CAPITOLO SECONDO

FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI LIMITI - CONTINUITÀ

§ 1. - Funzioni e limiti

1. — *Il concetto di funzione reale di più variabili reali.*

Sia D un sottoinsieme non vuoto di punti dello spazio R^n e u una variabile reale.

Si dice che la variabile u è una funzione reale del punto $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, variabile nell'insieme D, quando esiste una legge, di natura qualsiasi, la quale fa corrispondere ad ogni punto p dell'insieme D, un valore ed uno solo per u.

Le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ si dicono *indipendenti*, la u dicesi variabile *dipendente*; l'insieme D è chiamato *insieme di esistenza o di definizione* della funzione u, mentre l'insieme unidimensionale C dei valori assunti dalla funzione chiamasi *codominio della funzione.*

Se il codominio si riduce ad un solo numero, la funzione dicesi **costante** in D.

Per indicare che u è funzione del punto $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si usa la scrittura:

$$u = f(p), \qquad \textit{oppure:} \qquad u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

o, più semplicemente, la scrittura:

$$f.$$

Questa notazione sarà da noi, in seguito, largamente usata.

Le funzioni reali di variabili reali si chiamano anche **funzioni numeriche.**

Se D' è un sottoinsieme proprio di D può essere necessario talvolta considerare la $f(p)$ facendo variare il punto p soltanto nell'insieme D'. Si viene così, in sostanza, a considerare una nuova funzione la quale, pur essendo rimasta inalterata la legge di corrispondenza che fa passare da p a u, differisce dalla $f(p)$ perché ha un « *diverso insieme di definizione* ».

Questa nuova funzione si chiama **restrizione** di $f(p)$ all'insieme D', o anche **funzione subordinata** all'insieme D'.

Evidentemente se C' è il codominio della restrizione di $f(p)$ si ha:

$$C' \subseteq C .$$

Sia $u = f(p)$ una funzione reale di variabili reali definita nel sottoinsieme D di R^n e diciamo C il suo codominio.

Se l e L sono, rispettivamente, gli estremi inferiore e superiore dell'insieme numerico C, essi si chiamano, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, rispettivamente, **estremo inferiore** e **superiore** della funzione $f(p)$ in D.

Questi estremi possono essere numeri o, rispettivamente, i simboli $-\infty$, $+\infty$. Nel primo caso, questi estremi possono essere valori effettivamente assunti dalla funzione, e ne sono allora il *minimo* e *massimo assoluto.*

Nel solito modo vengono definite le funzioni *limitate superiormente o inferiormente,* e *limitate* senz'altro, e la definizione di *oscillazione.*

La rappresentazione geometrica di una funzione di più variabili può ottenersi solo per $n = 2$, nel qual caso è uso comune indicare le variabili indipendenti con le lettere x e y e con z la variabile dipendente.

Data allora la funzione:

$$z = f(x, y) ,$$

definita in un insieme D del piano xy, si conduca per l'origine O un terzo asse z, ortogonale a tale piano. In corrispondenza al punto $p = (x, y)$ di D si consideri nello spazio il punto $q = (x, y, z)$, con $z = f(x, y)$, situato sulla perpendicolare condotta da p al piano xy.

Al variare di p in D il punto q descrive un luogo geometrico che si chiama il *diagramma* o *grafico* della funzione $f(x, y)$. Nei casi più comuni questo diagramma è una superficie nel senso intuitivo della parola.

