5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^4+2x^2+1}dx$ $\left[\frac{3}{20}\right]$

6. $\displaystyle\int_1^2 x\log\left(x^2+4\right)dx$ $\left[\frac{1}{2}\left(-3-5\log 5+8\log 8\right)\right]$

7. $\displaystyle\int_3^6 x^2\log\left(x+1\right)dx$ $\left[-\frac{7}{6}\left(15+8\log 4-62\log 7\right)\right]$

8. $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{\arcsin x}dx$ $\left[\frac{1}{4}\left[-2+\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\pi}{6}}\right]\right]$

9. $\displaystyle\int_\pi^{3\pi} x\sin 3x dx$ $\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

10. $\displaystyle\int_1^2 \log_2^2 x dx$ $\left[\frac{2(\log 2-1)^2}{\log^2 2}\right]$

Capitolo 3

Serie Numeriche

3.1 Concetti generali

Definizione 87 *Considerata la successione di numeri reali $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, in breve $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si definisce* **serie numerica** *o, semplicemente serie, la sommatoria degli infiniti termini $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, che può essere scritta nella forma compatta:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.1}$$

Poiché la somma è definita solo per un numero finito di termini, vediamo cosa s'intende per somma di infiniti termini. A tale scopo, consideriamo la successione:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1; \\ S_2 &= a_1 + a_2; \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3; \\ &\ldots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \\ &\ldots \end{aligned}$$

Abbiamo così costruito una nuova successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il cui termine generale S_n prende il nome di somma parziale $n-esima$. Detto questo, siamo in grado di studiare il comportamento, per $n\to+\infty$, della successione delle somme parziali così costruita. Studiando il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$, possono presentarsi tre casi:

1. $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, con S finito. Allora si dice che (la successione delle somme parziali e, dunque,) la serie (3.1) *converge* ed ha come *somma* S;

2. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$. Allora si dice che (la successione delle somme parziali e, dunque,) la serie (3.1) *diverge* (positivamente o negativamente).

3. $\lim_{n\to+\infty} S_n$ non esiste. In tal caso la serie si dice *indeterminata* o *oscillante*.

Riportiamo, di seguito, alcuni esercizi svolti per chiarire tali concetti.

3.1.1 Esercizi svolti

Esercizio 88 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ con } a_n,$$

ovvero:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots n.$$

Per determinare il carattere della serie a partire dalla definizione (più in là, poi, vedremo altri criteri), bisogna individuare un'espressione per il termine generale della successione delle somme parziali:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n,$$

e, infine, determinarne il limite. Ricordiamo che la successione di numeri naturali può essere considerata come una progressione aritmetica[1] *di ragione* 1, *per cui la somma dei primi* n *termini di tale progressione è data da* $\frac{n(n+1)}{2}$. *Allora, si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty,$$

quindi, la serie in esame è divergente (positivamente).

[1]Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta ragione della progressione. La somma S dei primi n valori di una progressione aritmetica è uguale a:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

dove a_1 e a_n sono, rispettivamente, il primo termine e l'n-esimo.

Esercizio 89 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

A tale scopo, consideriamo la successione delle somme parziali:

$$S_1 = 1;$$
$$S_2 = 1 - 1 = 0;$$
$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1;$$
$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0;$$
$$S_5 = \dots$$

Osserviamo che le somme parziali sono nulle se l'indice é pari, mentre sono pari ad uno se l'indice é dispari. Si può, dunque, concludere che la serie é indeterminata, in quanto non esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Esercizio 90 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Per determinarne il carattere, bisogna individuare un'espressione per il termine generale della successione delle somme parziali. Dunque, essendo:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

si ha:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Passando al limite, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Possiamo, quindi, affermare che la serie in esame converge ed ha come somma 1.

Esercizio 91 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1).$$

Per determinarne il carattere, bisogna individuare un'espressione per il termine generale della successione delle somme parziali. Dunque, essendo S_n una progressione aritmetica di ragione 2 e primo termine 1, si ha:

$$S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}^2.$$

Passando al limite, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty,$$

e possiamo affermare che la serie in esame diverge (positivamente).

Esercizio 92 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right).$$

Ricaviamo un'espressione per il termine generale della successione delle somme parziali. Dunque, essendo:

$$a_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)},$$

si ha:

$$S_n=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Passando al limite, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right]=-\frac{1}{2},$$

da cui segue che la serie in esame converge ed ha come somma $S=-\frac{1}{2}$.

3.1.2 Criteri di convergenza

Introducendo le serie ci siamo resi conto dell'importanza di conoscere il carattere di una serie, ossia capire se essa converge, diverge o è indeterminata. A tal proposito enunciamo i seguenti risultati fondamentali.

Teorema 93 *Condizione necessaria affinchè la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converga é che*

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

Osservazione 94 *Si osservi che tale condizione risulta solo necessaria ma non sufficiente. Ciò vuol dire che ci permette di stabilire se una serie diverge, ma non se essa converge.*

Criterio 95 *(di convergenza di Cauchy). Condizione necessaria e sufficiente affnché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sia convergente é che*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n_\varepsilon:\forall\,n>n_\varepsilon,\ \forall\,p\geq1,\ |a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

Esempio 96 *Determinare il carattere della serie di Mengoli:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Essa converge per quanto visto nell'esempio 90. Inoltre, è verificata, banalmente, la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0.$$

Esempio 97 *Determinare il carattere della serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+3}.$$

Non essendo verificata la condizione necessaria di convergenza, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+3}=2,$$

essa non converge. Vedremo più avanti che le serie a termini positivi, come questa, non sono mai indeterminate, sicchè essa diverge (di fatto positivamente).

Esempio 98 *Determinare il carattere della serie armonica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

È possibile verificare che essa diverge, pur verificando la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Applicando, infatti, il criterio di convergenza di Cauchy si ha, per esempio per p :

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2}.$$

La disuguaglianza del criterio di Cauchy non risulta verificata per alcun $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. *Non essendo verificata la condizione necessaria e sufficiente del criterio di convergenza di Cauchy la serie armonica non converge (e come visto nell'esercizio precedente, diverge positivamente).*

3.1.3 Esercizi proposti

Stabilire, mediante definizione, se le seguenti serie sono convergenti e, in caso affermativo e qualora sia possibile, calcolarne la somma S.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ [Divergente]

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$ $[S = \frac{1}{3}]$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ $[S = \frac{1}{2}]$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1}$ [Divergente]

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+(-1)^n}$ [Convergente]

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-n}}$ [Convergente]

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n}\right)$ $[S = -\frac{1}{3}]$

