Forme differenziali lineari

Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \to R$ funzioni continue in Ω. Si definisce forma differenziale ω in Ω l'espressione

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

Data la curva orientata semplice e regolare γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si chiama integrale della forma differenziale lineare (o anche integrale curvilineo di seconda specie), lungo la curva γ, il numero

$$\int_a^b (A\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + B\left(x(t), y(t), z(t)\right)y'(t) + C\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t))dt$$

Tale espressione viene anche indicata:

$$\int_\gamma A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

o, anche

$$\int_\gamma \omega$$

Per una forma differenziale si possono definire le seguenti operazioni:

I – Dato un vettore $r(r_1, r_2)$ e un punto $(x, y) \in \Omega$, il prodotto scalare tra ω ed r è: $\omega \cdot r = A(x, y)r_1 + B(x, y)r_2$

II – dato uno scalare $c \in R$ ed una funzione definita in Ω e a valori in R, si definisce la moltiplicazione della forma differenziale c per f nel modo seguente: $c \cdot \omega = cXdx + cYdy$ e $f \cdot \omega = (fX)dx + (fY)dy$;

III – date due forme differenziali ω_1 e ω_2 si definisce addizione di ω_1 e ω_2 la seguente forma:

$$\omega_1 + \omega_2 = (X_1dx + Y_1dy) + (X_2dx + Y_2dy) = (X_1 + X_2)dx + (Y_1 + Y_2)dy$$

Teorema

La formula

$$\int_a^b (A\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + B\left(x(t), y(t), z(t)\right)y'(t) + C\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t))dt$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Nel caso di una curve orientata, semplice regolare γ, poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati.

Definizione di forma differenziale esatta

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ si dice esatta se è il differenziale di qualche funzione, in altre parole, se esiste una funzione detta primitiva della forma ω:

$$f: A \to R$$

di classe C^1 tale che:

$$\omega = df$$

o più esplicitamente se $\forall x \in A$:

$$a_k(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \ \ \forall k = 1,2, \dots, n$$

Definizione di forma differenziale chiusa

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ e di classe $C^1(A)$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Osservazione

Se una forma differenziale di classe C^1 è esatta, allora è chiusa; in generale non vale il viceversa. La condizione di essere chiusa, senza opportune ipotesi sul dominio della forma differenziale, non assicura che la forma sia esatta.

Un particolare tipo di insieme ci permette di stabilire alcune importanti proprietà per le forme differenziali, se definite su questi insiemi. Si tratta degli **insiemi connessi.**

Caratterizzazione delle forme differenziali esatte

Dato un aperto connesso $A \subset R^2$ e data una forma differenziale lineare ω di classe C^0in A, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

I - ω è esatta;

II – Se P_0 e P sono due punti qualunque in A e γ_1 e γ_2 sono due curve generalmente regolari orientate contenute in A, che hanno entrambe come primo estremo P_0 e come secondo estremo P, allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

vale a dire che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi e non dal cammino percorso;

III – se γ è una qualunque curva generalmente regolare, chiusa e contenuta in A, allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Integrali curvilinei di forme differenziali lineari

ES. 9

Determinare, se possibile, una primitiva della forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy}$$

Dalla definizione, segue che dobbiamo determinare, se esiste, una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$ ovvero tale che:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Integriamo la prima rispetto a x:

$$f(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dx = log\,(x^2+y^2) + c(y)$$

Deriviamo la f così trovata rispetto a y ed uguagliamo il risultato con la seconda delle due equazioni:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Da cui segue che:

$$c'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y) = c, \forall c \in R.$$

Dunque una primitiva di ω è:

$$f(x,y) = log(x^2+y^2) + c$$

e quindi la forma differenziale è esatta

ES. 10

Determinare, se possibile, una primitiva della forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = ydx + 2xdy}$$

Dalla definizione, dobbiamo determinare, se esiste, una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$ ovvero tale che:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x$$

Integriamo la prima delle due rispetto a x:

$$f(x,y) = \int y dx = xy + c(y)$$

dove $c(y)$è una funzione della sola variabile y. Deriviamo ora la f rispetto a y ed uguagliamo il risultato con la seconda delle due relazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + c'(y) = 2x$$

da cui segue che

$$c'(y) = x$$

Si può osservare che l'ultima uguaglianza genera un assurdo, dovendo essere la c funzione della sola variabile y. Pertanto, non essendo possibile determinare una primitiva della forma differenziale segue che essa non è esatta.