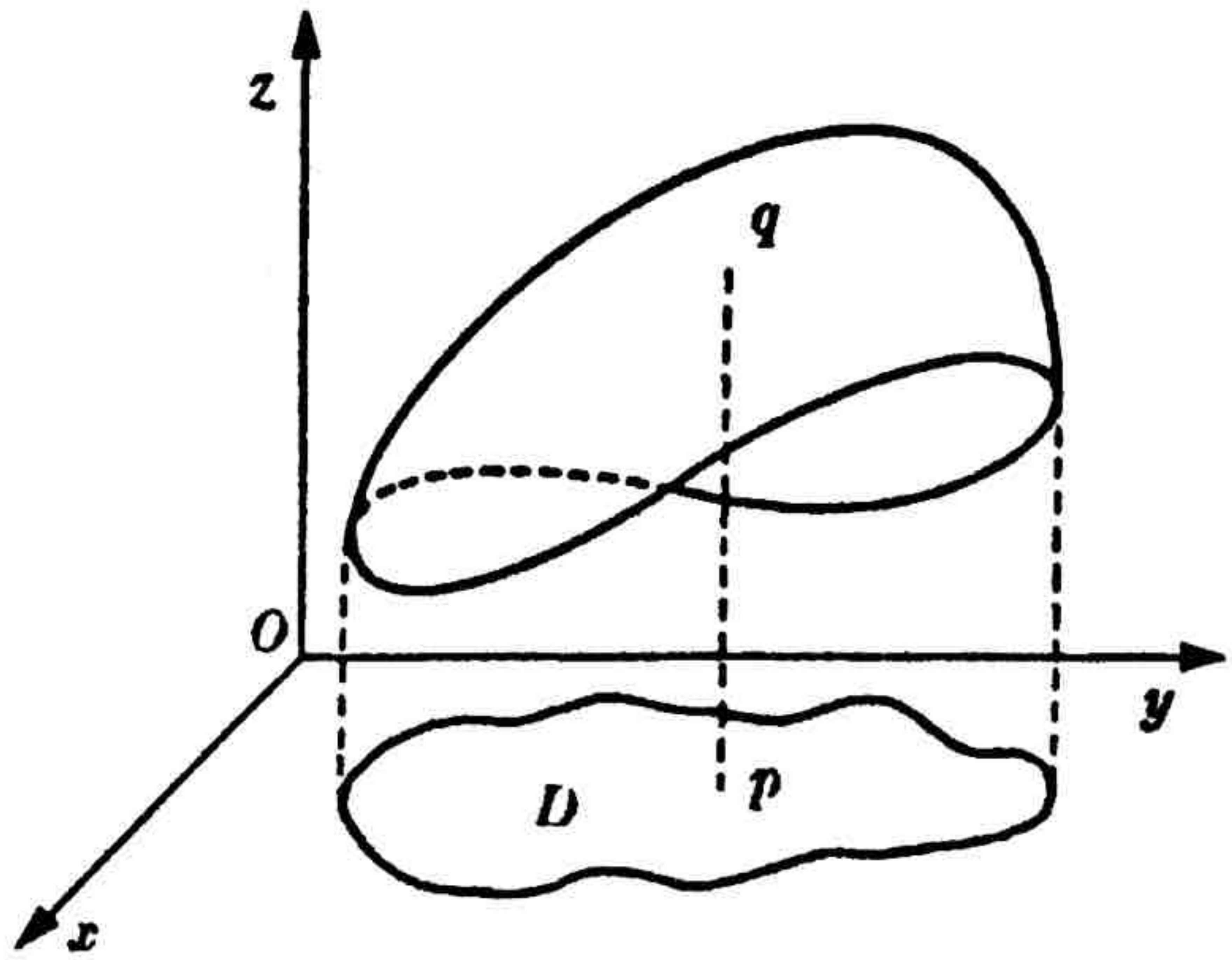

Fig. 2.

Esempi.

1) La funzione di due variabili:

$$z = \frac{1}{\operatorname{sen}(x-y)},$$

è definita per $\operatorname{sen}(x-y) \neq 0$, ossia per $x - y \neq k\pi$, ove k indica un intero arbitrario. Ne segue che la funzione è definita in tutto l'intero piano privato dei punti delle infinite rette di equazioni $x - y = k\pi$.

2) La funzione di tre variabili:

$$u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2},$$

è definita nei punti *non* esterni alla sfera di equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 .$$

2. — *Continuazione.*

Anche per le funzioni di più variabili sussiste il teorema di *Weierstrass*, già dimostrato nel Cap. IX, n. 5, Parte I, per le funzioni di una variabile, e precisamente:

Teorema di Weierstrass. — *Data una funzione reale $f(p)$, definita in un sottoinsieme* **limitato** *dello spazio R^n, esiste nella chiusura $\overline{D}$ di D,* **almeno** *un punto in* **ogni** *intorno del quale essa ammette lo stesso estremo superiore che ha in* **tutto** *D (¹), e analogamente per l'estremo inferiore.*

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella fatta per le funzioni di una variabile, e si basa sul teorema di *Pincherle-Borel.*

I punti di cui il teorema assicura l'esistenza, o *punti di Weierstrass*, possono appartenere all'insieme D, oppure no; nel secondo caso sono necessariamente punti di accumulazione per D.

Se pertanto D è un insieme chiuso, esso contiene i punti di *Weierstrass.*

3. — *Limiti delle funzioni reali di due o più variabili reali.*

Sia $z = f(x, y) = f(p)$ una funzione reale di due variabili reali definita in un insieme piano D e sia $p_0 = (x_0, y_0)$ un punto di accumulazione di D.