3.2 Serie Geometrica

Come caso particolarmente interessante, studiamo la serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^n + \cdots$$

di ragione $\rho \in \mathbb{R}$. La sua ridotta $n-esima$ é la somma dei suoi primi n termini che rappresentano una progressione geometrica, con primo termine uguale ad 1. Quindi, la sua somma parziale $n - esima$ é:

$$S_n = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}, \text{ se } \rho \neq 1 \ (S_n, \text{ se } \rho = 1).$$

Per determinare il carattere di tale serie, è sufficiente calcolare, il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\rho^n}{1-\rho} \text{ (per } \rho \neq 1).$$

Si distinguono tre casi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\rho^n}{1-\rho} = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \text{se } |\rho| < 1, \quad \text{quindi la serie converge;} \\ +\infty, & \text{se } \rho \geq 1, \quad \text{quindi la serie diverge;} \\ \nexists, & \text{se } \rho \leq -1, \quad \text{quindi la serie è indeterminata.} \end{cases}$$

Alcuni testi riportano che, nel caso $\rho < -1$, la serie diverge, intendendo che $S_n \to \infty$, o meglio che $|S_n| \to +\infty$. Osserviamo come, nel caso $\rho = 1$, la serie si riduca semplicemente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + \cdots,$$

che è banalmente divergente. Consideriamo alcuni esempi.

3.2.1 Esercizi svolti

Esercizio 99 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\rho = \frac{1}{5} < 1$, *quindi convergente, e la sua somma vale:*

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Esercizio 100 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\rho = \sqrt{2} > 1$, *quindi divergente.*

Osservazione 101 *Particolare attenzione va rivolta alla somma di serie geometriche il cui primo indice è* $n \neq 0$. *In tal caso, nel calcolo della somma, alla somma della serie geometrica con indice che parte da* 0, *vanno sottratti i primi termini non considerati nella sommatoria.*
In alternativa, data una serie geometrica convergente di primo termine arbitrario a_1 *e ragione* ρ, *si vede (come prima) che la sua somma è* $S = \frac{a_1}{1-\rho}$. *Infatti, si noti che, in generale, se* $|\rho| < 1$,

$$\sum_{n=\tilde{n}}^{\infty}\rho^n = \rho^{\tilde{n}} + \rho^{\tilde{n}+1} + \rho^{\tilde{n}+2} + \cdots =$$

$$= \rho^{\tilde{n}}\left(1+\rho+\cdots\rho^2+\cdots\right) =$$

$$= \rho^{\tilde{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n.$$

Quindi, si avrà, semplicemente che

$$S = \frac{\rho^{\tilde{n}}}{1-\rho} = \frac{a_1}{1-\rho}.$$

Tale osservazione è molto utile soprattutto quando $\tilde{n}$ *è un numero molto grande.*

Esercizio 102 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\rho = \frac{1}{3} < 1$ *quindi convergente. La sua somma vale:*

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{1}{54},$$

dal momento che possiamo scrivere

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

In alternativa, più velocemente è possibile calcolarne la somma, tenendo conto dell'osservazione fatta:

$$S = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{54}.$$

Esercizio 103 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+k}{3-k}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\rho = \frac{2+k}{3-k}$, *per cui, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 3)$, *si ha che:*

- *la serie converge se* $\left|\frac{2+k}{3-k}\right| < 1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2}$ *e* $S = \frac{1}{1-\frac{2+k}{3-k}} = \frac{3-k}{1-2k}$;
- *la serie diverge se* $\left|\frac{2+k}{3-k}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k < 3$;
- *la serie é indeterminata se* $\frac{2+k}{3-k} \leq -1 \Leftrightarrow k > 3$.

Esercizio 104 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-k}{1-k}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\rho = \frac{-k}{1-k}$, *per cui, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 1)$, *si ha che:*

- *la serie converge se* $\left|\frac{-k}{1-k}\right| < 1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2}$ *e* $S = \frac{1}{1+\frac{k}{1-k}} = 1-k$;
- *la serie diverge se* $\frac{-k}{1-k} \geq 1 \Leftrightarrow k > 1$;
- *la serie é indeterminata se* $\frac{-k}{1-k} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k < 1$.

3.2.2 Esercizi proposti

Studiare il carattere delle seguenti serie geometriche e, in caso siano convergenti, calcolarne la somma:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n$ $\quad [S = \frac{3}{5}]$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n$ $\quad$ [Divergente]

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-k}{k-2}\right)^n$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } k < \frac{3}{2},\ S = \frac{k-2}{2k-3}, \\ \text{per } \frac{3}{2} \leq k < 2, \text{ divergente} \\ \text{per } k > 2, \text{ indeterminata} \end{array}\right]$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3k+2)^n$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } -1 < k < -\frac{1}{3},\ S = \frac{-2-3k}{1+3k} \\ \text{per } k \geq -\frac{1}{3}, \text{ divergente} \\ \text{per } k \leq -1, \text{ indeterminata} \end{array}\right]$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3x)^n$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3},\ S = \frac{3x}{1-3x} \\ \text{per } x \geq \frac{1}{3}, \text{ divergente} \\ \text{per } x \leq -\frac{1}{3}, \text{ indeterminata} \end{array}\right]$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2-\log x)^n$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } e < x < e^3,\ S = \frac{1}{\log x - 1} \\ \text{per } 0 \leq x \leq e, \text{ divergente} \\ \text{per } x \geq e^3, \text{ indeterminata} \end{array}\right]$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{5}\right)^n$ $\quad [S = -\frac{2}{7}]$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-2\sin x)^n$ $\quad \left[\begin{array}{c} \text{per } 2k\pi < x < (1+2k)\pi, \\ \text{con } x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, S = \frac{1-2\sin x}{2\sin x} \end{array}\right]$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e)^{2nx}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } x < 0,\ S = \frac{1}{1-e^{2x}} \\ \text{per } x \geq 0, \text{ divergente} \end{array}\right]$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e)^{3nx-2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } x < 0,\ S = \frac{e^{3x-2}}{1-e^{3x}} \\ \text{per } x \geq 0, \text{ divergente} \end{array}\right]$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } x < -\frac{1}{2},\ S = -\frac{(1+x)^3}{x^2} \\ \text{per } x > 0, \text{ divergente} \\ \text{per } -\frac{1}{2} \leq x < 0, \text{ indeterminata} \end{array}\right]$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^3-3}{e}\right)^n$ $\quad$ [Divergente]

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2-x}\right)^n$ $\quad \left[\begin{array}{l} \text{per } x < 1 \vee x > 3,\ S = \frac{1}{1-x} \\ \text{per } 1 \leq x < 2, \text{ divergente} \\ \text{per } 2 < x \leq 3, \text{ indeterminata} \end{array}\right]$

3.3 Serie a termini positivi

Una serie è detta a termini positivi se tutti i suoi termini sono positivi (o, talvolta, non negativi). E' alquanto intuitivo comprendere che una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente, ma non può mai essere indeterminata. Per tali serie valgono i seguenti criteri di convergenza.

