

Massimi e minimi vincolati di funzioni in due variabili

I risultati principali della teoria dell'ottimizzazione, il Teorema di Fermat in due variabili e il Test dell'hessiana, si applicano esclusivamente ai punti estremi di una funzione definita su un *dominio aperto*. Essi valgono anche quando il dominio non è un aperto, ma il punto in questione è comunque un *punto interno al dominio*, in quanto si possono applicare alla restrizione della funzione all'insieme dei soli punti interni al dominio. In molte applicazioni interessanti, invece, siamo condotti alla ricerca di valori estremi di una funzione definita su un insieme chiuso.

Rispetto a quella sui domini aperti, l'ottimizzazione sui domini chiusi presenta qualche difficoltà supplementare: occorre infatti una trattazione separata dei punti interni e di quelli di frontiera. Dall'altra parte vi è un indubbio vantaggio: è molto più probabile che il minimo (o massimo) esista. Il primo passo, nel processo di ottimizzazione, infatti, deve consistere nel provare che il valore estremo è assunto.

Esempi:

1. Qual è il rettangolo di area massima tra quelli che hanno perimetro assegnato p ?
2. Avendo a disposizione 12 m^2 di cartone, qual è il volume massimo di una scatola rettangolare (priva di coperchio) che si può costruire?

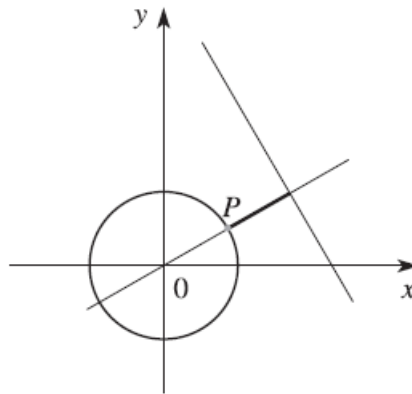
Teorema di Weierstrass

Ogni funzione continua su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato è limitata ed assume i valori massimo e minimo, ovvero esistono $(x_m, y_m) \in D, (x_M, y_M) \in D$ tali che:

$$f(x_m, y_m) \leq f(x, y) \leq f(x_M, y_M) \quad \forall (x, y) \in D$$

Es. 1

Qual è il punto del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ che si trova a minima distanza dalla retta $y = 4 - \sqrt{3}x$?



Ricordando la formula per la distanza punto-retta siamo ricondotti a trovare il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{2} |\sqrt{3}x + y - 4|$$

sul dominio $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

Essendo l'argomento del modulo sempre negativo su D , si può scrivere che

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (-\sqrt{3}x - y + 4)$$

Si tratta di una funzione ovunque differenziabile, priva di punti critici essendo una funzione lineare e $\nabla(x, y) = -(\sqrt{3}, 1)$.

Quindi il minimo di f è da cercare sulla frontiera di D , come si poteva facilmente immaginare interpretando geometricamente il problema.

Per studiare la funzione sulla frontiera ∂D di D si considera una parametrizzazione della circonferenza riconducendoci, in tal modo allo studio di una funzione di una sola variabile

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; 2\pi]$$

Ottenendo:

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \frac{1}{2} (4 - \sqrt{3} \cos t - \sin t) \quad \text{con } t \in [0; 2\pi]$$

Come prima cosa cerchiamo i punti interni all'intervallo $[0; 2\pi]$ che annullano la derivata di g :

$$g'(t) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \sin t - \cos t)$$

Si ha $g'(t) = 0$ in corrispondenza dei valori $t = \pi/6$ e $t = 7/6\pi$

Per trovare il minimo assoluto di g su $[0, 2\pi]$ dobbiamo confrontare il suo valore agli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi]$ con quello in $\pi/6$ e $7\pi/6$. Abbiamo:

$$g(0) = g(2\pi) = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}; \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1; \quad g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 3$$

Si trova così che il minimo valore di g è $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$. In conclusione il punto P del disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$ di minima distanza dalla retta $y = 4 - \sqrt{3}x$ è il punto di coordinate $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Teorema di Weierstrass (modificato)

Una funzione continua $f: R^2 \rightarrow R$ e tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

assume il suo minimo.

Analogamente, se il limite è $-\infty$ allora la funzione assume il suo massimo.