Dicesi che la funzione $f(p)$ ha per limite il numero λ per p tendente a p_0, e si scrive:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = \lambda ,$$

quando prefissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo δ tale che per tutti i punti p dell'insieme D, diversi da p_0 e appartenenti all'intorno circolare di centro p_0 e raggio δ, sia verificata la diseguaglianza:

$$| f(p) - \lambda | < \varepsilon .$$

Per indicare che λ è il limite della funzione $f(p)$ per $p \to p_0$, si usa anche la scrittura:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lambda .$$

(¹) Beninteso, di un siffatto intorno vanno considerati *solo* i punti che appartengono a D.

Osservazione. — In pratica, quando si vuole verificare se un dato numero λ è o no il limite di una data funzione $f(x, y)$, al tendere del punto (x, y) al punto (x_0, y_0), si può procedere nel modo seguente:

Si scrive la disequazione:

$$(1) \qquad |f(x,y) - \lambda| < \varepsilon ,$$

ove ε indica un numero positivo *qualunque*.

Se fra le soluzioni della (1) sono compresi *tutti* i punti di D contenuti in un conveniente intorno circolare di centro (x_0, y_0), escluso al più il punto (x_0, y_0), allora, in base alla definizione di limite, si può asserire che il numero λ è proprio il limite della funzione per $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Se invece la (1) non ammette soluzioni, oppure fra queste non sono contenuti *tutti* i punti (x, y) di D appartenenti ad un intorno circolare di centro (x_0, y_0), escluso al più quest'ultimo, allora λ non è il limite della funzione per $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Esempi.

1) *Verificare che risulta:*

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x^3 + xy^2 - x^2 - y^2}{x - 1} = 5 .$$

Si osservi innanzi tutto che la funzione data esiste in ogni punto del piano, *esclusi* i punti della retta $x = 1$.

Per provare perciò l'affermazione fatta basta far vedere che la diseguaglianza:

$$(1) \qquad \left| \frac{x^3 + xy^2 - x^2 - y^2}{x - 1} - 5 \right| < \varepsilon ,$$

risulta soddisfatta, *per quanto piccolo sia il numero positivo* ε, da tutti i punti di un intorno circolare di centro $(1, 2)$, e *non* giacenti sulla retta $x = 1$.

Essendo, per $x \neq 1$:

$$\frac{x^3 + xy^2 - x^2 - y^2}{x - 1} = \frac{x(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)}{x - 1} = \frac{(x^2 + y^2)(x - 1)}{x - 1} = x^2 + y^2 ,$$

risolvere la (1) equivale, per $x \neq 1$, risolvere la disequazione:

$$|x^2 + y^2 - 5| < \varepsilon ,$$

ossia il sistema:

$$5 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 5 + \varepsilon . \tag{2}$$

Si vede ora facilmente che il sistema (2) è soddisfatto da tutti i punti interni alla corona circolare delimitata dalle due circonferenze di equazioni:

