} x} \right]$,

* $y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} \frac{x}{2} \quad \left[y = \left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c\right) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right]$,

• $y' - y \log x = e^{x(\log x - 1)} \quad \left[y = (x + c)\, e^{x(\log x - 1)} \right]$,

$y' - y \cosh x = \frac{e^{\operatorname{senh} x}}{(1+x^2)^2} \quad \left[y = \left(c + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} \right) e^{\operatorname{senh} x} \right]$,

• $y' - \frac{(3x^2+1)\, y}{x^3 + x + 5} = x^3 + x + 5 \quad \left[y = (x + c)(x^3 + x + 5) \right]$,

• $y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x \cos x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \quad [y = c \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x]$,

• $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\, \operatorname{arcsen} x} = 2x \operatorname{arcsen} x \quad \left[y = (x^2 + c) \operatorname{arcsen} x \right]$,

* $y' - 5x^4 y = \frac{5x^5 + 3}{x^4} \quad \left[y = c\, e^{x^5} - \frac{1}{x^3} \right]$ (1)

$y' - \frac{y}{1 + \cos x} = -\operatorname{sen} x - 1 \quad \left[y = c\, e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \cos x + 1 \right]$ (2),

$y' - \frac{6y}{5\sqrt[5]{(3x+2)^3}} = \frac{9}{5\sqrt[5]{(3x+2)^2}} - \frac{6}{5} \quad \left[y = c \exp \sqrt[5]{(3x+2)^2} + \sqrt[5]{(3x+2)^3} \right]$ (3),

---

(1) Esprimere $\int x^{-4} e^{-x^5} dx$ procedendo per parti col fattore differenziale $x^{-4} dx$.

(2) Esprimere $\int e^{-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$ procedendo per parti col fattore differenziale $\operatorname{sen} x\, dx$.

(3) Esprimere $\int e^{-\sqrt[5]{(3x+2)^2}} (3x+2)^{-\frac{3}{5}} dx$ procedendo per parti con l'esponenziale come fattore finito.

$y'+\frac{2y}{x^3}=\frac{2\,\mathrm{sen}\,x+x^3\cos x}{x^3}$ $\left[y=c\exp\frac{1}{x^2}+\mathrm{sen}\,x\right]$

$y'-2xy=3x^2e^{x^2+3x}$ $\left[y=ce^{x^2}+e^{x^2+3x}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)\right]$,

$y'+\frac{y}{1+x^2}=e^{-\mathrm{arctg}\,x}\log^2x$ $\left[y=\left(c+x\log^2x-2x\log x+2x\right)e^{-\mathrm{arctg}\,x}\right]$,

$y'+y\cos x=e^{x-\mathrm{sen}\,x}\cos x$ $\left[y=\left(c+\frac{e^x(\mathrm{sen}\,x+\cos x)}{2}\right)e^{-\mathrm{sen}\,x}\right]$,

$y'-2xy=\frac{e^{x^2+x}}{e^{2x}+1}$ $\left[y=\left(c+\mathrm{arctg}\,e^x\right)e^{x^2}\right]$,

$y'-3x^2y=\frac{e^{x^3}}{1+\sqrt{x+2}}$ $\left[y=\left(c+2\sqrt{x+2}-2\log\left(1+\sqrt{x+2}\right)\right)e^{x^3}\right]$

$y'-2xy=\frac{e^{x^2}}{1+x^3}$ $\left[y=\left(c+\frac{1}{3}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)e^{x^2}\right]$,

$y'+\frac{3y}{x^4}=\frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[y=\left(c+\mathrm{settsenh}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)e^{\frac{1}{x^3}}\right]$

$y'-(2x+3)y=\frac{e^{x^2+3x}}{\mathrm{sen}^3x}$ $\left[y=\left(c-\frac{\cos x}{2\,\mathrm{sen}^2x}+\frac{1}{2}\log\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|\right)e^{x^2+3x}\right]$.

3. Equazioni lineari di ordine superiore, a coefficienti costanti, omogenee

[cfr. 7.II pag.44].