Dimostrazione

Fissiamo un raggio R sufficientemente grande perché si abbia

$$x^2 + y^2 > R \implies f(x,y) > f(0,0)$$

e minimizziamo la funzione nel disco chiuso centrato nell'origine e di raggio R .

Il Teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un punto di minimo $m(x_m, y_m)$: si avrà quindi $f(x_m, y_m) \leq f(x, y)$ per tutti i punti del disco e quindi, in particolare, nel centro dello stesso. Si avrà quindi

$f(x_m, y_m) \leq f(0,0)$. D'altra parte, al di fuori del disco di raggio R abbiamo

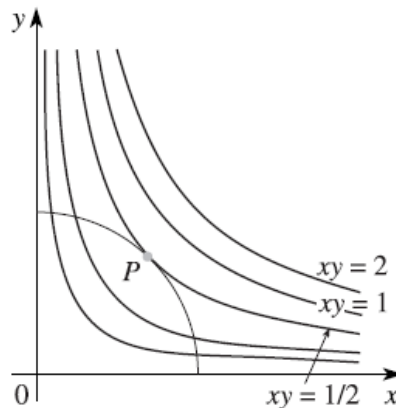
$$f(x,y) > f(0,0) \geq f(x_m, y_m)$$

Da qui si può concludere che il valore minimo di f su tutto R^2 è $f(x_m, y_m)$

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Capita spesso di voler determinare gli estremi di una funzione $f(x, y)$ quando il punto (x, y) verifica una condizione aggiuntiva, della forma $g(x, y) = k$. Si parla allora di *massimi e minimi vincolati*, e l'insieme di livello $g(x, y) = k$ prende il nome di vincolo.

Ad esempio cerchiamo il massimo di $f(x, y) = xy$ quando (x, y) si muove in $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.



Disegniamo il vincolo e qualche insieme di livello di f , cioè

$$E_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = c\}$$

per diversi valori di c : *massimizzare f con il vincolo Z significa trovare il più grande valore di c tale che l'insieme E_c interseca Z* . Come è evidente dalla Figura, quando questo avviene in un punto (x_0, y_0) , E_c e Z hanno la stessa retta tangente in (x_0, y_0) . Nel caso raffigurato, la curva di livello $f(x, y) = 1/2$ è tangente al vincolo nel punto $P = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Ricordiamo che il gradiente di f in (x_0, y_0) , è ortogonale a E_c e che $\nabla g(x_0, y_0)$, è ortogonale all'insieme $g(x, y) = k$: questo significa che i vettori gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, e che $\nabla g(x_0, y_0)$, sono paralleli, cioè

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Se (x_0, y_0) è un punto di estremo per f nell'insieme

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: g(x, y) = k\}, \text{ con } \nabla g \neq 0$$

allora $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

In concreto, i punti di massimo (e di minimo) della funzione $f(x, y)$ con il vincolo $g(x, y) = k$, sono *punti critici per la funzione di tre variabili*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k]$$

La variabile λ prende il nome di *moltiplicatore di Lagrange*, così come si chiama *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* la ricerca degli estremi di f con il vincolo $g = k$ attraverso la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0 \\ g_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Per la determinazione della natura di tali punti si ricorre al determinante hessiano relativo alla funzione $L(x, y, \lambda)$

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che se $P(x_0, y_0, \lambda)$ è un punto stazionario per la funzione di Lagrange, allora in tale punto si ha:

- Un minimo vincolato se $H(x_0, y_0, \lambda) < 0$
- Un massimo vincolato se $H(x_0, y_0, \lambda) > 0$

Es. 2

Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = xy$ con il vincolo $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Come prima cosa scriviamo il vincolo nella forma $g(x, y) = 0$ con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; osserviamo che f e g sono di classe C^1 e che la condizione $\nabla g(x, y) \neq 0$ è verificata in tutti i punti del vincolo.

Si ha:

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo basta ricavare $\lambda = \frac{y}{2x}$ dalla prima equazione e sostituire nella seconda ottenendo $x^2 + y^2 = 0$, ricavando $x = \pm y$

Si ottengono così due sistemi ognuno con due soluzioni

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

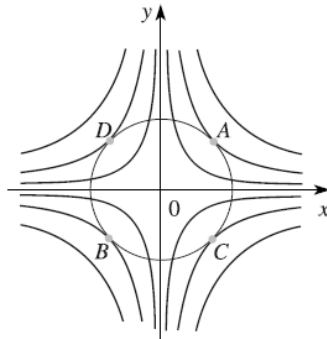
Abbiamo trovato quattro candidati possibili: quali tra questi sono punti di massimo vincolato per f ? Per scoprirlo basta calcolare i valori di f in tali punti e selezionare quello (o quelli) che si trovano alla quota più alta.