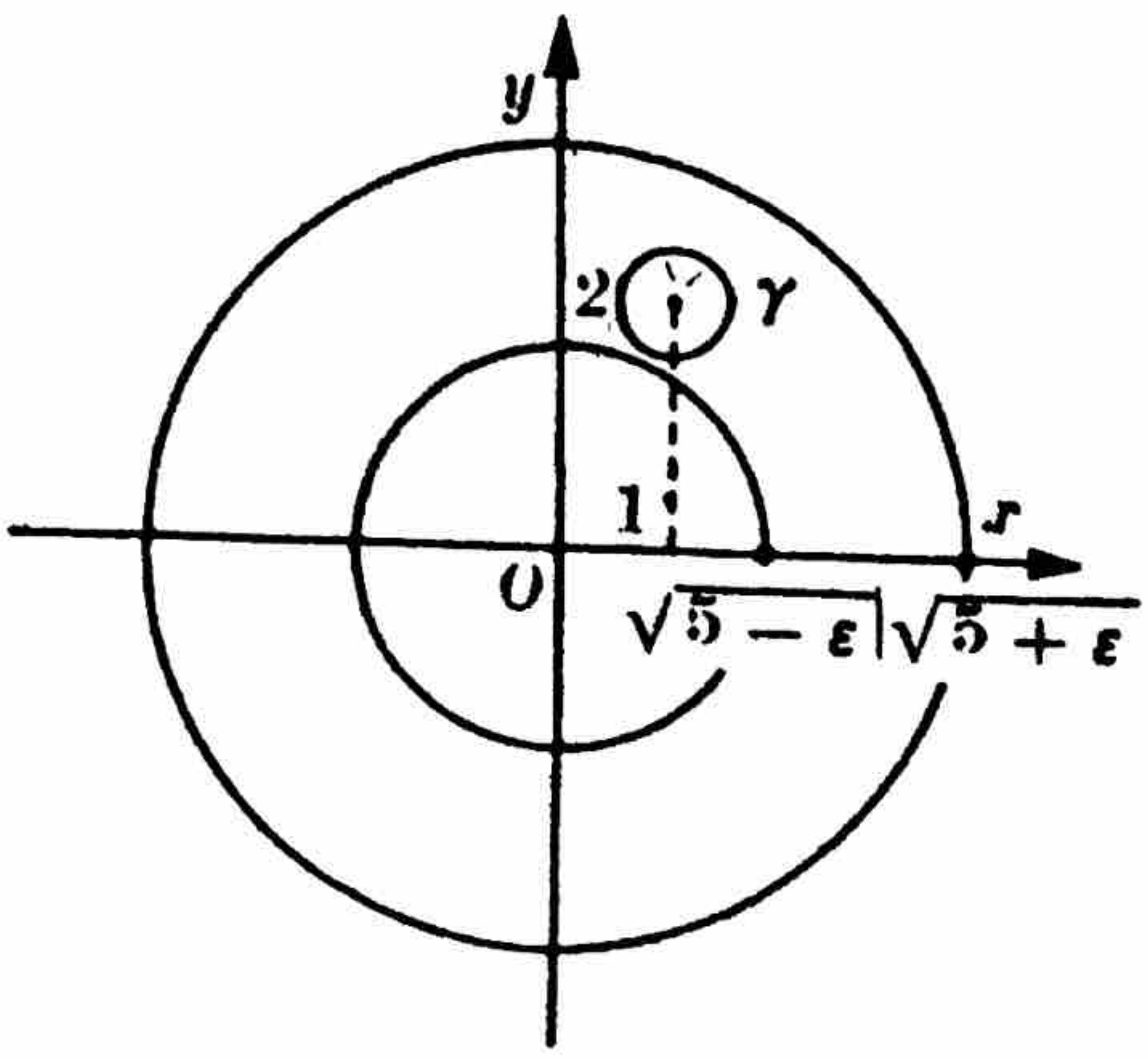

Fig. 3.

$$x^2 + y^2 = 5 - \varepsilon , \qquad x^2 + y^2 = 5 + \varepsilon .$$

Siccome il punto $(1, 2)$ è punto interno alla corona circolare, allora si può sempre tracciare un cerchio γ di centro $(1, 2)$ e tutto contenuto entro la corona circolare. La (1) è perciò soddisfatta da tutti i punti di γ che non stanno sulla retta $x = 1$, e ciò prova l'affermazione fatta.

2) *Data la funzione*:

$$z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} ,$$

definita nell'intero piano privato dell'origine, dimostrare che:

1°) *non esiste il limite*:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} ,$$

2°) *esiste il limite della funzione* **subordinata** *su ogni fissata retta r uscente dall'origine, e questo vale sempre zero.*

Per provare la prima affermazione, si osservi che in tutti i punti, diversi dall'origine, della parabola $y^2 = x$ si ha sempre $z = \frac{1}{2}$, mentre in tutti i punti della parabola $y^2 = -x$ si ha sempre $z = -\frac{1}{2}$. Poiché queste due parabole passano per l'origine, vediamo che in ogni intorno circolare dell'origine cadono infiniti punti in cui la funzione considerata vale $\frac{1}{2}$ e infiniti punti in cui vale $-\frac{1}{2}$; ciò basta per affermare che la funzione non ammette limite nel punto $(0, 0)$.