$y''-3y'+2y=0$ $[y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}]$, $y''-2y'-3y=0$ $[y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}]$,

$y''+7y'+12y=0$ $[y=c_1e^{-4x}+c_2e^{-3x}]$, $2y''+3y'+y=0$ $[y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-x}]$,

$2y''+7y'+3y=0$ $[y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-3x}]$, $2y''+11y'+5y=0$ $[y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-5x}]$,

$y''+3y'=0$ $[y=c_1+c_2e^{-3x}]$, $3y''-y'=0$ $[y=c_1+c_2e^{\frac{x}{3}}]$, $y''+\sqrt{2}y'=0$ $[y=c_1+c_2e^{-x\sqrt{2}}]$,

$y''-\pi y'=0$ $[y=c_1+c_2e^{\pi x}]$, $y''-4y=0$ $[y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}]$, $y''-3y=0$ $[y=c_1e^{-x\sqrt{3}}+c_2e^{x\sqrt{3}}]$,

$y''-y=0$ $[y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}]$, $y''=0$ $[y=c_1+c_2x]$, $y''-2y'+y=0$ $[y=(c_1+c_2x)e^{x}]$,

$y''-4y'+4y=0$ $[y=(c_1+c_2x)e^{2x}]$, $y''-8y'+16y=0$ $[y=(c_1+c_2x)e^{4x}]$,

$4y''-4y'+y=0$ $[y=(c_1+c_2x)e^{\frac{x}{2}}]$, $9y''-6y'+y=0$ $[y=(c_1+c_2x)e^{\frac{x}{3}}]$,

$25y''-20y'+4y=0$ $[y=(c_1+c_2x)e^{\frac{2x}{5}}]$, $y''-2y'+2y=0$ $[y=e^{x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)]$,

$y''-2y'+5y=0$ $[y=e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x)]$, $y''+4y=0$ $[y=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x]$,

$y''-4y'+5y=0$ $[y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)]$, $y''-2y'+10y=0$ $[y=e^{x}(c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen} 3x)]$,

$y''+y=0$ $[y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x]$, $y''-6y'+10y=0$ $[y=e^{3x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)]$,

$y''-4y'+13y=0$ $[y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen} 3x)]$, $y''+\pi^2y=0$ $[y=c_1\cos \pi x+c_2\operatorname{sen} \pi x]$,

$y''-6y'+13y=0$ $[y=e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x)]$,

$y''-2y'+17y=0$ $[y=e^{x}(c_1\cos 4x+c_2\operatorname{sen} 4x)]$,

$y''-8y'+17y=0$ $[y=e^{4x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)]$,

$y''-4y'+20y=0$ $[y=e^{2x}(c_1\cos 4x+c_2\operatorname{sen} 4x)]$,

$y''-6y'+25y=0$ $[y=e^{3x}(c_1\cos 4x+c_2\operatorname{sen} 4x)]$,

$y''-8y'+25y=0$ $[y=e^{4x}(c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen} 3x)]$,

$y''-2y'-3y=e^{3x}-3x^2-7x$ $[u=x^2+x(1+\frac{e^{3x}}{4})]$,

$y''-2y'-3y=\frac{4x-1}{x^2}e^{3x}+\cos x-3$ $[u=1+e^{3x}\log|x|-\frac{\cos x}{5}-\frac{\operatorname{sen} x}{10}]$ ⊙

$y''+3y'=x+1$ $[y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{x^2}{6}+\frac{2x}{9}]$, $y''+3y'=9x^2$ $[u=x^3-x^2+\frac{2}{3}x]$,

$y''+3y'=e^x$ $[u=\frac{e^x}{4}]$ $y''+3y'=5$ $[u=\frac{5}{3}x]$ $y''+3y'=e^{-3x}$ $[u=-\frac{x}{3}e^{-3x}]$,

$y''+3y'=\frac{3x-1}{x^2}$ $[u=\log|x|]$, $y''+3y'=\frac{3x-1}{x^2}+e^{-3x}$ $[u=\log|x|-\frac{x}{3}e^{-3x}]$,

$y''+3y'=\operatorname{sen} x$ $[u=-\frac{1}{10}(\operatorname{sen} x+3\cos x)]$,

$y''+3y'=10x\cos x$ $[u=(3x+\frac{1}{5})\operatorname{sen} x-(x-\frac{18}{5})\cos x]$ ⊙

$y''-2y'+y=e^{2x}$ $[y=(c_1+c_2x)e^x+e^{2x}]$, $y''-2y'+y=e^x$ $[u=\frac{1}{2}x^2e^x]$,

$y''-2y'+y=x+1$ $[u=x+3]$, $y''-2y'+y=x^3$ $[u=x^3+6x^2+18x+24]$,

$y''-2y'+y=xe^{2x}$ $[u=(x-2)e^{2x}]$, $y''-2y'+y=xe^x$ $[u=\frac{1}{6}x^3e^x]$ ⊙

