FUNZIONI REALI DI DUE VARIABILI REALI

ESERCIZI SVOLTI

ES. 1 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x,y) = 2^{x^2+3y^2}$$

La funzione è di tipo esponenziale. Pertanto, il suo C.E. coincide con il C.E. dell'esponente. In particolare, poiché il C.E. è sempre definito è banale che esso coincide con R^2.

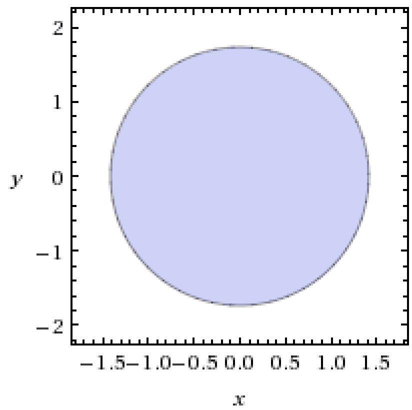
ES. 2 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}}$$

La condizione di esistenza si ottiene imponendo il radicando maggiore-uguale di zero; pertanto il suo C.E. è

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \colon 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} \geq 0\right\}$$

Rappresentiamo il C.E. in un riferimento cartesiano, osservando che l'equazione $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 0$ definisce una ellisse aventi semiassi rispettivamente $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. In particolare la disequazione $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} \geq 0$ è soddisfatta per valori interni all'ellisse:



Es. 3 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{x(y+1)}$$

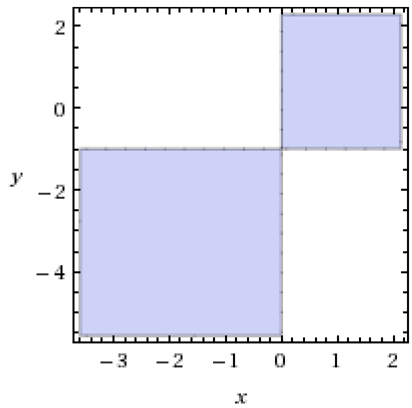
La condizione di esistenza di calcola imponendo il radicando maggiore-uguale di zero:

$$x(y+1) \geq 0$$

Ci tocca studiare il segno del prodotto:

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq -1 \end{array}\right.$$

Che graficamente rappresenta la parte di piano colorata in figura:



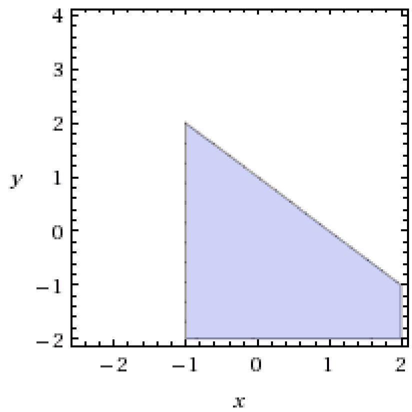
Es. 4 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x-y}$$

La condizione di esistenza è espressa dal sistema:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x-y \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema si risolve rappresentando graficamente le due rette $x+1=0$ e $1-x-y=0$ e prendendo la parte di piano caratterizzata dall'intersezione delle due disequazioni:



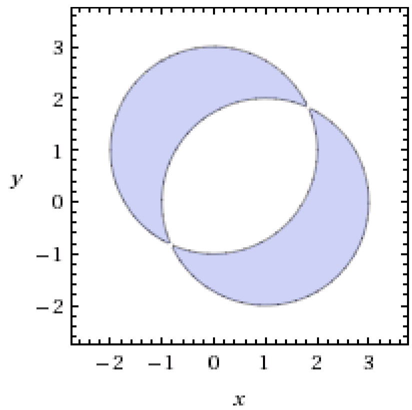
Es. 5 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x,y) = log\left(\frac{(x-1)^2 + y^2 - 4}{4 - x^2 - (y-1)^2}\right)$$

La condizione di esistenza è:

$$\left(\frac{(x-1)^2 + y^2 - 4}{4 - x^2 - (y-1)^2}\right) > 0$$

Le corrispondenti equazioni individuano due circonferenze, rispettivamente di centro (1, 0) e (0, 1), entrambe di raggio 2. L'insieme è raffigurato in basso. Il bordo non è compreso.