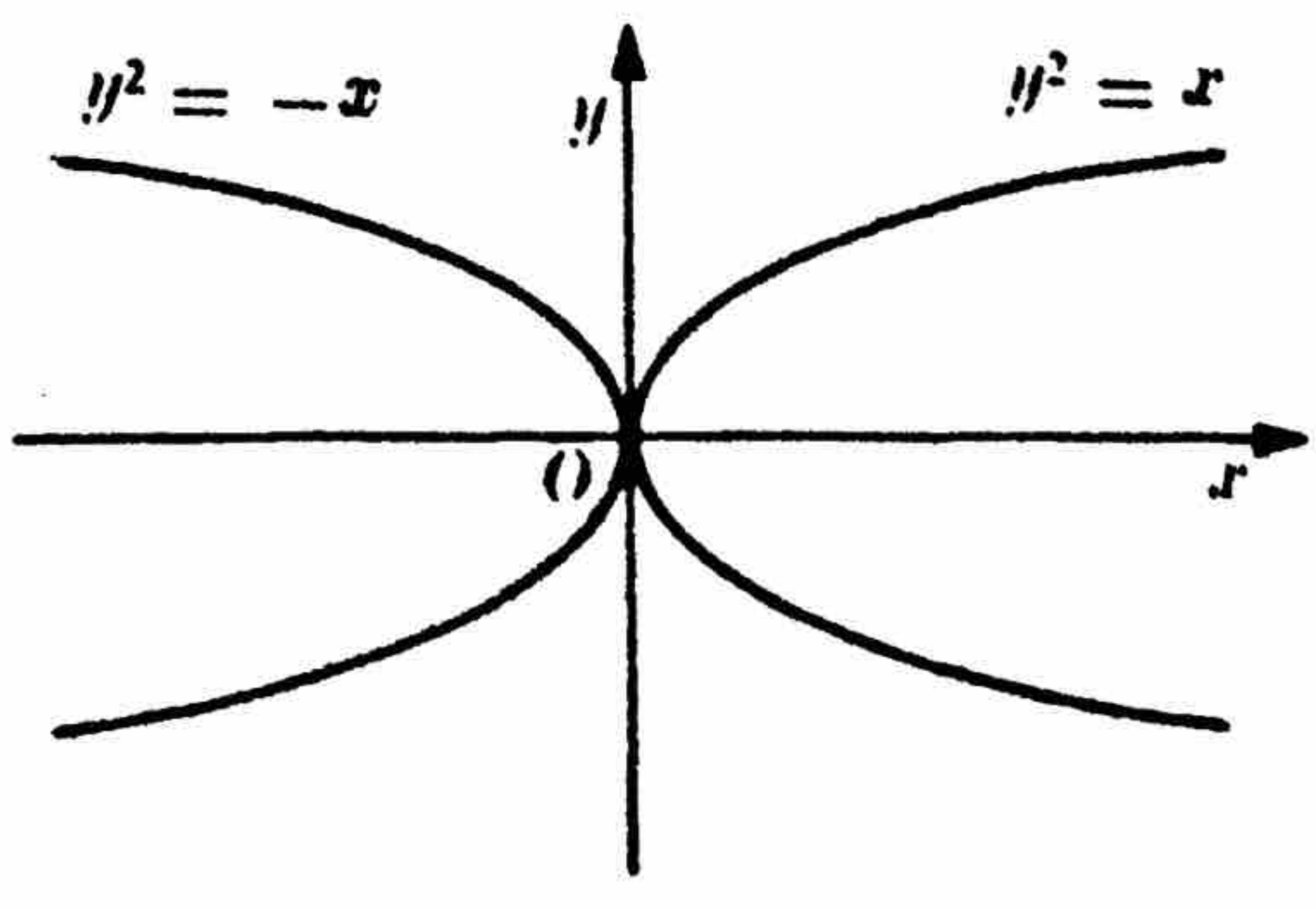

Fig. 4.

Per provare la seconda affermazione, sia r una retta qualsiasi, diversa dall'asse y, passante per l'origine e $y = mx$ la sua equazione. Sui punti di tale retta, diversi dall'origine, la funzione subordinata dalla z è:

$$z = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2},$$

e quindi, *qualunque* sia m, il limite di z, per $x \to 0$, è *sempre* zero.

La stessa cosa vale anche se il punto si muove sull'asse y, sul quale si ha costantemente $z = 0$.

4. — ***Osservazione.*** — Il limite:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y), \tag{2}$$

definito nel numero precedente, è un limite *doppio* o *superficiale*, ottenuto facendo tendere le due variabili x e y *simultaneamente* e *indipendentemente* ai propri limiti x_0 e y_0. Perciò, almeno in generale, non è lecito sostituire ad un limite doppio i seguenti due limiti semplici sovrapposti:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y), \tag{3}$$

che si calcolano facendo dapprima tendere x ad x_0, pensando la y costante e diversa da y_0, e poi, nella funzione della sola y che così si ottiene, facendo tendere y a y_0.

Anzi, almeno in generale, non è lecito invertire l'ordine di due operazioni di limite consecutive, cioè, in generale, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \neq \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione:

$$f(x, y) = \frac{x + (x + y)^2}{2x + y - (x + y)^2}, \tag{1}$$

e calcoliamo il $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)$.

A tale scopo si osservi che, per y fissato, diverso da zero e da uno, la (1) è una funzione, della sola variabile x, continua nel punto $x = 0$. Si ha perciò:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + (x + y)^2}{2x + y - (x + y)^2} = \frac{y}{1 - y},$$

e quindi:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{1-y}=0.$$

Calcoliamo invece il $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$. Si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{2-x}=\frac{1}{2}.$$

Si vede così che per la funzione considerata non è lecito invertire l'ordine delle due operazioni consecutive di limite.

Facciamo ora vedere che *non* esiste il $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

Infatti, lungo la retta, passante per l'origine, di equazione $y = mx$, la funzione considerata, per $x \neq 0$, vale:

$$f(x,y)=\frac{1+x(1+m)^2}{2+m-x(1+m)^2},$$

e quindi, lungo tale retta il limite, per $x\to 0$, è:

$$\frac{1}{2+m},$$

che varia al variare di m, cioè al variare della retta lungo la quale si fa tendere il punto (x,y) all'origine. Non esiste perciò, nell'origine, il limite della funzione che abbiamo preso in esame.

