SERIE NUMERICHE

Prof. Roberto Capone
A.A. 2016/17
Corso di Studi in Ingegneria Chimica

Serie numeriche

Definizione

Considerata la successione di numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_n$ in breve $(a_n)_{n \in N}$ si definisce serie numerica o, semplicemente serie, la sommatoria degli infiniti termini $a_1 + a_2 + \cdots, +a_n$ che può essere scritta nella forma compatta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Se si considera la successione

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2;$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n;$$
$$\dots.$$

Abbiamo costruito una nuova successione $(S_n)_{n \in N}$ il cui termine generale S_n prende il nome di somma parziale n-esima. Studiando il limite di tale somma si possono verificare tre casi

Serie numeriche

La serie converge ed ha somma S

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

La serie diverge (positivamente o negativamente)

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \pm\infty$$

La serie si dice indeterminata o oscillante

$$\lim_{n \to \infty} S_n = non\ esiste$$

Criteri di convergenza

Teorema

Condizione necessaria affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga è che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Si osservi che la condizione risulta solo necessaria ma non sufficiente. Ciò vuol dire che ci permette di stabilire se una serie diverge ma non se essa converge

Criterio di convergenza di Cauchy

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente è che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \forall p \geq 1, \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$$

Serie geometrica

Come caso particolare interessante studiamo la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^n + \cdots$$

di ragione $\rho \in R$.

La somma parziale ennesima è:

$$S_n = \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho}$$

Per determinare il carattere della serie basta passare al limite

$$\lim_n \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho}$$

Si distinguono tre casi:

$$\lim_n \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \rho}, se\ |\rho| < 1, la\ serie\ converge \\ +\infty, se\ \rho \geq 1, \qquad la\ serie\ diverge \\ non\ esiste, se\ \rho \leq -1, la\ serie\ \text{è}\ inderterminata \end{cases}$$

Serie a termini positivi

Una serie è detta a termini positivi se tutti i suoi termini sono positivi (o, talvolta, non negativi). Una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente ma non può mai essere indeterminata. Per tali serie valgono i seguenti criteri di convergenza

Primo criterio del confronto

Se una serie è convergente, allora ogni sua minorante è convergente.
Se una serie è divergente, allora ogni sua maggiorante è divergente.
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono due serie a termini positivi e se $\forall n$ risulta $a_n \leq c \cdot b_n$, essendo c una costante positiva, allora si ha che:

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a S_b, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S_a;
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Secondo criterio del confronto

Due serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere se esiste finito e non nullo il limite del rapporto dei loro termini generali, ossia se:

$$\lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = l(\neq 0) < \infty$$

Serie armonica generalizzata

In generale, la cosiddetta serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, con\ \alpha \in R$$

- Diverge se $\alpha \leq 0$ in quanto il suo termine generale non è un infinitesimo per $n \to \infty$;
- Diverge se $0 < \alpha < 1$ in quanto il suo termine generale è minorato dal termine generale della serie armonica $\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}$
- Diverge se $\alpha = 1$ in quanto si ottiene la serie armonica
- Converge se $\alpha = 2$
- Converge se $\alpha > 2$ in quanto il suo termine generale è maggiorato dal termine generale della serie armonica generalizzata per $\alpha = 2$: $\frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^2}$
- Converge se $1 < \alpha < 2$

Convergenza per serie a termini positivi

Criterio del rapporto o di D'Alembert

Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si supponga che esista finito il limite del rapporto tra due termini consecutivi. Allora,

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} < 1, & la\ serie\ converge \\ = 1, & nulla\ si\ può\ dire \\ > 1, & la\ serie\ diverge \end{cases}$$

Criterio della radice o di Cauchy

Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si supponga che esista e sia finito il limite della radice n-esima del suo termine generale. Allora,

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} < 1, & la\ serie\ converge \\ = 1, & nulla\ si\ può\ dire \\ > 1, & la\ serie\ diverge \end{cases}$$

Serie a termini qualsiasi

Diremo che una serie è a termini qualsiasi se i suoi termini sono sia positivi che negativi.
Tra tali serie, rivestono un ruolo importante le serie a segni alterni, ossia serie i cui termini di posto pari sono positivi, mentre quelli di posto dispari sono negativi o viceversa come, ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Criterio di Leibnitz

Se i valori assoluti dei termini di una serie a segni alterni costituiscono una successione monotona non crescente, cioè se

$$|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2| \geq \cdots |a_n| \geq \cdots$$

e se il termine generale converge a zero per $n \to \infty$ allora la serie converge

Serie a termini qualsiasi

Definizione
Diremo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

è assolutamente convergente se converge la serie dei suoi valori assoluti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Teorema
Se una serie è assolutamente convergente, allora essa è anche convergente