$y''-2y'+2y=4$ $[y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)+2]$, $y''-2y'+2y=e^{2x}$ $[u=\frac{e^{2x}}{2}]$,

$y''-2y'+2y=\operatorname{sen} x$ $[u=\frac{1}{5}(\operatorname{sen} x+2\cos x)]$, $y''-2y'+2y=\cos x$ $[u=\frac{1}{5}(\cos x-2\operatorname{sen} x)]$

$y''-2y'+2y=x^2$ $[u=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}]$, $y''-2y'+2y=3x+1$ $[u=\frac{3}{2}x+2]$,

$y''-2y'+2y=e^x\operatorname{sen} x$ $[u=-\frac{1}{2}xe^x\cos x]$, $y''-2y'+2y=e^x(3\cos^2 x-1)$ $[u=e^x\operatorname{sen}^2 x]$,

$y''-2y'+2y=e^x(3\cos^2 x+\operatorname{sen} x-1)$ $[u=e^x(\operatorname{sen}^2 x-\frac{1}{2}x\cos x)]$ ⊙

$y'''-3y''+2y'=e^x$ $[y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}-xe^x]$, $y'''-3y''+2y'=1$ $[u=\frac{x}{2}]$,

$y'''-3y''+2y'=e^x\operatorname{sen} x$ $[u=\frac{1}{2}e^x\cos x]$,

$y'''-3y''+2y'=\frac{2x^2+3x+2}{x^3}$ $[u=\log|x|$ (*)$]$ ⊙

(*) Stabilire delle formule di ricorrenza per gli integrali:

$$I_n=\int x^{-n}e^{-x}dx,\quad J_n=\int x^{-n}e^{-2x}dx$$

mediante integrazione per parti, con l'esponenziale come fattore finito. Indi esprimere I_2, I_3, J_2, J_3 in funzione di I_1, J_1.

BENE

4. Equazioni lineari di ordine superiore, a coefficienti costanti, non omogenee.

L'integrale generale di un'equazione completa si ottiene aggiungendo a quello dell'equazione omogenea associata un integrale della stessa equazione completa [cfr. (4.6) pag. 27]. Quando l'equazione e' a coefficienti costanti, per determinare un integrale $u(x)$ dell'equazione completa si utilizzano i procedimenti esposti nel n. 7. III a pag. 51, purche' il termine noto sia del tipo precisato nella proposizione c) di pag. 55, di cui sono casi particolari quelli precisati nella a) di pag. 52 e nella b) di pag. 54. Se il termine noto non e' del tipo suddetto, per determinare un integrale $u(x)$ dell'equazione completa e' necessario ricorrere al metodo di Lagrange [n. 6 pag. 34], che e' applicabile anche se l'equazione non fosse a coefficienti costanti.

Negli esercizi che seguono vi sono gruppi di equazioni che differiscono solo per il termine noto: della prima equazione del gruppo e' riportato l'integrale generale, mentre delle rimanenti, per economia di spazio, e' riportato solo un integrale $u(x)$ dell'equazione completa [l'integrale generale dell'omogenea associata si desume dalla prima equazione del gruppo].

$y''-3y'+2y=10x-11$ $[y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+5x+2]$, $y''-3y'+2y=2e^{3x}$ $[u=e^{3x}]$,

$y''-3y'+2y=e^{x}$ $[u=-xe^{x}]$

$y''+7y'+12y=10$ $[y=c_1e^{-4x}+c_2e^{-3x}+\frac{5}{6}]$, $y''+7y'+12y=12x^3+21x^2+6x+12$ $[u=x^3+1]$,

$y''+7y'+12y=e^{x}$ $[u=\frac{e^{x}}{20}]$

$y''-2y'-3y=3$ $[y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-1]$, $y''-2y'-3y=-3x^2-7x-3$ $[u=x^2+x+1]$,

$y''-2y'-3y=e^{3x}$ $[u=\frac{xe^{3x}}{4}]$, $y''-2y'-3y=(2x+1)e^{x}$ $[u=-\frac{2x+1}{4}e^{x}]$,

$y''-2y'-3y=\cos x$ $[u=-\frac{\cos x}{5}-\frac{\operatorname{sen} x}{10}]$, $y''-2y'-3y=\frac{4x-1}{x^2}e^{3x}-3$ $[u=1+e^{3x}\log|x|]$,