Il lettore ricordi però che sussiste il seguente teorema:

Se esistono i due limiti (2) *e* (3), *allora essi sono fra loro eguali.*

5. — *Continuazione.*

Analogamente a quanto si è fatto per le funzioni di una variabile, si danno anche le seguenti definizioni:

Dicesi che la funzione $f(p)$ ha per limite l'infinito per p tendente a p_0, e si scrive:

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=\infty,$$

quando prefissato ad arbitrio un numero $k>0$ è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo δ tale che in tutti i punti p

dell'insieme D diversi da p_0 e appartenenti all'intorno circolare γ di centro p_0 e raggio δ, sia verificata la diseguaglianza:

$$|f(p)| > k .$$

Se per ogni punto p di D in γ e diverso da p_0, vale sempre la:

$$f(p) > k ,$$

allora si dice che $\lim_{p \to p_0} f(p) = +\infty$; *se invece vale sempre la:*

$$f(p) < -k ,$$

si dice che $\lim_{p \to p_0} f(p) = -\infty$.

Se $f(p)$ è una funzione definita in un insieme *illimitato D*, allora:

Dicesi che la funzione $f(p)$ ha per limite il numero λ per $p \to \infty$, e si scrive:

$$\lim_{p \to \infty} f(p) = \lambda ,$$

quando prefissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo δ tale che per tutti i punti p di D esterni al cerchio di raggio δ e centro l'origine, risulti:

$$|f(p) - \lambda| < \varepsilon .$$

È ormai evidente il significato delle scritture:

$$\lim_{p \to \infty} f(p) = \infty , \qquad \lim_{p \to \infty} f(p) = +\infty , \qquad \lim_{p \to \infty} f(p) = -\infty .$$

Le definizioni date di limite per una funzione di due variabili sono formalmente identiche a quelle date per le funzioni di una variabile.

Ne segue che i teoremi sui limiti dimostrati per le funzioni di una variabile, valgono senz'altro anche per le funzioni prese ora in esame.

Inoltre, le definizioni che abbiamo dato in questi numeri si estendono immediatamente anche alle funzioni di tre o più variabili.

§ 2. - Continuità delle funzioni reali di più variabili reali.

6. — *Funzioni continue di due variabili.*

Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita in un insieme piano D e $p_0 = (x_0, y_0)$ un punto dell'insieme D.

Definizione. — *La funzione $f(x, y)$ si dice* **continua** *nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se, in corrispondenza ad un numero positivo ε fissato ad arbitrio, esiste un intorno circolare I del punto $p_0 = (x_0, y_0)$ tale che per ogni punto $p \in I \cap D$ risulta:*

$$(1) \qquad |f(p) - f(p_0)| < \varepsilon .$$

Dalla definizione data segue che:

1) *La f è continua negli eventuali punti isolati di D.*

Infatti, se p_0 è un punto isolato di D esiste un intorno circolare I di p_0 tale che l'insieme $I \cap D$ contiene soltanto il punto p_0. In tale insieme la f assume solo il valore $f(p_0)$ e perciò è soddisfatta la (1), qualunque sia $\varepsilon > 0$.

2) *Se $p_0 \in D$ è un punto di accumulazione di D, la f è continua in p_0 se, e solo se, risulta:*

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0) .$$

La dimostrazione è immediata.

La funzione $f(x, y)$ dicesi *discontinua* nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ di D quando in tale punto non è continua.

La funzione $f(x, y)$ si dice *continua in D* quando è continua in ogni punto di questo insieme.

Dalla definizione di continuità e dai teoremi sui limiti, seguono facilmente i seguenti teoremi:

1) *Se due funzioni sono continue in un punto p_0, sono pure continue in p_0: la loro somma, la loro differenza, il loro prodotto, il loro quoziente, ammesso in quest'ultimo caso che la funzione denominatore non si annulli in p_0.*

E dopo ciò è facile dimostrare la continuità di una funzione razionale in ogni punto in cui essa risulta definita.