Criterio 105 *(Primo criterio del confronto). Se una serie è convergente, allora ogni sua minorante è convergente. D'altra parte, se una serie é divergente, allora ogni sua maggiorante é divergente. Ossia se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sono due serie a termini positivi e se* $\forall\ n$ *risulta* $a_n \leq c\ b_n$*, essendo c una costante positiva, allora si ha che:*

- *se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge a* S_b*, allora* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a* S_a*;*
- *se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, allora anche* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Criterio 106 *(Secondo criterio del confronto). Due serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hanno lo stesso carattere se esiste finito e non nullo il limite del rapporto dei loro termini generali, ossia se:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l\,(\neq 0) < \infty.$$

3.3.1 Esercizi svolti

Esercizio 107 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}. \tag{3.2}$$

Essendo

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{e^n} < \frac{1}{2^n},$$

tale serie a termini positivi risulta maggiorata dalla serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. *Quest'ultima converge perché ha ragione* $\rho = \frac{1}{2} < 1$, *per cui, per il Criterio 105, converge anche la serie (3.2).*

Esercizio 108 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{3.3}$$

Essendo

$$\forall n > 1, \ \frac{1}{n^2} < \frac{4}{4n^2-1},$$

tale serie a termini positivi risulta maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *convergente (vedi Esercizio 92). Allora anche la serie (3.3) converge, per il criterio 105.*

In generale la cosiddetta *serie armonica generalizzata*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R},$$

- diverge, se $\alpha \leq 0$, in quanto il suo termine generale non é un infinitesimo per $n \to +\infty$;

- diverge, se $0 < \alpha < 1$, in quanto il suo termine generale è minorato dal termine generale della serie armonica $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$;
- converge, se $\alpha = 2$, per l'esempio visto precedentemente;
- converge, se $\alpha > 2$, in quanto il suo termine generale è maggiorato dal termine generale della serie armonica generalizzata per $\alpha = 2 : \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2}$;
- converge, se $1 < \alpha < 2$ (per ragioni non riconducibili immediatamente alle precedenti).

Esercizio 109 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Essendo

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n\,(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} \leq \frac{1}{2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{2^{n-1}}, \ \forall n \geq 1,$$

risulta che il suo termine generale è maggiorato dal termine generale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, *la quale è una serie geometrica di ragione* $\frac{1}{2}$, *quindi, convergente. Pertanto, la serie di partenza converge.*

Esercizio 110 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}.$$

Applicando il Criterio 106, e confrontando il termine generale con quello della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, *si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+n^2}{n^3} = 2.$$

Pertanto, le due serie hanno lo stesso carattere, sicchè la serie di partenza converge.

Esercizio 111 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n^2+3}.$$

Applicando il Criterio 106, e confrontando tale serie con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$*, si ha che:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}n^2}{n^2+3} = \sqrt{2}.$$

Pertanto, le due serie hanno lo stesso carattere, e dunque la serie di partenza converge.

Esercizio 112 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+n}.$$

Applicando il Criterio 106 e confrontando con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$*, si ha che:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3}{n^2+n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+n^2} = 1.$$

Pertanto, le due serie hanno lo stesso carattere, ovvero la serie di partenza diverge.

3.3.2 Esercizi proposti

Scegliendo un'opportuna serie di confronto, stabilire il carattere delle seguenti serie.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{n}}$ [Divergente]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n^2+n}$ [Divergente]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+6n+5}$ [Divergente]

4. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n\sin^4(\frac{1}{n})$ [Convergente]

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ [Convergente]

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ [Convergente]

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n \log n+1}$ [Convergente]

8. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\log n - n^2}$ [Convergente]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ [Divergente]

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n^2}{\log^2 n+3}$ [Convergente]

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}}$ [Divergente]

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!+n}$ [Convergente]

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}$ [Convergente]

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2^n}$ [Convergente]

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+1}$ [Convergente]

16. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n-2)2^n}$ [Convergente]

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+1)!}$ [Divergente]

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$ [Divergente]

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n+1}$ [Convergente]

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n}\log n+n}$ [Divergente]

3.4 Convergenza per serie a termini positivi

I criteri visti in precedenza richiedono l'utilizzo di una seconda serie, di cui si conosca il carattere, per stabilire il carattere di una serie data. Poiché non è sempre facile individuare tale serie per il confronto, può essere conveniente utilizzare altri criteri di più facile applicazione.

Criterio 113 *(del rapporto o di D'Alembert). Data una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, si supponga che esista finito il limite del rapporto tra due termini consecutivi. Allora,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \begin{cases} <1, & \textit{la serie converge,} \\ =1, & \textit{(o non esiste) nulla si può dire, in generale,} \\ >1, & \textit{la serie diverge.} \end{cases}$$

Criterio 114 *(della radice o di Cauchy). Data una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, si supponga che esista finito il limite della radice n-esima del suo termine generale. Allora,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \begin{cases} <1, & \textit{la serie converge,} \\ =1, & \textit{(o non esiste) nulla si può dire, in generale,} \\ >1, & \textit{la serie diverge.} \end{cases}$$

3.4.1 Esercizi svolti

Esercizio 115 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{6^{n+1}}{n!}}{\frac{6^n}{(n-1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{6\cdot 6^n}{(n-1)!n} \cdot \frac{(n-1)!}{6^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n} = 0 < 1.$$

Quindi, la serie converge.

Esercizio 116 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!+1}{(n+1)!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n+2)!+1}{(n+2)!}}{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+2)(n+1)!} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)!} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+2}{n+2} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+1)!} = 2+0 = 2 > 1.$$

Quindi, la serie diverge.

Esercizio 117 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,n!}{(n+1)^n\,(n+1)}\,\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi, la serie converge.

Esercizio 118 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Applicando il criterio del rapporto, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n 3}{(n+1)\,n!}\,\frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

per cui la serie converge.

Esercizio 119 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\log(n+1)}\right]^n.$$

Applicando il criterio della radice, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{1}{\log(n+1)}\right]^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0 < 1.$$

Quindi, la serie converge.

Esercizio 120 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{3n+2}\right)^n.$$

Applicando il criterio della radice, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} > 1.$$

Quindi, la serie diverge.

Esercizio 121 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Applicando il criterio della radice, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left[n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right]^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Quindi, la serie converge.

Esercizio 122 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Applicando il criterio della radice, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left[n\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)\right]^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = 0 < 1.$$

Quindi, la serie converge.