$y''' - 2y'' + y' = 2 \; [y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^x + 2x]$, $y''' - 2y'' + y' = e^x \; [u = \frac{1}{2}x^2 e^x]$,

$y''' - 2y'' + y' = e^x + 2x \; [u = x^2 + 4x + \frac{1}{2}x^2 e^x]$,

$y''' - 2y'' + y' = 2(x + \operatorname{sen} x) \; [u = x^2 + 4x + \operatorname{sen} x]$ ⊙

$y''' - 2y'' + 2y' = 2 \; [y = c_1 + e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + x]$, $y''' - 2y'' + 2y' = e^{2x} \; [u = \frac{e^{2x}}{4}]$

$y''' - 2y'' + 2y' = x^2 \; [u = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x]$, $y''' - 2y'' + 2y' = \cos x \; [u = \frac{1}{5}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\cos x]$,

$y''' - 2y'' + 2y' = e^x \cos x + e^{2x} + 2 \; [u = \frac{1}{4}xe^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{4}e^{2x} + x]$,

$y''' - 2y'' + 2y' = e^x(\cos^2 x + \cos 2x) \; [u = e^x(\operatorname{sen}^2 x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{5} + \frac{2\cos 2x}{5})]$ ⊙

$y^{IV} - 6y''' + 11y'' - 6y' = \operatorname{sen} x + \cos x \; [y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x} - \frac{1}{10}(\operatorname{sen} x + \cos x)]$ ⊙

$y^{IV} - y''' - 16y'' - 20y' = 20 - 36e^x \; [y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-2x} + c_4 e^{5x} + e^x - x]$ ⊙

$y^{IV} - 3y''' + 4y'' - 2y' = x + 4 \; [y = c_1 + c_2 e^x + e^x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x) - \frac{1}{4}x^2 - 3x]$ ⊙

$y^{IV} - 9y''' + 33y'' - 65y' = 5 \; [y = c_1 + c_2 e^{5x} + e^{2x}(c_3 \cos 3x + c_4 \operatorname{sen} 3x) - \frac{x}{13}]$,

$y^{IV} - 9y''' + 33y'' - 65y' = -40e^x + 5 \; [u = e^x - \frac{x}{13}]$ ⊙

$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}\frac{x-1}{x^2} \; [y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^{3x}\log|x|$ ⊙

$y''' + 3y'' = \frac{3x-1}{x^2} \; [y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x} + x\log|x|]$ ⊙

$y^{IV} - 3y''' + 2y'' = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^3} \; [y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{2x} + x\log|x|]$ ⊙

$y'' - 2y' + 5y = e^x\left[\frac{2\operatorname{sen} 2x}{x^3} - \frac{4\cos 2x}{x^2}\right] \; [y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + \frac{2}{x}e^x \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x]$ ⊙

$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) \; [y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^{3x}\operatorname{arctg} x]$ ⊙

5. Equazioni di Eulero [cfr. n.7.IV pag. 59].

Si tratta di equazioni del tipo (66) di pag. 59, che solitamente si scrivono nella forma (67). Siccome i coefficienti di una tale equazione sono funzioni definite in $\mathbb{R}-\{0\}$ (quindi non in un intervallo), l'equazione va integrata negli intervalli $]0,+\infty[$ e $]-\infty,0[$, e si trasforma in una equazione a coefficienti costanti con un opportuno cambiamento della variabile indipendente, precisamente con la sostituzione $t=\log|x|$.

Nella pratica non è necessario effettuare tale sostituzione, perché della predetta equazione a coefficienti costanti è possibile determinare direttamente l'equazione caratteristica (ed è questa che occorre per integrarla!) ponendo formalmente nell'equazione $y=x^\lambda$ [cfr. pag. 61]. Naturalmente, dopo avere scritto l'integrale generale $u=u(t)$ dell'equazione a coefficienti costanti, bisognerà tener conto della sostituzione precisata dianzi, e quindi nell'espressione di $u(t)$ bisognerà porre $t=\log|x|$.