2) *Se la funzione $f(x,y)$, definita nell'insieme D e continua nel punto p_0 di D, è positiva (negativa) in tale punto, esiste un intorno circolare I di p_0 tale che la $f(x,y)$ è ancora positiva (negativa) in $I \cap D$.*

3) *Il modulo di una funzione continua in un certo punto, è continuo in quel punto.*

Osservazione. — Sia $p_0 = (x_0, y_0)$ un punto, ad esempio, interno all'insieme D dove è definita la funzione $f(x,y)$ e supponiamo che tale funzione sia continua in p_0. Consideriamo la funzione $f(x,y_0)$, della sola variabile x, la quale è definita su un conveniente segmento di retta (parallela all'asse x e condotta per p_0) appartenente a D. Poiché $f(x,y)$ è continua in p_0, vale allora, in base alla definizione data, la diseguaglianza:

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \tag{5}$$

per tutti i punti (x,y) di un conveniente cerchio γ di centro p_0. Posto, nella (5), $y = y_0$, risulta:

Fig. 5.

$$|f(x,y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Questa diseguaglianza sussiste per per tutti i punti (x, y_0) del segmento pq, appartenente alla retta parallela all'asse x condotta per p_0, contenuto nel cerchio γ (v. fig. 5).

Ciò vuol dire che la funzione $f(x, y_0)$, della sola variabile x, è continua nel punto x_0, cioè che risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0).$$

Analogamente, dalla (5) per $x = x_0$, risulta:

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

per tutti i punti (x_0, y) del segmento rs (v. fig. 5). Tale diseguaglianza esprime che la funzione $f(x_0, y)$, della sola variabile y, è continua nel punto y_0, cioè che è:

$$\lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

Dunque:

Una funzione $f(x, y)$ continua nel punto (x_0, y_0) rispetto al **complesso** *delle due variabili (x, y), cioè continua secondo la definizione data, è anche continua separatamente rispetto a ciascuna delle variabili x e y.*

Però, almeno in generale, non vale il teorema inverso, cioè una funzione $f(x, y)$ può essere nel punto (x_0, y_0) continua separatamente rispetto a ciascuna delle variabili x e y, senza essere continua nel *complesso* delle due variabili.

Consideriamo, ad esempio, la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & per \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & per \quad x = y = 0, \end{cases}$$

e facciamo vedere che nell'origine è continua sia rispetto ad x che rispetto ad y, ma non rispetto al complesso delle due variabili (x, y).

Per provare che nell'origine la funzione è continua rispetto alla variabile x dobbiamo dapprima calcolare la funzione $f(x, 0)$ e poi il $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0)$, e far vedere che questo limite vale $f(0, 0) = 0$. Si ha:

$$f(x, 0) = 0,$$

e quindi $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0$.

Analogamente essendo: $f(0, y) = 0$, è: $\lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$.

Per provare ora che la funzione non è continua nell'origine, rispetto al complesso delle due variabili (x, y), dimostriamo che non esiste il $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$. Infatti, sia $y = mx$ l'equazione di una retta r passante per l'origine. Sui punti, diversi dall'origine, di tale retta, si ha:

$$f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2};$$

quindi, lungo tale retta il limite per $x \to 0$ della funzione data vale $\dfrac{m}{1 + m^2}$.

Siccome questo limite varia al variare di m, possiamo dire che la funzione data non ammette limite nel punto $(0, 0)$ e perciò in tale punto è *discontinua*.

Nel seguito perciò la continuità di una funzione $f(x,y)$ deve andar sempre intesa nel complesso delle due variabili (x,y), cioè secondo la definizione data.

7. — *Funzioni composte.*

Sia $f(x,y)$ una funzione reale di due variabili reali definita in un insieme piano D, e siano $\varphi(t)$, $\psi(t)$ due funzioni della variabile t definite in un intervallo unidimensionale $[a,b]$; inoltre per ogni t di $[a,b]$ supponiamo che il punto: $[\varphi(t), \psi(t)]$, appartenga all'insieme D.

Allora ha senso considerare la funzione:

$$F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)],$$

avente come insieme di definizione l'intervallo $[a,b]$.

Questa funzione $F(t)$ chiamasi **funzione composta** mediante le funzioni $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, le quali si chiamano *funzioni componenti*.

Sussiste il seguente:

Teorema. — *Se le funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sono continue nel punto t_0 e la funzione $f(x,y)$ è continua nel punto $[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)]$, allora la funzione composta:*

$$F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)],$$

è continua nel punto t_0.