3.4.2 Esercizi proposti

Utilizzando un opportuno criterio, stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4 - \frac{4n^2-5n+1}{n^2+n-1}\right)^n$ [Convergente]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n n$ [Convergente]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+n^2}$ [Convergente]

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ [Convergente]

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2+1}\right)^n$ [Convergente]

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, 2^{\frac{1}{n}}+1}$ [Convergente]

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n-1)!}$ [Convergente]

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^n$ [Divergente]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n}{(n+1)!}$ [Divergente]

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{7^n-6^n+4n-2^n+2}{7^n+4n+3}\right)^n$ [Convergente]

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+1)^2}{\log\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+1}\right)}\right]^n$ [Divergente]

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(3^{\frac{2}{n}}-5^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right]^n$ [Convergente]

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}\right)$ [Convergente]

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+1)+1}$ [Divergente]

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 3^n \log n+1}$ [Convergente]

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\log n}}{e^{n^2}}$ [Convergente]

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-4)!}$ [Convergente]

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\log\sqrt{n+1}\right)^n}{\sqrt{(n-1)^n}}$ [Convergente]

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\sin^2 n}{n^3}\right)$ [Divergente]

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)}}{(n+1)}$ [Convergente]

3.5 Serie a termini qualsiasi

Diremo che una serie è a termini qualsiasi se i suoi termini sono sia positivi che negativi. Tra tali serie rivestono un ruolo importante le serie a segni alterni, ossia serie i cui termini di posto pari sono positivi, mentre quelli di posto dispari sono negativi, o viceversa. Sono esempi di serie a segni alterni le seguenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Per studiare il carattere di una serie a segni alterni sussiste la seguente condizione sufficiente per la convergenza.

Criterio 123 *(Leibniz). Se i valori assoluti dei termini di una serie a segni alterni costituiscono una successione monotona non crescente, cioè se*

$$|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_n| \geq \cdots$$

e se il termine generale converge a zero per $n \to +\infty$*, allora la serie converge.*

Definizione 124 *Diremo che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

é assolutamente convergente se converge la serie dei suoi valori assoluti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Sussiste, poi, il seguente teorema.

Teorema 125 *Se una serie é assolutamente convergente, allora essa é anche convergente.*

Alla luce di questo teorema, per poter stabilire la convergenza di una serie a termini di segno qualsiasi, è sufficiente (ma, in generale, non necessario) verificarne l'assoluta convergenza.

3.5.1 Esercizi svolti

Esercizio 126 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}.$$

Essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdots ,$$

la successione $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è monotona decrescente. Infatti:*

$$\left|(-1)^n \frac{1}{2n}\right| \geq \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{2(n+1)}\right|, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ossia, "senza segni":

$$\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0.$$

Il criterio di Leibniz é soddisfatto, per cui la serie converge.

Esercizio 127 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Essendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots ,$$

la successione $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è monotona decrescente. Infatti:*

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right| \geq \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n+2}\right|, \forall n \in \mathbb{N},$$

Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$$

Il criterio di Leibniz é soddisfatto, per cui la serie converge.

Esercizio 128 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n .$$

Essendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ,$$

la successione $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è monotona decrescente. Infatti:*

$$|(-1)^n| \geq \left|(-1)^{n+1}\right|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \neq 0,$$

e quindi la condizione necessaria 93 non é soddisfatta. Di conseguenza, la serie non converge (di fatto, è oscillante).

Esercizio 129 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di una serie a termini di segno qualsiasi. Possiamo limitarci a studiare la convergenza della serie dei moduli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| = \left| \frac{\sin \alpha}{1} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{4} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{9} \right| + \cdots .$$

I termini di tale serie sono sicuramente minori di quelli della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

che è la serie armonica generalizzata per $\alpha = 2$, serie convergente. Pertanto, utilizzando il Criterio 105, anche la serie assegnata converge.

Esercizio 130 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}.$$

Si tratta di una serie a termini di segno qualsiasi. Possiamo limitarci a studiare la convergenza della serie dei moduli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-3)^n}{n!} \right| = \left| \frac{1}{1} \right| + \left| \frac{3}{2!} \right| + \left| \frac{9}{3!} \right| + \cdots .$$

Per il criterio del rapporto, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n} \right| \frac{n!}{(n+1)\,n!} = 0 < 1.$$

Poiché tale serie è assolutamente convergente, anche la serie assegnata converge.

3.5.2 Esercizi proposti

Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche, a termini positivi e non:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$ [Convergente]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}$ [Convergente]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n+1}$ [Divergente]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n!}$ [Convergente]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$ [Convergente]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^3}$ [Convergente]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$ [Convergente]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ [Convergente]
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(\log\sqrt{n}\right)^n}{\sqrt{n^n}}$ [Convergente]
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(2n^2\right)^n}{[n!(n^2+1)]^n}$ [Convergente]

Capitolo 4

Successioni di Funzioni

Definizione 131 *Si definisce* ***successione di funzioni*** *e si indica con*

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

un'applicazione che ad ogni indice $n \in \mathbb{N}$ fa corrispondere f_n, dove

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

sono funzioni a valori reali.

In realtà, il dominio delle f_n può essere un qualunque $X \subseteq \mathbb{R}$, o anche più generale, ma noi fisseremo l'attenzione sul caso detto.

Definizione 132 *La successione di funzioni f_n* ***converge puntualmente*** *ad f (in $[a,b]$), e si scrive*

$$f_n(x) \to f(x)$$

se

$$\forall\, x \in [a,b]\,,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall\, n > \nu,$$

cioè se:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\ \ \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Definizione 133 *La successione di funzioni f_n* ***converge uniformemente*** *ad f (in $[a,b]$), e si scrive*

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x),$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall\, n > \nu, \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Si osservi non solo la diversa dipendenza di ν nelle due definizioni ma anche la diversa posizione di $\forall\, x \in [a,b]$.
E' possibile dare una definizione di convergenza uniforme equivalente alla precedente:

Definizione 134 *La successione di funzioni f_n* ***converge uniformemente*** *ad f (in $[a,b]$), se e solo se*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ per } n \to \infty.$$

Definizione 135 *Si definisce* ***insieme di convergenza*** *di $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, l'insieme*

$$I = \{x \in D : f_n(x) \text{ converge}\},$$

dove D è l'insieme di definizione della successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio 136 *Sia data la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita nell'insieme dei numeri reali, con*

$$f_n(x) = e^{-nx},$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0, \\ 1, & \text{se } x = 0, \\ +\infty, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dunque, la successione converge ad $f(x)$, definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

pertanto, ne deriva che l'insieme di convergenza è $I = \mathbb{R}_0^+$.