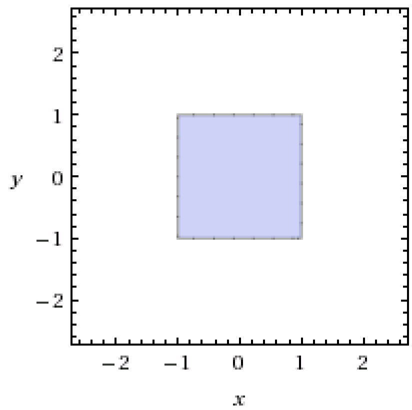
Es. 6 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$$

L a condizione di esistenza si calcola imponendo che entrambi i radicandi siano positivi. Pertanto si ha:

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\1-y^2\geq 0\end{cases}$$

il che si traduce nel prendere la parte di piano racchiusa nel quadrato formato dai segmenti di rette $x=\pm 1$ e $y=\pm 1$ compreso il bordo.



Es. 7 - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

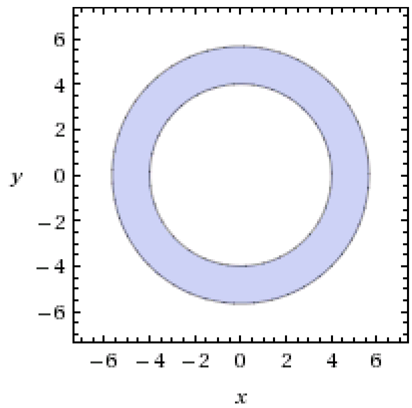
$$f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-16)(32-x^2-y^2)}$$

Il radicando, come è ormai noto, deve essere positivo. Pertanto si impone

$$(x^2+y^2-16)(32-x^2-y^2)\geq 0$$

il equivale a studiare il segno del rapporto.

Il C.E. sarà la corona circolare compresa tra le circonferenze $(x^2+y^2-16)=0\;\; e\,(32-x^2-y^2)=0$



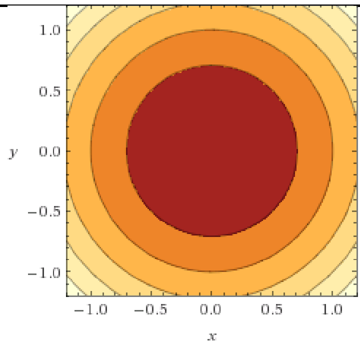
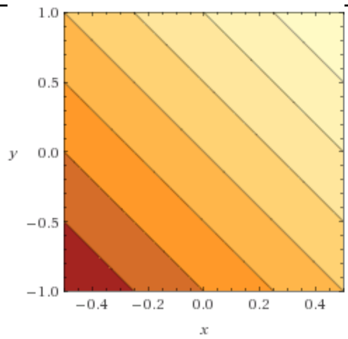
ESERCIZI PROPOSTI

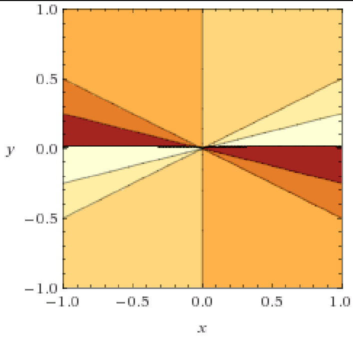
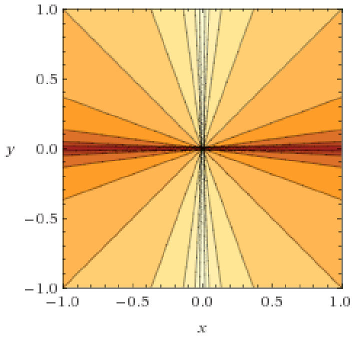
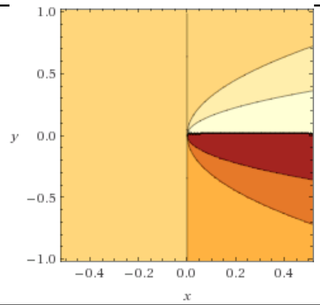
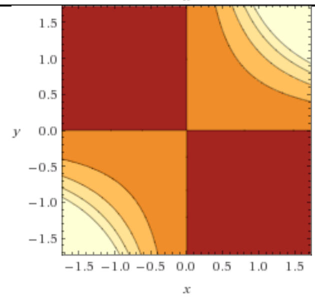
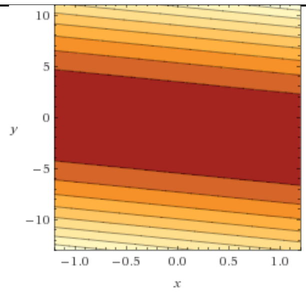
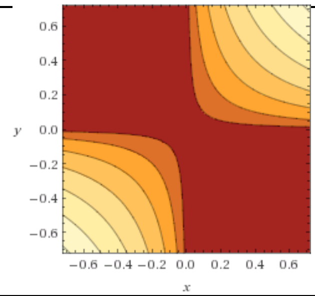
Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