- $x^2y''-xy'+2y=0$ $[y=|x|(c_1\cos\log|x|+c_2\,\mathrm{sen}\log|x|)]$,
- $x^2y''+xy'+4y=0$ $[y=c_1\cos\log x^2+c_2\,\mathrm{sen}\log x^2]$
- $x^2y''-xy'-3y=0$ $\left[y=\frac{c_1}{x}+c_2x^3\right.$ (1)$\left.\right]$,
- $x^2y''-2xy'+2y=0$ $[y=c_1x+c_2x^2]$,
- $x^2y''+xy'-4y=0$ $\left[y=\frac{c_1}{x^2}+c_2x^2\right]$,
- $x^2y''+10xy'+20y=0$ $\left[y=\frac{c_1}{x^5}+\frac{c_2}{x^4}\right]$,
- $x^2y''+3xy'-3y=0$ $\left[y=\frac{c_1}{x^3}+c_2x\right]$,
- $x^2y''-xy'+5y=0$ $[y=|x|(c_1\cos\log x^2+c_2\,\mathrm{sen}\log x^2)]$,

---

(1) L'integrale generale in $]-\infty,0[$ è $y=\frac{c_1}{-x}+c_2(-x)^3$, e se si pone $c_1'=-c_1$, $c_2'=-c_2$ diviene $y=\frac{c_1'}{x}+c_2'x^3$, assumendo così la stessa espressione (salvo il nome delle costanti arbitrarie) dell'integrale generale in $]0,+\infty[$. È questo il motivo per cui nell'integrale generale sopra riportato la variabile x non figura in valore assoluto.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

I procedimenti di integrazione delle equazioni non lineari conducono spesso a determinarne gli integrali in forma implicita. In tali casi occorrerebbe effettuare una discussione atta a ricavare gli integrali in forma esplicita almeno localmente: poichè la discussione in genere non è semplice, conveniamo di limitare il procedimento di integrazione alla determinazione degli integrali in forma implicita, ad eccezione del caso in cui si perviene ad una espressione del tipo:

$$\varphi(y) = g(x, c_1, \ldots, c_n) \tag{1}$$

<u>con la funzione $\varphi(y)$ invertibile ed avente per codominio tutto $\mathbb{R}$</u>. Infatti in tal caso dalla (1) si può ricavare [senza alcuna precisazione]:

$$y = \overset{-1}{\varphi}\left(g(x, c_1, \ldots, c_n)\right).$$

Per dare un'idea della discussione dianzi menzionata, la effettueremo in alcuni casi alla fine degli esercizi [fogli n. 215 e seguenti].

1. <u>Equazioni a variabili separabili</u> (6.I. pag. 651).

- $y' = \dfrac{3(3x+10)\sqrt[3]{y^2}}{x^2+8x+16}$ $\qquad \left[\, y = \left(3\log|x+4| + \dfrac{2}{x+4} + c\right)^3, \; y = 0 \,\right]$

- $y' = \dfrac{x+3}{3y^2(x^2+2x+1)}$ $\qquad \left[\, y = \sqrt[3]{\log|x+1| - \dfrac{2}{x+1} + c} \,\right]$

- $y' = \dfrac{x^3+x^2+1}{(x^4+x^2)\cos y}$ $\qquad \left[\, \operatorname{sen} y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + c \,\right]$ (1)

---

(1) A chiarimento di quanto sopra premesso, notiamo che qui per ricavare y occorrerebbe una discussione, perchè la funzione $\operatorname{sen} y$ non è invertibile. Lo stesso accadrebbe se in luogo di $\operatorname{sen} y$ ci fosse $\sqrt{y}$, perchè questa funzione è invertibile ma il suo codominio non è tutto $\mathbb{R}$.

Invece nella prima equazione abbiamo ricavato y perchè si è pervenuti ad una uguaglianza avente per primo membro la funzione $\sqrt[3]{y}$, che è invertibile ed ha per codominio tutto $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x y^2 (y^2+y+1)}{y^3+2y^2+y+1} \qquad \left[x^2 = -\frac{2}{y} + \log(y^2+y+1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + c \, , \; y=0 \right]$$

$$(x+2)^2 (x^2+2x+3) y' = (x^3+6x^2+10x+7)\sqrt{y} \qquad \left[2\sqrt{y} = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + c \, , \; y=0 \right]$$

$$y'(\cos x + 1 - \operatorname{sen} x) - 3\cos^2 y = -3 \qquad \left[\operatorname{cotg} y = -3\log\left|1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c \right] \quad ?$$

$$y'(e^{2x}+2) - y^2 e^{3x} = e^{3x} \qquad \left[\operatorname{arctg} y = e^x - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}} + c \right]$$

$$y'(1+\operatorname{sen}^2 x) = \sqrt{1-y^2}\, \operatorname{tg} x \qquad \left[\arcsin y = \frac{1}{4}\log(2\operatorname{tg}^2 x + 1) + c \, , \; y=1 \, , \; y=-1 \right]$$