Si ha

$$f(A) = f(B) = \frac{1}{2}, \quad f(C) = f(D) = -\frac{1}{2}$$

Dunque i punti A e B rappresentano punti di massimo vincolato, mentre C e D sono punti di minimo di f

Graficamente, se si considera la curva di livello costituita dall'iperbole di equazione $xy = 1/2$, essa risulta essere tangente alla curva $x^2 + y^2 = 1$ nei punti A e B. Analogamente se considero la curva di livello $xy = -1/2$



L'esempio appena visto mette in luce il *significato geometrico del metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:

I valori estremi di f con il vincolo $g = k$ corrispondono a curve di livello di f che sono tangenti al vincolo.

Es. 3

Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + xy - 8x + 10$$

Sottoposta al vincolo lineare

$$g(x, y) = 2x + y - 2 = 0$$

Quando il vincolo è lineare, la ricerca dei punti di massimo e di minimo vincolati risulta estremamente semplice.

Dall'equazione del vincolo si esplicita una variabile in funzione dell'altra e, sostituendola nell'espressione della funzione data, si ottiene una funzione in una sola variabile.

Dunque, se i punti ricercati esistono, vanno individuati tra le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} z = 2x^2 - y^2 + xy - 8x + 10 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x^2 - y^2 + xy - 8x + 10 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4x^2 + 2x + 6 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$$

A questo punto basta studiare la funzione $z = -4x^2 + 2x + 6$:

$$\frac{dz}{dx} = -8x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -8 < 0$$

Il punto $x = \frac{1}{4}$ è un punto di massimo relativo per la funzione ottenuta dal sistema. In corrispondenza di tale valore, si ottiene $y = \frac{3}{2}$

Es. 4

Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = y + x$$

sottoposta al vincolo non lineare rappresentato dalla funzione:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$$

Per la ricerca dei massimi e minimi della funzione si consideri il generico piano parallelo al piano coordinato xy di equazione $z = k$. Questo piano intercetta sulla superficie della funzione assegnata $z = y + x$ una curva γ che, nel caso in esame è una retta, data dal seguente sistema:

$$\begin{cases} z = y + x \\ z = k \end{cases} \Rightarrow y = -x + k$$

L'espressione ottenuta rappresenta la proiezione sul piano xy della suddetta curva γ . Quest'ultima, in corrispondenza dei punti di massimo e di minimo, è tangente alla curva che rappresenta la funzione sottoposta al vincolo assegnato. Ne segue che anche le proiezioni di γ sul piano xy sono tangenti alla proiezione sul piano xy della curva che rappresenta la funzione vincolata, la quale coincide con la curva che rappresenta il vincolo. I punti di tangenza sono, pertanto, dati dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 \\ y = -x + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2kx + (k^2 - 4k - 1) = 0 \\ y = -x + k \end{cases}$$

Imponendo poi la condizione di tangenza si ha:

$$\Delta = -k^2 + 8k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 4 - 3\sqrt{2}, \quad k_2 = 4 + 3\sqrt{2}$$

Sostituendo tali valori nelle equazioni della funzione e del vincolo si determinano i punti di massimo e minimo vincolato

Es. 5

Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x + y^2$$

sottoposta al vincolo non lineare rappresentato dalla funzione:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

Si considera la funzione di Lagrange associata:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

Se ne determinano le derivate parziali prime

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$$

I punti stazionari della L sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ y(1 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, di cui si omettono gli ovvi passaggi, si ottengono i punti

$$P_1 = \left(5, 0, -\frac{1}{10}\right); \quad P_2 = \left(-5, 0, \frac{1}{10}\right); \quad P_3 = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{11}, -1\right); \quad P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{11}, -1\right)$$

Si calcolano le derivate parziali seconde:

$$\begin{array}{lll} L_{xx} = 2\lambda & L_{xy} = 0 & L_{x\lambda} = 2x \\ L_{yx} = 0 & L_{yy} = 2 + 2\lambda & L_{y\lambda} = 2y \\ L_{\lambda x} = 2x & L_{\lambda y} = 2y & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{array}$$

