

**ESERCIZIO SVOLTO N°1****Determinare e rappresentare graficamente il dominio della funzione**

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$$

**Trovare gli eventuali punti stazionari e gli estremi di f**

Il dominio della funzione è dato da

$$\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 0\}$$

La disequazione  $y^2 - x^2 \geq 0$  equivale a  $(y - x)(y + x) \geq 0$  e quest'ultima è verificata se i fattori  $(y - x)$  e  $(y + x)$  hanno lo stesso segno. Dunque:

$$\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \text{ e } y \geq -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \text{ e } y \leq -x\}$$

Derivando parzialmente si ottiene:

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

Si può osservare che i punti delle bisettrici  $y = x$  e  $y = -x$  non appartengono al dominio delle derivate parziali prime. Pertanto non vi sono punti stazionari.

D'altra parte si vede che  $f(x, x) = f(x, -x) = 0$  e  $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \text{dom } f$ .

In definitiva, tutti i punti appartenenti alle bisettrici  $y=x$  e  $y=-x$  ovvero i punti di coordinate  $(x, y)$  e  $(x, -y)$  sono punti di minimo assoluto per  $f$

**ESERCIZIO SVOLTO N°2****Determinare il dominio e gli eventuali punti stazionari della funzione**

$$f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2 y^2$$

**Studiare la natura degli eventuali punti stazionari trovati**

Si noti innanzitutto che la funzione è definita nell'insieme

$$\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + y > 0\}$$

che rappresenta il semipiano aperto delimitato dalla retta  $y=-1$ .

Calcoliamo ora il gradiente della funzione

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \left( 2x \log(1 + y) + 2xy^2, \frac{x^2}{1 + y} + 2x^2 y \right)$$

I punti stazionari sono i punti tali che  $\nabla f(x, y) = 0$ . Imponendo tale condizione, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x \log(1+y) + 2xy^2 = 0 \\ \frac{x^2}{1+y} + 2x^2y = 0 \end{cases}$$

Sono tutti i punti  $(0, y)$  con  $y$  arbitrario  $> -1$

$$f_{xx} = 2(\log(1+y) + y^2)$$

$$f_{xy} = 2x \left( \frac{1}{1+y} + 2y \right) = f_{yx}$$

$$f_{yy} = x^2 \left( 2 - \frac{1}{(1+y)^2} \right)$$

L'esame della matrice hessiana calcolata nei punti stazionari

$$Hf(0, y) = \begin{pmatrix} 2(\log(1+y) + y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non fornisce alcuna informazione sulla loro natura.

### ESERCIZIO SVOLTO N°3

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 - 1)$$

Non vi sono punti stazionari in quanto

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

si annulla soltanto in  $(0,0)$  che però non appartiene al dominio di  $f$  che è costituito dai punti esterni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1

### ESERCIZIO SVOLTO N°4

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

La funzione ammette l'origine  $(0,0)$  come punto critico in cui si annulla il gradiente. Si verifica facilmente che la matrice hessiana è nulla in  $(0,0)$ . Tale punto è di minimo assoluto e relativo perché  $f(x, y) \geq 0 = f(0,0)$

**ESERCIZIO SVOLTO N°5**

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$f(x, y) = x^4 - y^4$$

L'unico punto critico (0,0) presenta hessiano nullo. Esso non è né di massimo né di minimo dato che risulta

$$f(x, 0) = x^4 > 0 = g(0,0)$$

$$f(0, y) = -y^4 < 0 = g(0,0)$$

**ESERCIZIO SVOLTO N°6**

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$f(x, y) = 2y^2$$

Per i punti critici, come al solito, imponiamo che il gradiente della funzione sia uguale a zero, quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 4y)$$

La  $f_x$  vale sempre zero perché la  $f$  non dipende da  $x$ . Dalla seconda equazione ricaviamo  $y = 0$ , da cui i punti critici della funzione sono tutti i punti di coordinate  $(x; 0)$ , cioè tutti i punti dell'asse delle  $x$ .

Andiamo a calcolare l'Hessiano in questi punti. Poiché  $f_{xx} = 0$ ;  $f_{xy} = 0$ , e  $f_{yy} = 4$ , segue che  $Hf(x; 0) = 0$ . Quindi il teorema sul test delle derivate seconde non ci può dire nulla.

In tal caso, dobbiamo vedere come è fatta la funzione e cercare di capire cosa succede in un intorno di questi punti critici.