Teorema

Sia ω una forma differenziale continua in un aperto connesso A. condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che, per ogni curva chiusa γ regolare a tratti e con sostegno in A, risulti:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

Teorema

Se A è un aperto semplicemente connesso di R^n e ω è una forma differenziale chiusa in A, allora ω è esatta in A.

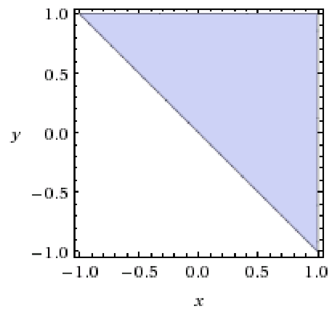
ES. 11

Dimostrare che la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{3x+y}{\sqrt{x+y}}dx - \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}}dy}$$

è esatta.

La forma differenziale è definita in un insieme semplicemente connesso. (Come si può vedere intuitivamente è stellato rispetto a ogni suo punto).



Inoltre, si ha che:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

ES. 12

Dimostrare che la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{3x+y}{\sqrt{x+y}}dx - \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}}dy}$$

è esatta.

Calcolare l'integrale curvilineo delle seguenti forme differenziali estesi alle curve indicate

1	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{1}{1+x^2}ds - cos^2 y ds$	$\gamma = grafico\ di\ arctanx;$ $Q', Q''\ punti\ di\ \gamma\ di\ ascisse\ 0, \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$
2	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} \left[y - e^{\sqrt[3]{\frac{3x+1}{2}}}\left(\sqrt[3]{\frac{3x}{2}-1}\right)\right]dx + \frac{3x+1}{2}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \frac{2log^3 - 1}{3} \\ y = t(logt - 1) \end{cases} t \in [1, e]$	$9e - 24$
3	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} \frac{1}{logy}ds + \left(y - e^{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)ds$	$\gamma = grafico\ di\ e^{\sqrt{x^2-3x+2}},$ $Q' = P(0), Q'' = P(1)$	$log(3 - 2\sqrt{2})$
4	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} logx dy$	$\gamma: \begin{cases} x = e^{sen^4 t cos^2 t} \\ y = sent \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{2}{35}$
5	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{x^3}{1+x^3-2y\sqrt{1+y^2}}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{sen2t} \\ y = sent \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$	$\frac{7}{12}$
6	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{(1+\sqrt[3]{y})(3\sqrt[3]{y^2}+e^x-1)}{(e^x+1)(1+\sqrt[3]{y^2})}dx$	$\gamma: \begin{cases} x = \log(1+t) \\ y = t^3 \end{cases} t \in [0,1]$	$log\frac{9\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$
7	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{5x+1}{3}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \frac{3cos2t - 1}{5} \\ y = e^{3t} \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$-\frac{9}{13}\left(e^{\frac{3}{2}\pi}+1\right)$
8	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \sqrt{ye^{-x}}dx + (y - e^{2x})dy + (z - arctgx - y)dz$	$\gamma: \begin{cases} x = \log t \\ y = t^2 \\ z = t^2 + arctg(logt) \end{cases} t \in [1,2]$	$-2(\sqrt{2} - 1)$

9	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{3^{-\sqrt{x+1}}}{2cosy}dx + ydy + \frac{1}{\sqrt{z+5-x}}dz$	$\gamma: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = arccost \quad t \in [-1,0] \\ z = t \end{cases}$	?
10	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}dx + (2y + arcsinx)dy$	γ è la poligonale di vertici $Q'\left(\frac{1}{2},1\right), Q\left(-\frac{1}{2},0\right), Q''(0,3)$	$8 - \frac{\pi}{6}$
11	$(\gamma)\int_{+\gamma} (2xy^3+3)dx + 3x^2y^2dy$	γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1	0
12	$\int_{+\gamma} \frac{1}{\sqrt{y}}dx + dy$	$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove γ_1è il diagramma di $2x - x^2 + 3$ con $x \in [0,2]$, γ_2è il segmento congiungente gli estremi di γ_1	$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$