E si calcola il determinante hessiano

$$H = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2 + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix} = -8[x^2(1 + \lambda) + \lambda y^2]$$

Per ogni punto stazionario si ha:

$$H\left(5, 0, -\frac{1}{10}\right) = -180 < 0 \Rightarrow \text{minimo relativo}$$

$$H\left(-5, 0, \frac{1}{10}\right) = -220 < 0 \Rightarrow \text{minimo relativo}$$

$$H\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{11}, -1\right) = 198 > 0 \Rightarrow \text{massimo relativo}$$

$$H\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{11}, -1\right) = 198 > 0 \Rightarrow \text{massimo relativo}$$

Es. 6 - Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x$$

sottoposta al vincolo non lineare rappresentato dalla funzione:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Si considera la funzione lagrangiana associata:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

e se ne determinano le derivate parziali prime

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2 + 4y^2 - 4 + 2\lambda x \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 8xy + 2\lambda y \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

I punti stazionari sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 4 + 2\lambda x = 0 \\ 8xy + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 4 + 2\lambda x = 0 \\ y(4x + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i seguenti punti critici:

$$P_1\left(1, 0, \frac{1}{2}\right); P_2\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right); P_3(0, 1, 0); P_4(0, -1, 0)$$

Le derivate seconde della funzione sono:

$$\begin{array}{lll} L_{xx} = 6x + 2\lambda & L_{xy} = 8y & L_{x\lambda} = 2x \\ L_{yx} = 8y & L_{yy} = 8x + 2\lambda & L_{y\lambda} = 2y \\ L_{\lambda x} = 2x & L_{\lambda y} = 2y & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{array}$$

Il determinante hessiano è espresso da:

$$H = \begin{bmatrix} 6x + 2\lambda & 8y & 2x \\ 8y & 8x + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

L'hessiano, nei quattro punti critici, vale:

$$H\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) = -36 < 0$$

$$H\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right) = 36 > 0$$

$$H(0, 1, 0) = 0$$

$$H(0, -1, 0) = 0$$

Questi risultati ci permettono di asserire che il punto $(1,0)$ è un minimo relativo vincolato; il punto $(-1,0)$ è un punto di massimo relativo vincolato. Per gli altri due punti nulla può dirsi con il test dell'hessiana.

Per avere maggiori informazioni, bisogna approfondire l'indagine studiando localmente la funzione sottoposta al vincolo dato.

Si ricava, dal vincolo, $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow z = f(x, y) = x^3 + 4x(1 - x^2) - 4x = -3x^3$

Derivando una prima e una seconda volta, si ricava che per $x = 0$ (e $y = \pm 1$) si ha un flesso per la funzione $z(x)$ e quindi lo saranno anche per la funzione $f(x, y)$.

Es. 7 - Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$

sottoposta al vincolo non lineare rappresentato dalla funzione:

$$g(x, y) = \cos x - \cos y + 1 = 0$$

La funzione lagrangiana associata è:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = \sin x + \sin y + \lambda(\cos x - \cos y + 1)$$

Se ne determinano le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \cos x + \lambda \sin x \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \cos y + \lambda \sin y \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = \cos x - \cos y + 1$$

I punti stazionari sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x - \lambda \sin x = 0 \\ \cos y + \lambda \sin y = 0 \\ \cos x - \cos y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \lambda \sin x \\ \cos y = -\lambda \sin y \\ \cos x - \cos y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos x = \lambda \sin x \\ \cos y = -\lambda \sin y \\ \cos x - \cos y = -1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\lambda} \\ \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\lambda} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \mp \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} = -1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\lambda} \\ \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\lambda} \\ \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\lambda} \\ -\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\lambda} \\ \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} y = -\sqrt{3} \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \cup \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} y = \sqrt{3} \\ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + n\pi \\ y = \frac{2}{3}\pi + m\pi \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi + n\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + m\pi \\ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= -\sin x - \lambda \cos x & L_{xy} &= 0 & L_{x\lambda} &= -\sin x \\ L_{yx} &= 0 & L_{yy} &= -\sin y + \lambda \cos y & L_{y\lambda} &= \sin y \\ L_{\lambda x} &= -\sin x & L_{\lambda y} &= \sin y & L_{\lambda\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

Il determinante hessiano vale:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} -\sin x - \lambda \cos x & 0 & -\sin x \\ 0 & -\sin y + \lambda \cos y & \sin y \\ -\sin x & \sin y & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sin^2 x (\sin y - \lambda \cos y) + \sin^2 y (\sin x + \lambda \cos x) \end{aligned}$$

che nei punti critici assume valori positivi.