$$y'(\operatorname{sen} x + 5 + 5\cos x) + \operatorname{sen}^2 y = 1 \qquad \left[\operatorname{tg} y = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 5\right| + c \right]$$

$$y'(e^{2x}+3) + y^2 e^{3x} = e^{3x} \qquad \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^x - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}} + c \right]$$

$$y'(1 - 4\operatorname{sen}^2 x) = \sqrt{1+y^2}\, \operatorname{tg} x \qquad \left[\operatorname{settsenh} y = -\frac{1}{6}\log\left|1 - 3\operatorname{tg}^2 x\right| + c \right]$$

$$y' \operatorname{sen}\frac{3y}{2} \cos\frac{y}{2} = 3x^2 \qquad \left[-\frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{4}\cos 2y = x^3 + c \right]$$

$$y' = e^{-\arcsin y} \cos x \qquad \left[e^{\arcsin y}\left(y + \sqrt{1-y^2}\right) = 2\operatorname{sen} x + c \right]$$

$$y' = \frac{1}{\cos 5y \cos 3y} \qquad \left[4\operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 8y = 16x + c \right]$$

2. Equazioni a secondo membro omogeneo [6.II. pag.653].

$$x y' - y = x \cos^2 \frac{y}{x} \qquad \left[\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \log|cx| \right]$$

$$x y' - y = x \cdot 3^{-y/x} \qquad \left[3^{y/x} = \log 3 \cdot \log|cx| \right]$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{3x^2+y^2}{x^2}} \qquad \left[y = \frac{\sqrt{3}\,(c^2x^2-1)\,x}{2|cx|} \right]$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\log y - \log x} \qquad \left[\frac{y}{x}\log\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = \log|cx| \right]$$

$y' + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh(x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 1)$ $\left[\ 2\,\mathrm{arctg}\, e^{x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-1} = x + c\ \right]$

- $y' = 2 - \cos^4(2x - y + 5)$ $\left[\ \frac{\mathrm{sen}(2x-y+5)}{3\cos^3(2x-y+5)} + \frac{2}{3}\mathrm{tg}(2x-y+5) = x + c\ \right]$

- $y' = (x-2y)^2 + \frac{1}{2}(x-2y)^4 + 1$ $\left[\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2y-x) + \frac{2y-x}{1+(x-2y)^2} = x + c\ \right]$

4. Equazioni del tipo $y' = g\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ [6.III pag. 654]

?

- $y' = \frac{x+2y-5}{2x+y-1}$ $\left[\ |x-y-2| = c^2|x-y-4|^3\ ,\ c \neq 0\ \right]$

- $y' = \frac{4x-3y-1}{3x-2y-1}$ $\left[\ |x-y| = \frac{c^2}{|2x-y-1|}\ \right]$

5. Equazioni di Bernoulli [6.IV pag. 655].

- $\frac{2}{3}y' + \frac{3y}{x^4} = \frac{e^{1/x^3}}{\sqrt{x^2+x+1}}\sqrt[3]{y}$ $\left[\ y^2 = \left(c + \mathrm{settsenh}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot e^{\frac{3}{x^3}}\ ,\ y = 0\ \right]$

- $3y' - \frac{(3x^2+1)y}{x^3+x+5} = \frac{x^3+x+5}{y^2}$ $\left[\ y = \sqrt[3]{(x+c)(x^3+x+5)}\ \right]$

- $\frac{1}{3}y' - \frac{y}{\mathrm{sen}\,x\cos x} = -\frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos x}\sqrt[3]{y^2}$ $\left[\ y = (\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{sen}\,x)^3\ ,\ y = 0\ \right]$

- $2y - 3x^3y' - (2\,\mathrm{sen}\,x + x^3\cos x)y^4 = 0$ $\left[\ \frac{1}{y} = \left(c e^{1/x^2} + \mathrm{sen}\,x\right)^{\frac{1}{3}}\ ,\ y = 0\ \right]$

- $3y' - \frac{y}{1+\cos x} = -\frac{\mathrm{sen}\,x + 1}{y^2}$ $\left[\ y = \sqrt[3]{c e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + \cos x + 1}\ \right]$ (1)

---

(1) Per quanto attiene all'equazione lineare cui si riconduce quella assegnata, si tenga conto della nota (2) del foglio n. 43.