Ricordiamo alcune proposizioni importanti per la determinazione della convergenza puntuale o uniforme di successioni di funzioni.

Proposizione 137 *La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.*

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n(x) \Rightarrow f(x),$$

Non vale il viceversa.

Esempio 138 *Scegliamo la seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in [0,1].$$

Calcoliamo il limite puntuale. Innanzitutto, se $x = 1$, otteniamo una successione numerica sempre pari ad 1, per cui il limite è 1; se $x = 0$, allora $f_n(0) = 0\ \forall n$ il che implica che $f(0) = 0$. Invece, se $0 < x < 1$, allora x^n è decrescente, quindi ha come limite il suo estremo inferiore che è 0. Quindi il limite puntuale è

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Controlliamo se la convergenza è anche uniforme in $[0,1]$. Per calcolare l'estremo superiore

$$\sup_{[0,1]} |x^n - f(x)|,$$

osserviamo che il $\sup_{x\in[0,1[} |x^n| = \lim_{x\to1} |x^n| = 1$, mentre nel punto $x = 1$,

$$|x^n - f(x)| = |1 - 1| = 0.$$

Segue che non c'è convergenza uniforme pur essendoci convergenza puntuale.

Proposizione 139 *Se esiste una successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (necessariamente non negativa) infinitesima e tale che*

$$|f(x) - f_n(x)| \le a_n, \quad \forall\, x \in A \subseteq D, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

allora f_n converge uniformemente ad f in A (e viceversa).

Proposizione 140 *Se esistono una successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima ed una funzione $h(x)$ limitata in $A \subseteq D$ tali che*

$$|f(x) - f_n(x)| \le h(x)\, a_n, \quad \forall\, x \in A \subseteq D, \forall n \in \mathbb{N},$$

allora f_n converge uniformemente ad f in A.

Osserviamo che la Proposizione 140 è ovviamente equivalente alla Proposizione 139.

4.1 Esercizi svolti

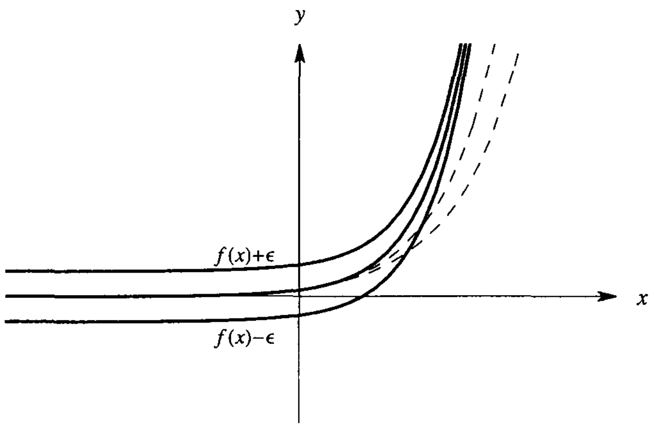
Esercizio 141 *Determinare l'insieme di convergenza e la funzione limite della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x^2}.$$

Innanzitutto la successione è definita in $D = \mathbb{R}$, *inoltre*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^x}{n+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^x}{n\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} = e^x,$$

per cui si ha che $f_n(x) \to f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ *e, dunque, l'insieme di convergenza* $I = \mathbb{R}$.
Nella seguente figura, si mostra il grafico della funzione limite e delle sue traslate $f(x) - \varepsilon$ *e* $f(x) + \varepsilon$ *(con* ε *valore positivo fissato) in grassetto, mentre si riportano tratteggiate alcune funzioni della successione. Essendo la convergenza non uniforme, i grafici di* $f_n(x)$ *e* $f_m(x)$ *con* $n, m > \nu = \nu(\varepsilon, x)$ *non risultano essere contenuti dentro la fascia determinata dai grafici di* $f(x) - \varepsilon$ *e* $f(x) + \varepsilon$*, in quanto* ν *dipende anche da* x.



Esercizio 142 *Determinare l'insieme di convergenza e la funzione limite della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{\sin x}{n}\right)^n.$$

Innanzitutto la successione è definita in $D = \mathbb{R}$, *inoltre*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{n}\right)^n = e^{\sin x},$$

per cui si ha che $f_n(x) \to f(x) = e^{\sin x}, \forall x \in \mathbb{R}$ *e, dunque, l'insieme di convergenza è* $I = \mathbb{R}$.

Esercizio 143 *Determinare l'insieme di convergenza e la funzione limite della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = (x-3)^n + 3x.$$

Innanzitutto la successione è definita in $D = \mathbb{R}$, *inoltre,*

$$\lim_{n\to+\infty} (x-3)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x-3>1 \Leftrightarrow x>4, \\ 1, & \text{se } x-3=1 \Leftrightarrow x=4, \\ 0, & \text{se } |x-3|<1 \Leftrightarrow 2<x<4, \\ \text{non esiste} & \text{se } x-3 \le -1 \Leftrightarrow x \le 2, \end{cases}$$

per cui si ha che $f_n(x) \to f(x)$, *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 13, & \text{se } x = 4, \\ 3x, & \text{se } 2 < x < 4, \end{cases}$$

e, dunque, l'insieme di convergenza è $I = \left]2, 4\right]$.

Esercizio 144 *Determinare l'insieme di convergenza e la funzione limite della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{\log^n x + 2}{3x^2 + 2}.$$

Innanzitutto la successione è definita in $D = \mathbb{R}^+$, *inoltre*

$$\lim_{n\to+\infty} \log^n x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \log x > 1 \Leftrightarrow x > e, \\ 1, & \text{se } \log x = 1 \Leftrightarrow x = e, \\ 0, & \text{se } |\log x| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e, \\ \text{non esiste} & \text{se } \log x \le -1 \Leftrightarrow 0 < x \le e^{-1}, \end{cases}$$

per cui si ha che $f_n(x) \to f(x)$, *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{3e^2+2}, & \text{se } x = e, \\ \frac{2}{3x^2+2}, & \text{se } e^{-1} < x < e, \end{cases}$$

e, dunque, l'insieme di convergenza $I = \left]e^{-1}, e\right]$.

Esercizio 145 *Determinare l'insieme di convergenza e la funzione limite della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{2x + \log x}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Innanzitutto la successione è definita in $D = \mathbb{R}^+$, inoltre

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{2x + \log x}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2x+\log x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2x}e^{\log x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{2x}x},$$

per cui si ha che $f_n(x) \to f(x) = \sqrt{e^{2x}x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ e, dunque, l'insieme di convergenza è $I = \mathbb{R}^+$.