Si può pertanto concludere che i punti $\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi; \frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)$ sono punti di massimo vincolato per la funzione assegnata.

Es. 8 - Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xye^{-xy}$$

nel dominio

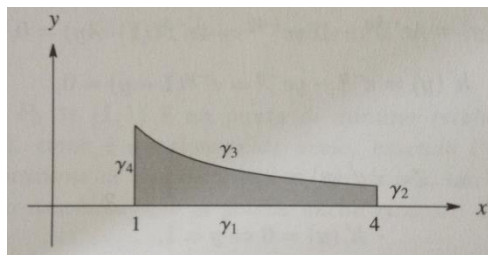
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x \leq 4, y \geq 0, |xy| \leq 1\}$$

Ricerchiamo i punti critici per f:

$$\begin{cases} f_x = ye^{-xy} + xy(e^{-xy})(-y) = 0 \\ f_y = xe^{-xy} + xy(e^{-xy})(-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Le soluzioni del sistema sono il punto (0,0) e gli infiniti punti del tipo $\left(k, \frac{1}{k}\right)$ con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 1 \leq k \leq 4$.

Il dominio richiesto per il calcolo dei massimi e minimi assoluti è quello indicato in figura.



Scriviamo le equazioni dei quattro contorni di D:

$$\gamma_1: \begin{cases} y = 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}; \quad \gamma_2: \begin{cases} x = 4 \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \end{cases}; \quad \gamma_3: \begin{cases} xy = 1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}; \quad \gamma_4: \begin{cases} x = 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Inoltre, possiamo notare che:

$$f|_{\gamma_1} = 0, \quad f|_{\gamma_2} = 4ye^{-4y} = g(y), \quad f|_{\gamma_3} = e^{-1}, \quad f|_{\gamma_4} = ye^{-y} = h(y)$$

Pertanto la ricerca dei massimi e minimi vincolati a γ_2, γ_4 si riconduce alla ricerca di massimi e minimi delle funzioni $g(y)$ e $h(y)$ in una variabile:

$$g'(y) = 4e^{-4y} - 16ye^{-4y} = 4e^{-4y}(1 - 4y) = 0$$

$$h'(y) = e^{-y} - ye^{-y} = e^{-y}(1 - y) = 0$$

E quindi:

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Da cui si ottengono due punti: $B\left(4, \frac{1}{4}\right)$ e $C(1,1)$

Analizziamo ora il segno della derivata seconda in questi punti:

$$g''\left(\frac{1}{4}\right) = -32e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -16e^{-1} < 0$$

$$h''(1) = -e^{-1} < 0$$

I punti B e C sono punti di massimo relativo vincolato per $f(x, y)$.

Inoltre,

$$f(B) = e^{-1}, f(C) = e^{-1}$$

Riassumendo, si ottiene il minimo assoluto vincolato negli infiniti punti di γ_1 in cui $f(x, y) = 0$ e il massimo assoluto vincolato negli infiniti punti di γ_3 in cui $f(x, y) = e^{-1}$.

Es. 9 - Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x$$

sotto le condizioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{2} \quad e \quad y + z = 1$$

La funzione è definita in tutto lo spazio euclideo R^3 . Il vincolo è costituito dall'intersezione tra la superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ed il piano $y + z = 1$, per cui è una circonferenza. Esso è un compatto e, per il teorema di Weiestrass, la funzione è in esso dotata di massimo e minimo assoluto.

Poniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{2} = 0 \quad e \quad y + z - 1 = 0$$

Si consideri la funzione lagrangiana associata:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) = x + \lambda_1 \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{2}\right) + \lambda_2 (y + z - 1)$$

Si determinino le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda_1 x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda_1 y + \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda_1 z + \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = y + z - 1$$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda_1 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = y + z - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2\lambda_1} \\ y = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \\ \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1^2} - \frac{5}{2} = 0 \\ -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2\lambda_1} \\ y = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \\ z = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \\ \lambda_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \mp\sqrt{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

A questo punto si può stabilire banalmente che per la funzione $f(x, y, z) = x$, il punto avente ascissa $-\sqrt{2}$ è il punto di minimo cercato; mentre il punto avente ascissa $\sqrt{2}$ è il punto di massimo cercato.