Ulteriori esercizi

1	Data la forma differenziale $$\omega(x,y) = (e^{x+y}cosx)dx + \left[\frac{1}{2}e^{x+y}(cosx + sinx)\right]dy$$ stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed in tal caso determinarne una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = \frac{\pi}{2} - x$ tra i punti $A\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. Infine, se la forma è esatta verificarne il risultato con la formula fondamentale degli integrali curvilinei.
2	Sia $F: R^3 \to R^3$ il campo vettoriale: $$F(x,y,z) = (2y + 1, 2x - 1, 2z)$$ Stabilire se F ammette potenziale e, in caso affermativo, determinare un potenziale f di F.
3	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}}dx + \frac{1}{y-2}dy$$ determinare, se esiste, una primitiva f di ω.
4	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = \left(x\frac{sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(y\frac{sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$$ dire se ω ammette primitiva e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di ω.
5	Data la forma differenziale $$\omega(x,y) = \left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)dx - \left(\frac{y}{\sqrt{e^{2x}-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)$$ verificare se ω ammette primitiva e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di ω.
6	Dato il campo di forze $$F(x,y) = \left(\frac{16x}{\sqrt{16x^2-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{16y^2-x^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{16y}{\sqrt{16x^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{16x^2-y^2}}\right)\hat{\jmath}$$ Stabilire se F ammette potenziale e, in caso affermativo, determinare un potenziale f di F.
7	Data la forma differenziale:

	$\omega = \frac{2x+y}{\sqrt[3]{(x^2+xy)^2}}dx + \left(\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+xy)^2}} + 2y\right)dy$ Verificare se essa è chiusa, se è esatta ed in tal caso determinarne una primitiva. Determinare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla bisettrice del primo e del terzo quadrante tra i punti A(1,1) e B(2,2).
8	Data la forma differenziale: $\omega(x,y) = (xy + sinxy)dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{cosxy}{y^2} + \frac{x \cdot sinxy}{y}\right)dy$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = \frac{2\pi}{x}$ tra i punti di ascissa 1 e 2.
9	Data la forma differenziale: $\omega(x,y) = \left(x - \frac{x+y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}\right)dx - \left(\frac{x+y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}\right)dy$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = 1 - x$ tra i punti A(1,0) e B(2,-1).
10	Data la forma differenziale: $\omega(x,y) = (y \cdot arcsinx)dx + \left(\sqrt{1-x^2} + x \cdot arcsinx\right)dy$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = arcsinx$ tra i punti di ascissa 0 e 1/2.
11	Dato il campo di forze: $F(x,y) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{2x-y^2}} + y^2\right)\hat{\jmath}$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m=1 lungo la curva y=0 tra i punti A(1,0) e B(2,0). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
12	Dato il campo di forze: $F(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\hat{\imath} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\hat{\jmath}$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva y=x tra i punti A(1,1) e B(3,3). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
13	Dato il campo di forze: $F(x,y) = \frac{x(1+y^4)}{y^2+x^2(1+y^4)}\hat{\imath} + \frac{y(1+2x^2y^2)}{y^2+x^2(1+y^4)}\hat{\jmath}$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva y=x dal punto di ascissa 1 al punto di ascissa 2. Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
14	Dato il campo di forze: $F(x,y) = \left(2xy - \frac{1}{x}\right)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva $y = x^2$ tra i punti A(1,1) e B(2,4). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
15	Dato il campo di forze:

	$$F(x,y) = -\frac{y}{y^2+x^2}\hat{\imath} + \frac{x}{y^2+x^2}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva di equazioni parametriche $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cost, y(t) = 1 + \frac{1}{2}sint,\ \ con\ t \in [0,2\pi]$