Esercizio 146 *Studiare il comportamento della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{n\sin x + 1}{n}$$

precisando, nel caso converga, il tipo di convergenza e la funzione limite.
Si osservi, innanzitutto, che la successione data è definita in $\mathbb{R}$ e converge puntualmente alla funzione $f(x) = \sin x$. Infatti, si ha che:

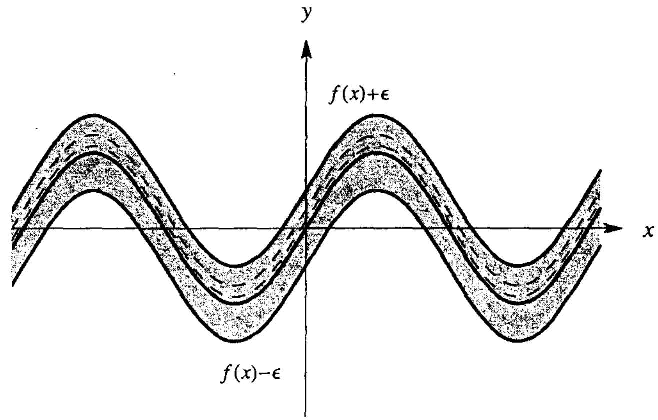
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin x + 1}{n} = \sin x.$$

Inoltre, essendo

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n\sin x + 1}{n} - \sin x\right| \le \left|\frac{1}{n}\right|, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

per la Proposizione 139 risulta che la successione è anche uniformemente convergente.
Nella seguente figura, si mostra il grafico della funzione limite e delle sue traslate $f(x) - \varepsilon$ e $f(x) + \varepsilon$ (con ε valore positivo fissato) in grassetto, mentre si riportano tratteggiate alcune funzioni della successione. Essendo la convergenza uniforme, i grafici di $f_n(x)$ e $f_m(x)$ con $n, m > \nu = \nu(\varepsilon)$ risultano essere

contenuti dentro la fascia determinata dai grafici di $f(x) - \varepsilon$ e $f(x) + \varepsilon$.



Esercizio 147 *Verificare il comportamento della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{2}{nx^2 + 2},$$

precisando, nel caso converga, il tipo di convergenza e la funzione limite.
Si osservi, innanzitutto, che la successione data è definita in $\mathbb{R}$ e converge puntualmente alla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Inoltre, essendo

$$|f_n(x) - f(x)| = 0, \ x = 0,$$
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2}{nx^2 + 2}\right|, \ x \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\neq 0}\left|\frac{2}{nx^2 + 2}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{2}{nx^2 + 2}\right| = 1.$$

per la Proposizione 134 risulta che la successione non è uniformemente convergente.

Esercizio 148 *Verificare il comportamento della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{n^2\cos x}{1 + n^2},$$

precisando, nel caso converga, il tipo di convergenza e la funzione limite.
Si osservi, innanzitutto, che la successione data è definita in $\mathbb{R}$ *e converge puntualmente alla funzione* $f(x) = \cos x$*. Inoltre, essendo*

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n^2 \cos x}{1+n^2} - \cos x\right| \leq |\cos x| \left|\frac{1}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

per la Proposizione 140 risulta che la successione è anche uniformemente convergente.

Esercizio 149 *Verificare il comportamento della seguente successione di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

precisando, nel caso converga, il tipo di convergenza e la funzione limite.
Si osservi, innanzitutto, che la successione data è definita in $\mathbb{R}$ *e converge puntualmente alla funzione* $f(x) = 0$*. Infatti, si ha che:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{n} = 0.$$

Inoltre, essendo

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n}\right| \leq |\sin x| \left|\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right|, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

per la Proposizione 139 risulta che la successione è anche uniformemente convergente.

4.2 Esercizi proposti

Determinare l'insieme di convergenza e la funzione limite delle seguenti successioni di funzioni:

1. $f_n(x) = e^{-2nx} + 1$ $\left[f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \ I = \mathbb{R}_0^+\right]$

2. $f_n(x) = (\log_x 2)^{2n}$ $\left[f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases} \ I = [2, +\infty[\right]$

3. $f_n(x) = \arccos\left(\frac{1}{2^{nx}}\right)$ $\left[f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0; \end{cases} \ I = \mathbb{R}_0^+\right]$

4. $f_n(x) \log(n + \sin x) - n \log n$ $[f(x) = \sin x; \ I = \mathbb{R}]$

5. $f_n(x) = \cos\left(2x + \frac{1}{x^n}\right)$ $\left[\begin{array}{l} f(x) = \begin{cases} \cos 3, & x = 1, \\ \cos 2x, & x < -1, x > 1; \end{cases} \\ I =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\end{array}\right]$

Verificare il comportamento, precisando, nel caso converga, il tipo di convergenza e la funzione limite, delle seguenti successioni di funzioni:

1. $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ $[f_n(x) \rightrightarrows f(x) = x^2]$

2. $f_n(x) = x^n + 1$ $\left[f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1, \\ 1, & -1 < x < 1 \end{cases}\right]$

3. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^4}$ $[f_n(x) \rightrightarrows f(x) = 0]$

4. $f_n(x) = \frac{e^{-|x|}}{n^4}$ $[f_n(x) \rightrightarrows f(x) = 0]$

5. $f_n(x) = e^x + \frac{\arctan x}{n}$ $[f_n(x) \rightrightarrows f(x) = e^x]$

Capitolo 5

Serie di Funzioni

Definizione 150 *Sia $\{a_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in un intervallo $X \subset \mathbb{R}$. Indichiamo con $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali:*

$$\begin{aligned} S_1(x) &= a_1(x), \\ S_2(x) &= a_1(x) + a_2(x), \\ &\cdots \\ S_n(x) &= a_1(x) + \cdots + a_n(x). \\ &\cdots \end{aligned}$$

Tale successione di funzioni si chiama "serie di funzioni di termine generale $a_k(x)$", e si indica come:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

Definizione 151 *La serie di funzioni $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$* ***converge puntualmente*** *(in X) se*

$$S_n(x) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \ \ \textit{converge puntualmente (in } X\textit{)},$$

il che equivale a dire che $\exists\ S(x)$, detta somma della serie tale che:

$$\forall\ x \in X,\ \ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu = \nu\,(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,\ \ \forall\ n > \nu.$$

Definizione 152 *La serie di funzioni* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ***converge uniformemente*** *(in X) se*

$$S_n(x) \text{ converge uniformemente (in } X\text{)},$$

il chè equivale a dire che $\exists\, S(x)$:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu,\ \forall\, x \in X.$$

Definizione 153 *La serie di funzioni* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ***converge totalmente*** *in X se esiste una successione numerica* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *positiva* ($M_n > 0$) *tale che:*