Es. 10 - Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y,) = e^x + e^y$$

sotto la condizione

$$y + x = 2$$

La funzione data è definita in tutto il piano cartesiano.

Si consideri la funzione lagrangiana associata:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = e^x + e^y + \lambda(y + x - 2)$$

Le derivate parziali prime sono:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e^x + \lambda \quad \frac{\partial L}{\partial y} = e^y + \lambda \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2$$

I punti critici della funzione lagrangiana sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = e^x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = e^y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = e^y \\ e^y + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ e^y + \lambda = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \lambda = -e \\ y = 1 \end{cases}$$

Abbiamo un unico punto $(1, 1, -e)$. Analizziamone la natura attraverso le derivate seconde e la matrice hessiana.

$$\begin{array}{lll} L_{xx} = e^x & L_{xy} = 0 & L_{x\lambda} = 1 \\ L_{yx} = 0 & L_{yy} = e^y & L_{y\lambda} = 1 \\ L_{\lambda x} = 1 & L_{\lambda y} = 1 & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{array}$$

$$H = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 1 \\ 0 & e^y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -(e^x + e^y) < 0$$

In conclusione, il punto $(1, 1)$ è un punto di minimo relativo.

Esercizi proposti

Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo assoluti delle seguenti funzioni $f(x, y)$ sotto i vincoli assegnati $g(x, y)$

1	$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 3y + 9, \quad g(x) = x^2 + y^2 - 4$	$m\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right); M\left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$
2	$f(x, y) = x^2 + 2y^2, \quad g(x) = x^2 + y^2 - 1$	$m_{1,2}(\pm 1, 0); M_{1,2}(0, \pm 1)$
3	$f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x, \quad g(x) = x^2 + y^2 - 1$	$m(1, 0); M(-1, 0)$
4	$f(x, y) = ye^{y^2 - x^2}, \quad g(x) = x + y - 1$	$m\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

5	$f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 16$	$m_1\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); m_2\left(\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ $M_1\left(-\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right); M_2\left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
6	$f(x, y) = \sin x + \sin y, \quad g(x, y) = \cos x - \cos y - 1$	
7	$f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1$	
8	$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = x^2y - 2$	$m_{1,2}(\pm\sqrt{2}, 1)$
9	$f(x, y) = \frac{3}{x} + \frac{x}{y}, \quad g(x, y) = x^4 + y$	$m(-1, -1); M(1, -1)$
10	$f(x, y) = x + y^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x^2 + y^2)^2 \leq x^2\}$	$m(-1, 0); M(1, 0)$
11	$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 9y^2 \leq 1\}$	
12	$f(x, y) = \sin(y - x^2) + \cos x^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -2 \leq x \leq 2, x^2 - 4 \leq y \leq 0\}$	
13	$f(x, y) = \arctg(x + y), D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\right\}$	
14	$f(x, y) = x^2 + 3y, D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$	$m(0, -3); M(0, 3)$
15	$f(x, y) = 1 + x + y + \sqrt{y^2 - x}, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -y \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2\}$	
16	$f(x, y, z) = y, \quad g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$	
17	$f(x, y, z) = z, \quad g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2 = x + y - z$	
18	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, g(x, y, z) = x^2 + yz - 9$	
19	$f(x, y, z) = x \log x + y^2 + z \log z; \quad g(x, y, z) = x + z - 8$	

20	$f(x, y, z) = xye^{-z^2}, \quad g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - z^2 - 1$
21	$f(x, y) = y(y + x), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq 4\}$
22	$f(x, y, z) = 5 + z, \quad g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 9, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1$
23	$f(x, y) = xye^{-xy}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$
24	$f(x, y) = x + y - 1, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \leq 0, y \geq x - 1\}$
25	$f(x, y) = yx^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$
26	$f(x, y) = x^2 - y^2 - 4, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 - 2x \leq 1\}$
27	$f(x, y) = \log(x^2 + y^2), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
28	$f(x, y) = \arctg xy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 2x^2 + y^2 \leq 1\}$
29	$f(x, y) = \log(2\sqrt{xy}), \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4x + 4y - \frac{15}{2} \right\}$
30	$f(x, y) = (x + 3y)^3, \quad D$ $= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 16y^2 \leq 16, x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{4} \geq 0, x^2 + y^2 + 2x + \frac{3}{4} \geq 0 \right\}$