Fissato  $x = x_0$ , per il punto  $(x_0; 0)$ , in un suo qualunque intorno vale  $f(x; y) = 2y^2 = f(x_0; 0)$  (posso prendere anche un punto che ha  $y = 0$  ma  $x \neq x_0$ ). Si conclude quindi che  $(x_0; 0)$  è un punto di minimo relativo. Questo vale per tutti i punti  $(x; 0)$ , che sono, dunque, tutti punti di minimo relativo.

**ESERCIZIO SVOLTO N°7**

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Si ricercano in primo luogo i punti stazionari della funzione, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ f_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^3 + y^3) = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \mp\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi i punti stazionari sono

$$A = (0,0), B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

La matrice hessiana è

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Si ha che

$$H(B) = H(C) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\det H(B) = \det H(C) > 0$$

E

$$f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$$

allora i punti B e C risultano essere di minimo relativo.

Inoltre, dal momento che

$$H(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

ha  $\det A = 0$ . Allora si può provare a studiare la  $f$  lungo rette. Si prova che A non è né di massimo né di minimo. Infatti, per la retta  $y = x$  (ossia, per la restrizione di  $f$  all'insieme dei punti del tipo  $y = x$ ) il punto è di minimo relativo, come segue dalle seguenti considerazioni:

Se  $y = x$ , allora  $f(x, x) = h(x) = 2x^4$  per cui ovviamente  $x=0$  è un punto di minimo relativo.

Se  $y = -x$ , allora  $f(x, -x) = g(x) = 2x^4 - 8x^2$

Dato che  $g'(x) = 8x^3 - 16x$  e  $g''(x) = 24x^2 - 16$ , allora  $g''(0) = -16 < 0$  e quindi  $x = 0$  è un punto di massimo relativo.

### ESERCIZIO SVOLTO N°8

**Determinare i punti di massimo e minimo della seguente funzione**

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$$

I punti stazionari sono:

$$\begin{cases} f_x = 4x - 4x^3 = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(1 - x^2) = 0 \\ y(1 - y^2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \text{ o } x = \pm 1 \\ y = 0 \text{ o } y = \pm 1 \end{cases}$$

Si hanno nove punti critici. In particolare il punto (0,0) presenta Hessiano nullo.

Essendo  $g'(x) = 4x^3 - 6x$  e  $g''(x) = 12x^2 - 6$ , il punto di ascissa  $x=0$  è un punto di massimo relativo.

Analogo risultato si ha sulla retta  $y=0$ . Mentre se consideriamo la curva  $x=0$ , la funzione diventa

$$f(0, y) = h(y) = y^4$$

che presenta nel punto  $y=0$  un minimo relativo, di fatto, assoluto. Di conseguenza il punto  $A(0,0)$  non è né di massimo né di minimo per  $f$ .

### ESERCIZIO SVOLTO N°9

**Determinare i massimi e i minimi della funzione di due variabili**

$$z = x^4 + (y - 1)^2$$

Calcoliamo le derivate parziali rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$ :

$$f_x(x, y) = 4x^3$$

$$f_y(x, y) = 2(y - 1)$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2(y - 1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema:

$$x = 0, y = 1$$

Il punto  $(0,1)$  si candida ad essere un punto di minimo o un punto di massimo, per capire la sua natura impostiamo l'Hessiana:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{x,x}(x, y) & f_{x,y}(x, y) \\ f_{y,x}(x, y) & f_{y,y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le derivate parziali del secondo ordine che ci servono:

$$f_{x,x}(x, y) = 12x^2$$

$$f_{x,y}(x, y) = 0 = f_{y,x}(x, y)$$

$$f_{y,y}(x, y) = 2$$

La matrice hessiana è:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana è nullo nel punto (0,1) quindi il metodo fallisce miseramente. Dobbiamo procedere in altro modo ed in particolare con il metodo del segno

Consideriamo la differenza:

$$f(x, y) - f(0, 1) \geq 0$$

Nota che:

$$f(0, 1) = 0$$

quindi la precedente disequazione diventa:

$$x^4 + (y - 1)^2 \geq 0$$

Questa disequazione è soddisfatta per qualsiasi valore di x e di y, di conseguenza:

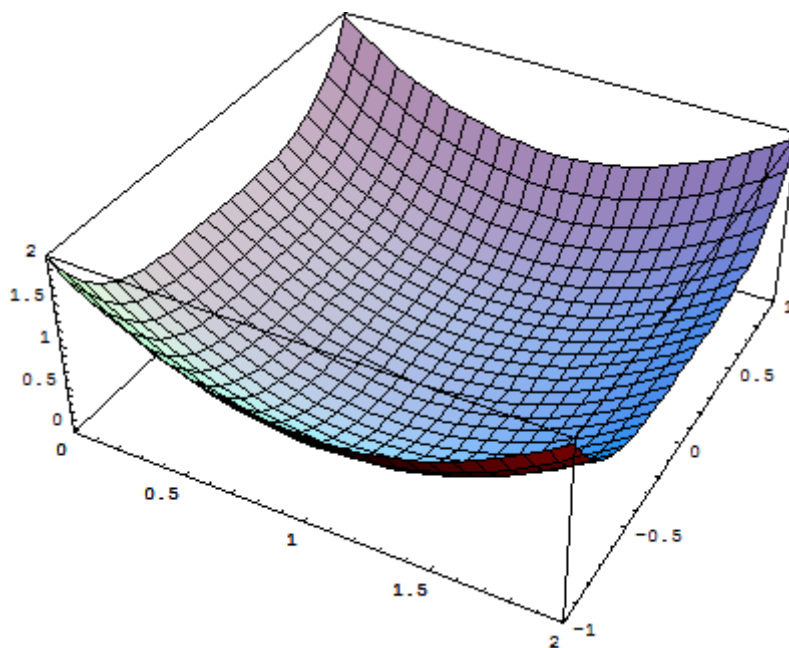
$$f(x, y) - f(0, 1) \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Quindi:

$$f(x, y) \geq f(0, 1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Per definizione di minimo assoluto scopriamo che (0,1) è un punto di minimo assoluto per la funzione.

Il grafico della funzione è:



Da cui si evince che il punto  $(0, 1)$  è di minimo assoluto. 😊

### ESERCIZIO SVOLTO N°10

**Determinare i massimi e i minimi della funzione di due variabili**

$$f(x, y) = \arcsin^2(xy)$$

**nel suo insieme di definizione.**

L'insieme di definizione è

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$$

Le derivate parziali sono

$$f_x(x, y) = \frac{2y \arcsin(xy)}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2x \arcsin(xy)}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$$

La radice è definita e non nulla se risulta:

$$1 - x^2 y^2 > 0$$

cioè

$$|xy| < 1$$

Dal momento in cui l'arcoseno si annulla se e solo se è nullo il suo argomento il mio sistema diventa

$$|xy| < 1, xy = 0$$

le cui soluzioni sono

$$S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$$

L'insieme di definizione è dettato dalla disequazione:

$$|xy| \leq 1$$

Il dominio è dunque:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$$

Rappresenta questa insieme, è la parte di piano compresa tra le iperboli di equazione

$$y = \frac{1}{x} \text{ e } y = -\frac{1}{x}.$$

Impostando il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono i punti:

$$(x_0, 0) \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$(0, y_0) \text{ con } y_0 \in \mathbb{R}$$

Conviene calcolare l'Hessiano nei punti determinati? No, non conviene, anche perché l'Hessiano è nullo.

Si può studiare il segno della funzione variazione:

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, 0) = \arcsin^2(xy)$$

La differenza tra la funzione e il valore che essa assume nei punti critici del tipo  $(x_0, 0)$  è maggiore o uguale a zero.

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f(x, y) - f(x_0, 0) = \\ &= \arcsin^2(xy) \geq 0 \implies f(x, y) \geq f(x_0, 0) \forall (x, y) \in \text{dom}(f) \end{aligned}$$

I punti  $(x_0, 0)$  sono punti di minimo relativo per la funzione  $f$  perché rispettano la definizione, anzi di più, sono punti di minimo assoluto, perché la relazione vale per ogni coppia  $(x, y)$  del dominio! 😊

Procedendo allo stesso modo per i punti  $(0, y_0)$  con  $y_0 \in \mathbb{R}$ , si scopre che anch'essi sono punti di minimo relativo.

Cosa succede sul bordo del dominio?

Sul bordo del dominio



$$\partial\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| = 1\}$$

la funzione assume il valore costante:

$$f(x_0, y_0) = \frac{\pi^2}{4} \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial\text{dom}(f)$$

Una delle tante proprietà del arcoseno è che è una funzione limitata:

$$|\arcsin(xy)| \leq \frac{\pi}{2}$$

elevando membro a membro al quadrato otterremo:

$$\arcsin^2(x, y) \leq \frac{\pi^2}{4}$$

Si ha l'uguaglianza quando  $xy = 1$  oppure  $xy = -1$  ovvero quando  $|xy| = 1$ .

La funzione  $f(x, y)$  ha massimo assoluto uguale a  $M = \frac{\pi^2}{4}$  ed è raggiunto da tutti i punti del bordo del dominio che sono punti di massimo assoluto