1) $|a_n(x)| \leq M_n,\ \forall\, x \in X, \forall\, n \in \mathbb{N}$;
2) *la serie (numerica)* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge,*

ciò equivale a richiedere che $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in X} |a_n(x)|$ *converga.*

Criterio 154 *(Cauchy Puntuale). La serie di funzioni* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *converge puntualmente in* $X \subset \mathbb{R}$ *se e solo se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in X,\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) \right| < \varepsilon, \forall\, m > \nu, \forall\, n > m.$$

Criterio 155 *(Cauchy Uniforme). La serie di funzioni* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *converge uniformemente in* $X \subset \mathbb{R}$ *se e solo se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall m > \nu,\ \forall n > m,\ \forall x \in X.$$

Criterio 156 *(Weierstrass). Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *una serie convergente totalmente in X allora essa converge anche uniformemente in X (ma non, in generale, viceversa).*

Esempio 157 *La serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$$

converge uniformemente in $[-1, 1]$ *alla funzione* $S(x) = -\log(1 + x^2)$. *Si osservi però che essa non converge totalmente, infatti*

$$\sup_{[-1,1]} \left| \frac{(-1)^n x^{2n}}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

e la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

5.1 Serie di funzioni note

Si riporta, per facilitare lo studente, una tabella con alcuni dei principali sviluppi in serie di funzioni note e relativi domini, insiemi di convergenza e funzioni somma.

Serie Geometrica

$\sum_{n=k}^{\infty} x^n$ $\quad D = \mathbb{R};\ I =]-1, 1[\quad S(x) = \frac{x^k}{1-x}$

Serie Esponenziale

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad D = \mathbb{R}; I = \mathbb{R} \quad S(x) = e^x$

Serie di Leibniz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-; I = D \quad S(x) = \frac{1}{x+1}$

Serie (di Mc Laurin) del Coseno

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad D = \mathbb{R}; I = D \quad S(x) = \cos x$

Serie (di Mc Laurin) del Seno

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad D = \mathbb{R}; I = D \quad S(x) = \sin x$

Serie (di Mac Laurin) del Coseno Iperbolico

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad D = \mathbb{R}; I = D \quad S(x) = \cosh x$

Serie (di Mac Laurin) del Seno Iperbolico

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $D=\mathbb{R}; I=D$ $S(x)=\sinh x$

Serie Logaritmica

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $D=\mathbb{R}; I=]-1,1]$ $S(x)=\log(1+x)$

Serie dell'Arcotangente

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $D=\mathbb{R}; I=[-1,1]$ $S(x)=\arctan x$

5.2 Esercizi svolti

Esercizio 158 *La serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sin x)^{2n}}{n^2}, \quad \forall x \in [0,\pi],$$

converge uniformemente, infatti si vede subito che converge totalmente, in quanto

$$\sup_{[0,\pi]} \left| \frac{(-1)^n (\sin x)^{2n}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2},$$

e la serie armonica generalizzata $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Esercizio 159 *La serie di funzioni*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\cos x)^n}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

è una "serie logaritmica" (composta con $\cos x$*) per cui è facile vedere che converge alla somma*

$$S(x) = \log(1+\cos x) - \cos x,$$

(avendo sottratto il primo termine della serie logaritmica). L'intervallo di convergenza risulta, quindi,

$$I = \{x : \cos x \in]-1,1]\} = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Esercizio 160 *La serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9^{nx}}{2n+1},$$

può essere riscritta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2nx}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(2n+1)x}3^{-x}}{2n+1} = 3^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3^x)^{2n+1}}{2n+1}.$$

E' facile, ora, riconoscere la serie dell'arcotangente (composta con 3^x*), per cui si ha che essa converge alla somma*

$$S(x) = 3^{-x} \arctan 3^x,$$

nell'intervallo di convergenza $I = \{x : 3^x \in [-1,1]\} =]-\infty, 0]$.

Esercizio 161 *La serie di funzioni*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{8^{nx}}{4^n n},$$

può essere riscritta come

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{3nx}}{2^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{(3x-2)n}}{n} - 2^{3x-2}.$$

E' facile, ora, riconoscere la "serie logaritmica" (composta con $2^{3x-2} = \frac{2^{3x}}{4}$*), per cui si ha che essa converge alla somma*

$$S(x) = \log\left(1 + \frac{2^{3x}}{4}\right) - \frac{2^{3x}}{4},$$

dal momento che bisogna sottrarre il primo termine della serie logaritmica per $n=1$*. L'intervallo di convergenza coincide con l'insieme dei valori reali per cui* $2^{3x-2} \in]-1,1]$*, ovvero* $I =]-\infty, \frac{2}{3}]$.

Esercizio 162 *La serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\cos x)^{2n} n!},$$

corrisponde alla serie esponenziale di $\frac{1}{\cos^2 x}$, *per cui si ha che essa converge alla somma*

$$S(x) = e^{\frac{1}{\cos^2 x}},$$

nell'intervallo di convergenza $I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Osserviamo che si ha convergenza uniforme lontano dall'insieme in cui* $\cos x = 0$, *di fatto sugli insiemi del tipo* $(\varepsilon > 0)$ $\{x : |\cos x| \geq \varepsilon\}$ *e cioè fuori dai* δ*-intorni di* $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.3 Esercizi proposti

Con l'aiuto di sviluppi in serie noti, determinare la somma delle seguenti serie di funzioni con il rispettivo intervallo di convergenza. Inoltre, qualora sia possibile, stabilire se vale anche la convergenza uniforme.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{1+\cos x}\right)^n, x \in [-\pi, \pi]$ $\left[\begin{array}{l} S(x) = 1 + \cos x, \\ I = \left]-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right]$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\tan x)^{2n+1}$ $\left[S(x) = \frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x},\ I = \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\log^n x}{n!}$ $[S(x) = x,\ I =]0, +\infty[\ ]$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arccos^{2n} x}{(2n)!}$ $[S(x) = -\frac{\sin 1}{2} \arccos^2 x,\ I =]-\infty, +\infty[\ ]$

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x^2+n)(x^2+n+1)}$ $\left[S(x) = \frac{1}{x^2+2},\ I =]-\infty, +\infty[\ \right]$

5.4 Serie di Potenze

Definizione 163 *Definiamo serie di potenze la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ...,$$

dove:

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione numerica (reale);*
- x *è una variabile reale;*
- $a_n (x - x_0)^n$ *prende il nome di termine generale della serie;*
- a_n *prende il nome di coefficiente n-esimo della serie.*
- *Il numero reale* x_0 *è detto centro della serie di potenze suddetta.*

Poiché si può sempre pensare di cambiare variabile tramite una traslazione, ponendo:

$$y = x - x_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

d'ora in poi, per semplicità, supponiamo che il centro sia $x_0 = 0$.