Teorema di Dini

Il Teorema di Dini ci permette di stabilire in quali circostanze l'equazione $g(x, y) = 0$ definisca implicitamente una funzione vicino ad un punto assegnato (x_0, y_0)

Teorema

Sia g una funzione di classe $C^1(A)$ con A aperto e sia dato un punto $(x_0, y_0) \in A$ tale che

1. $g(x_0, y_0) = 0$
2. $g_y(x_0, y_0) \neq 0$

allora esistono due intervalli centrati in x_0 e y_0 , rispettivamente $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $J = (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ e una funzione $\varphi: I \rightarrow J$, tali che

- $y_0 = \varphi(x_0)$
- $g(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in I;$
- φ è a sua volta di classe $C^1(I, J)$ e la sua derivata vale

$$\varphi'(x) = \frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))}, \forall x \in I$$

- tale funzione è unica, nel senso che
- $$g(x, y) = 0 \text{ in } I \times J \rightarrow y = \varphi(x)$$

Es. 11 - Applicabilità del teorema di Dini

Consideriamo l'equazione

$$xe^y + ye^x = 0$$

Se scegliamo il punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ risultano verificate le ipotesi del teorema di Dini.

Infatti, posto $g(x, y) = xe^y + ye^x$, g risulta una funzione di classe C^1 . Inoltre, $g(0, 0) = 0, g_y(0, 0) = 1$. In base al teorema di Dini, l'equazione definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intervallo contenente $x = 0$ e il suo grafico contiene tutte le soluzioni dell'equazione $xe^y + ye^x = 0$ nei pressi dell'origine.

Es. 12- Controesempio

L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ non definisce univocamente una funzione implicita vicino all'origine.

Infatti l'insieme delle soluzioni di tale equazione è costituito dalla due rette $y = x$ e $y = -x$.

Si ha

$$g_y(0, 0) = g_x(0, 0) = 0$$

e il teorema di Dini non si può applicare.

Tuttavia tale risultato è applicabile vicino a un punto della forma (x_0, y_0) purché $x_0 \neq 0$.

Nei pressi di tali punti le soluzioni dell'equazione $x^2 - y^2 = 0$ formano effettivamente il grafico di una funzione della variabile x (ovvero della variabile y). Occorre però rimanere in un quadrato

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Questo esempio illustra la natura locale del teorema di Dini.

Es. 13

Consideriamo l'equazione

$$g(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$$

Per cercare qualche soluzione, poniamo dapprima $x = 0$:

$$g(0, y) = y^4 - y^2 = y^2(y^2 - 1) = 0$$

da cui ricaviamo tre valori di y : -1, 0, 1.

Questo significa che le tre coppie $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ sono soluzioni dell'equazione $g(x, y) = 0$

Per applicare il teorema del Dini, calcoliamo le derivate parziali di g :

Es. 14 - Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$

nell'insieme $D = \{(x, y): |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

La regione in cui ottimizzare la funzione è il quadrato chiuso di lato 2 che ha due vertici nei punti $(1, 1)$, $(-1, -1)$: si tratta di un insieme chiuso e limitato, la funzione f è continua e dunque il Teorema di Weierstrass assicura l'esistenza in D di un punto di massimo e di un punto di minimo. Vediamo due diversi modi per trovarli.

I metodo.

Costruiamo l'insieme dei valori candidati ad essere massimi o minimi, seguendo la procedura enunciata qui accanto. Cominciamo col cercare eventuali punti critici di f che non cadono sulla frontiera ∂D : in tali punti il gradiente di f si annulla. Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - 1 = 0 \\ f_y(x, y) = 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ interno a D , in cui vale $-1/2$

Altri punti li cerchiamo sulla frontiera. La frontiera è formata dai quattro segmenti:

$$S_1 = \{(x, y): x = 1, |y| \leq 1\}, \quad S_2 = \{(x, y): y = 1, |x| \leq 1\}, \quad S_3 = \{(x, y): x = -1, |y| \leq 1\}, \quad S_4 = \{(x, y): y = -1, |x| \leq 1\},$$

Ristretta a S_1 la funzione diventa $g_1(y) = f(1, y) = y^2 - y$ e dobbiamo cercare i suoi estremi nel segmento $[-1, 1]$.