Dimostrazione. — Per la continuità della $f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0), comunque si assegni un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero positivo δ tale che quando il punto (x,y) varia nell'intorno quadrato H di centro (x_0, y_0), di semidimensione δ, e appartiene a D, risulti:

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Inoltre, per la supposta continuità delle funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$ nel punto t_0, è certo possibile determinare un intorno K di t_0, contenuto in $[a,b]$, tale che, per t variabile in K, si abbia:

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta, \qquad |\psi(t) - \psi(t_0)| < \delta,$$

ossia, essendo $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$:

$$|\varphi(t) - x_0| < \delta, \qquad |\psi(t) - y_0| < \delta .$$

Di qui si vede che per t variabile in K, il punto $[\varphi(t), \psi(t)]$ varia nell'intorno quadrato H e sta in D. Ma allora per tali punti vale la (6), cioè risulta:

$$\left| f[\varphi(t), \psi(t)] - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon ,$$

ossia:

$$|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon ,$$

il che prova la tesi, cioè che è:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0) .$$

8. — *Funzioni continue in insiemi chiusi e limitati.*

Anche per le funzioni reali di due variabili reali, continue in un insieme chiuso e limitato, sussiste il

Teorema di Weierstrass. — *Ogni funzione reale $f(x, y)$ continua in un insieme chiuso e limitato D, è dotata in D di minimo e di massimo assoluto.*

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella relativa al caso di una funzione di una variabile che abbiamo sviluppato nel Cap. XI, n. 5, Parte I.

Vale anche il seguente:

Teorema. — *Se $f(x, y)$ è continua nell'insieme chiuso D, comunque si fissi un numero reale k, l'insieme D_k costituito dai punti di D ove risulta: $f(x, y) \geq k \; [f(x, y) \leq k]$, se non è vuoto, è sempre un insieme chiuso.*

Dimostrazione. — Si deve far vedere che se p_0 è un (eventuale) punto di accumulazione dell'insieme D_k, esso appartiene a D_k, ossia che risulta $f(p_0) \geq k$.

A tale scopo si osservi, innanzi tutto, che il punto p_0 essendo di accumulazione per D_k, è di accumulazione anche per D e quindi appartiene a D, perché esso è, per ipotesi, chiuso. In p_0 esiste quindi il valore della $f(p)$.

Essendo $f(p)$ continua in D, per p variabile in D risulta:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0),$$

e quindi anche, per *p variabile in D_k*:

(7)
$$\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0).$$

Ma in D_k è sempre $f(p) \geq k$ e quindi, per la (7), risulta anche:

$$f(p_0) \geq k,$$

che è quanto volevamo provare.

Da questo teorema segue facilmente il seguente:

Teorema. — *Ogni funzione reale $f(x, y)$ continua in un* **continuo** *D, se assume due valori α e β assume allora tutti i valori compresi fra questi.*

Dimostrazione. — Siano p_1 e p_2 due punti di D ove risulta:

$$f(p_1) = \alpha, \qquad f(p_2) = \beta,$$

e sia $\alpha < \beta$. Consideriamo allora un qualsiasi valore γ soddisfacente alle limitazioni:

$$\alpha < \gamma < \beta,$$

e dimostriamo che esiste almeno un punto $p_0 \in D$ ove è:

$$f(p_0) = \gamma.$$

A tale scopo indichiamo con D_1 e D_2 le porzioni di D in cui risulta, rispettivamente, $f(p) \leq \gamma$ e $f(p) \geq \gamma$. I due insiemi D_1 e D_2 non sono *vuoti*, perché il primo contiene almeno il punto p_1 ed il secondo almeno il punto p_2 e sono inoltre *chiusi*, per il teorema precedente.

Avendosi:

$$D = D_1 \cup D_2,$$

ed essendo D, per ipotesi, un *continuo*, allora i due insiemi D_1 e D_2 devono avere almeno un punto p_0 in comune (¹).

(¹) Si veda pag. 13.

Risultando in tale punto:

$$f(p_0) \leq \gamma ,$$

perché p_0 sta in D_1, e anche:

$$f(p_0) \geq \gamma ,$$

perché p_0 sta in D_2, segue:

$$f(p_0) = \gamma ,$$

come volevamo dimostrare.

Da questo teorema e dal teorema di Weierstrass segue il

Teorema. — *Ogni funzione reale $f(x, y)$ continua in un* **continuo limitato** *D, assume tutti i valori compresi fra il suo minimo ed il suo massimo assoluto.*

9. — *La nozione di continuità uniforme - Teorema di Heine-Cantor.*

Analogamente a quanto si è fatto per le funzioni di una variabile, si dà la seguente:

Definizione. — *Una funzione reale $f(x, y)$, definita in un insieme piano D, si dice* **uniformemente continua** *se, comunque si fissi un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di punti p' e p'' di D verificanti la relazione:*

$$\overline{p'p''} < \delta ,$$

risulti:

$$| f(p'') - f(p') | < \varepsilon .$$

È ovvio che:

Ogni funzione uniformemente continua in un insieme D, è anche continua in D.

Sussiste poi, come nel caso delle funzioni reali di una variabile, il

Teorema di Heine-Cantor. — *Una funzione reale $f(x, y)$ continua in un insieme* **chiuso e limitato**, *è ivi uniformemente continua.*