Definizione 164 *Si definisce raggio di convergenza di una serie di potenze l'estremo superiore* $\rho \in [0, +\infty]$ *dell'insieme in cui la serie converge puntualmente.*

Si può verificare allora che vale uno (ed uno solo) dei casi seguenti:

1. La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge solo in 0, allora il raggio di convergenza è $\rho = 0$, ovvero la serie converge solo nel centro;
2. La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$, in tal caso, il raggio di convergenza è $\rho = +\infty$;
3. La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$ (potendo avere carattere qualsiasi per $|x| = r$) allora il raggio di convergenza è $\rho = r$.

Definizione 165 *L'insieme di convergenza è un intervallo detto, appunto, intervallo di convergenza della serie.*

Criterio 166 *(Cauchy-Hadamard o Radice). La serie di potenze* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge nell'intervallo di convergenza di raggio* ρ, *tale che:*

$$\rho = \begin{cases} 0, & se\ L = +\infty, \\ 1/L, & se\ 0 < L < +\infty, \\ +\infty, & se\ L = 0, \end{cases}$$

dove $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L\,(\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ *(se esiste tale limite).*

Criterio 167 *(D'Alembert o Rapporto). La serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *con* $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *converge nell'intervallo di convergenza di raggio* ρ, *tale che:*

$$\rho = \begin{cases} 0, & se\ L = +\infty, \\ 1/L, & se\ 0 < L < +\infty, \\ +\infty, & se\ L = 0, \end{cases}$$

dove $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L\,(\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ *(se esiste tale limite).*

Teorema 168 *(Abel). Se la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge nell'intervallo* I, *allora converge uniformemente sui compatti* $K \subseteq I$.

Ricordiamo che i compatti $K \subseteq \mathbb{R}$ sono i sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$.

5.4.1 Esercizi svolti

Esercizio 169 *Determinare intervallo e raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Possiamo applicare il criterio del rapporto di D'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n}\right| = 1.$$

Quindi il raggio di convergenza è $\rho = 1$. *Inoltre per* $x = -1$, *si ha la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

che non converge, mentre per $x = 1$, *si ottiene la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1},$$

anch'essa non convergente, dal momento che non soddisfa la condizione necessaria per cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Si può dunque concludere che l'intervallo di convergenza è* $I = \left]-1, 1\right[$. *Inoltre tale serie converge uniformemente su tutti i compatti* $[-\xi, +\xi] \subseteq I$.

Esercizio 170 *Determinare intervallo e raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\left(e+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Possiamo applicare il criterio della radice di Cauchy-Hadamard:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\left(e+\frac{1}{n}\right)^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{e+\frac{1}{n}}\right| = \frac{1}{e}.$$

Quindi il raggio di convergenza è $\rho = e$. *Inoltre per* $x = -e$, *si ha la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{\left(e+\frac{1}{n}\right)^n},$$

che non converge, mentre per $x = e$, *si ha la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{\left(e+\frac{1}{n}\right)^n},$$

anch'essa non convergente, dal momento che entrambe non soddisfano la condizione necessaria per cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *(per entrambe, il limite del valore assoluto vale 1). Si può dunque concludere che l'intervallo di convergenza è* $I = \left]-e, e\right[$. *Inoltre tale serie converge uniformemente su tutti i compatti* $[-\xi, +\xi] \subseteq I$.

Esercizio 171 *Determinare intervallo e raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n^2} x^n.$$

Possiamo applicare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{e^2}.$$

Quindi il raggio di convergenza è $\rho = e^2$. *Inoltre per* $x = -e^2$, *si ha la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n^2} e^{2n},$$

che, non converge (non verifica la condizione necessaria), mentre per $x = e^2$, *si perviene alla serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n^2} e^{2n},$$

anch'essa non convergente, dal momento che non soddisfa la condizione necessaria per cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Si può, dunque concludere che l'intervallo di convergenza* $I = \left]-e^2, e^2\right[$. *Inoltre tale serie converge uniformemente su tutti i compatti* $[-\xi, +\xi] \subseteq I$.

Esercizio 172 *Determinare intervallo e raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^3+1)\,5^n}.$$

Possiamo applicare il criterio del rapporto di D'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n^3+1)\,5^n}{\left[(n+1)^3+1\right]5^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\left|\frac{n^3+1}{n^3+3n^2+3n+2}\right| = \frac{1}{5}.$$

Quindi il raggio di convergenza è $\rho = 5$. *Inoltre per* $x = -5$, *si ha la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1},$$

che converge, mentre per $x = 5$, *si perviene alla serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1},$$

anch'essa convergente, per il criterio del confronto. Si può, dunque concludere che l'intervallo di convergenza è $I = [-5, 5]$. *Inoltre tale serie converge uniformemente su I (che è compatto). Di fatto, la serie converge totalmente su I.*

Esercizio 173 *Determinare intervallo e raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n}.$$

Prima di tutto, mediante la posizione, $y = x - 1$, *possiamo ricondurre la serie data a quella centrata in* $y_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{7^n}. \tag{5.1}$$

A questo punto, possiamo applicare il criterio della radice di Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{7^n}\right|} = \frac{1}{7}.$$

Quindi il raggio di convergenza è $\rho = 7$. *Inoltre per* $y = -7$, *si ha la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,$$

banalmente non convergente, mentre per $y = 7$, *si perviene alla serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1,$$

anch'essa non convergente. Si può, dunque concludere che l'intervallo di convergenza è $\tilde{I} = \left]-7, 7\right[$, *per la serie trasformata (5.1), ovvero* $I = \left]-6, 8\right[$. *Inoltre tale serie converge uniformemente su tutti i compatti* $[-\xi, +\xi] \subseteq I$.

5.4.2 Esercizi proposti

Determinare intervallo e raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{n}\right)^n x^n$ $\quad\left[\rho = 2,\ I = \left]-2, 2\right[\ \right]$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log^n 3}{n3^n}x^n$ $\quad\left[\rho = \frac{3}{\log 3},\ I = \left[-\frac{3}{\log 3}, \frac{3}{\log 3}\right[\ \right]$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+n}{5^n+n^2}x^n$ $\quad\left[\rho = \frac{5}{2},\ I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right[\ \right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4n^3+8n^2+n-3}x^n$ $\quad\left[\rho = 1,\ I = [-1, 1]\ \right]$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4n^4-5n^2+1}$ $\quad\left[\rho = 1,\ I = \left]-1, 1\right]\ \right]$