A questo scopo basta cercare eventuali punti in cui $g_1'(y) = 0$ per $y \in (-1, 1)$ e confrontare i valori di

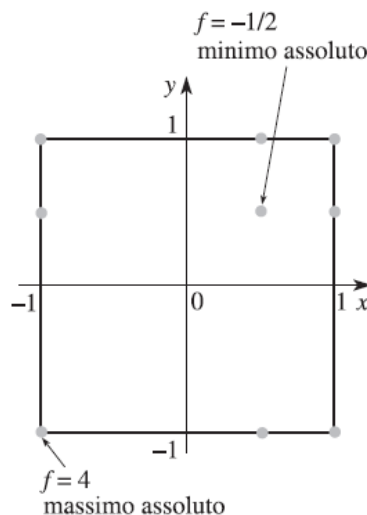
g_1 in questi punti coi valori assunti agli estremi dell'intervallo. Essendo $g'_1(y) = 2y - 1$ si ha $g'_1(y) = 0$ soltanto per $y = 1/2$ e $g_1(1/2) = -1/4$. Si ha poi $g_1(-1) = 2$ e $g_1(1) = 0$: dunque il valore massimo di g_1 è 2 e il suo valore minimo è $-1/4$. Ripetiamo l'analisi per f ristretta a S_2 ; si ha $g_2(x) = x^2 - x$ da studiare per $x \in [-1, 1]$ e dunque si può sfruttare l'analisi precedente (rinominando x con y) per trovare altri due punti candidati a essere estremi assoluti di f in D : il punto $(1/2, 1)$ in cui f vale $-1/4$ e il punto $(-1, 1)$ a quota 2. Proseguiamo l'analisi su S_3 dove si ha $g_3(y) = f(-1, y) = 2 + y^2 - y$ da studiare in $[-1, 1]$.

Si ha $g'_3(y) = 2y - 1 = 0$ per $y = 1/2$, con $g_3(1/2) = 7/4$; agli estremi dell'intervallo invece, $g_3(-1) = 4$ e $g_3(1) = 2$. Su S_3 dobbiamo quindi considerare i punti $(-1, -1)$ e $(-1, 1/2)$ in cui f vale rispettivamente 4 e $7/4$.

Infine, su S_4 si ha $g_4(x) = f(x, -1) = 2 + x^2 - x$; sfruttando il caso precedente si trova che il massimo di g_4 è in $x = -1$ a quota 4 e il suo minimo vale $7/4$, assunto in $x = 1/2$. Riassumiamo tutti i valori candidati trovati:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f(1, -1) = f(-1, 1) = 2, \quad f\left(1, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{4}, \quad f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{7}{4}, \quad f(-1, -1) = 4$$

Dal confronto di questi valori, il massimo di f in D è 4, assunto in $(-1, -1)$, il minimo è $-1/2$ assunto in $(1/2, 1/2)$.



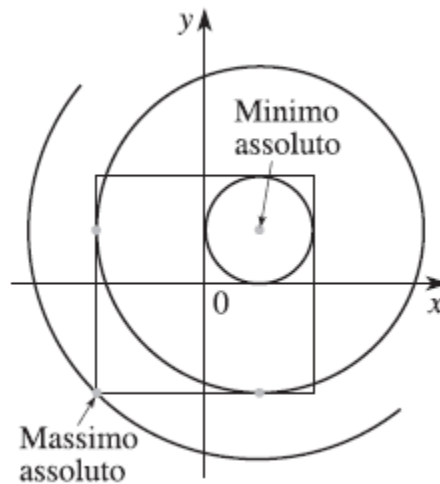
Il metodo

Gli insiemi di livello della funzione da ottimizzare sono facili da disegnare; si ha infatti

$$f(x, y) = x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

Dunque l'insieme di livello E_c è semplicemente la circonferenza centrata in $(1/2, 1/2)$ e raggio $\sqrt{c + 1/2}$.

Ma allora il problema può essere risolto graficamente mediante il metodo degli insiemi di livello: il minimo valore di f in D si avrà in corrispondenza al più piccolo c per cui E_c interseca l'insieme D , mentre il massimo di f si avrà per il più grande c per cui $E_c \cap D \neq \emptyset$



Il grafico aiuta a rispondere alla domanda:

$-1/2$ è il valore di minimo, con $E_{-1/2}$ ridotto al solo punto $(1/2, 1/2)$; il valore massimo è 4, essendo E_4 la circonferenza centrata in $(1/2, 1/2)$ e passante per il punto $(-1, -1)$.