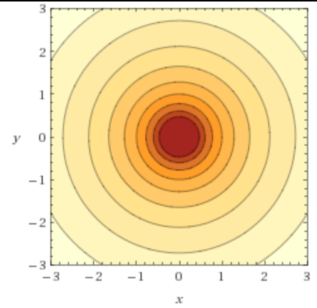
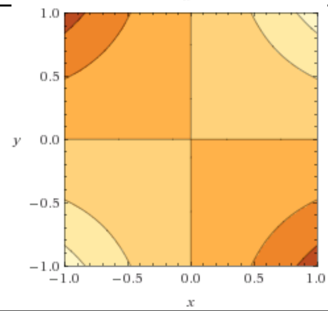
1	$f(x,y)=\dfrac{\arcsin(x+2y)}{arccos(3y-x)}$	
2	$f(x,y)=log(2x^2+2y^2-8)$	
3	$f(x,y)=\log_2(3x-4y-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+y-3)$	
4	$f(x,y)=\dfrac{1}{log(x^2-3y)}arccos\left(\dfrac{x}{4}\right)+\sqrt{y-2xy+x^2y}$	
5	$f(x,y)=\sqrt[6]{\dfrac{x-y}{y-3x}}+\sqrt[8]{\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2}}$	
6	$f(x,y)=\sqrt{sin(2x^2+2y^2)}$	
7	$f(x,y)=\dfrac{tg(x+y)}{\sqrt{2^x-4}}$	
8	$f(x,y)=\sqrt{-x^2-4y^2+2x+8y+5}+\sqrt{x^2+3y^2-2x-6y+2}$	
9	$f(x,y)=\log_{(y-x^2)}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)$ $f(x,y)=\log_y\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x+\sqrt{16-x^2}}}\right)$	
10	$f(x,y)=arccos(x^2-y^2)$	
11	$f(x,y)=\left(\dfrac{y+x^2}{y-x^2}\right)^{arcsin(x^2-y^2)}+\sqrt{2x^2-2y^2}$	
12	$f(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$	

13	$f(x,y) = (y-\|x\|)^{\sqrt{2-x^2-y^2}} + log(x^2+y^2-1)$	
14	$f(x,y) = \left(\log_{\frac{1}{2}}\|x-y\|-1\right)^{\log_2(xy-x-y+1)} + \sqrt[4]{x-1}$	
15	$f(x,y) = \|y-x^2\|^{tg\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)}$	
16	$f(x,y) = (\|x\|-y^2)^{\sqrt{144-16x^2-9y^2}}$	
17	$f(x,y) = \left[\frac{\|2^x-2\|-6}{3^{x+1}-9}\right]^{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}}}$	
18	$f(x,y) = \left[\frac{1}{\sqrt{\|tgx-tgy\|}}\right]^{\sqrt{x^2+y^2-4}}$	
19	$f(x,y) = \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{10arcsinx-2\pi}{6arcsinx-\pi}\right) + \sqrt{\|x\|-y}$	
20	$f(x,y) = log(2^{x-1}-1) - log(3^{x+5}-27) + \sqrt{x^2+y^2-4}$	

Determinare le linee di livello delle seguenti funzioni

1	$f(x,y) = x^2+y^2$	
2	$f(x,y) = 2x+y$	

3	$f(x,y) = \frac{x}{y}$	
4	$f(x,y) = log\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$	
5	$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$	
6	$f(x,y) = e^{xy}$	
7	$f(x,y) = (1 + x + y)^2$	
8	$f(x,y) = \sqrt{xy}$	

9	$f(x,y) = log(x^2 + y^2)$	
10	$f(x,y) = \arcsin(xy)$	

Ulteriori esercizi

1	$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$	16	$f(x,y) = \log(x^2 + y)$
2	$f(x,y) = \sqrt{log(x - y)}$	17	$f(x,y) = arctg\left(\frac{x - y}{1 + x^2y^2}\right)$
3	$f(x,y) = \sqrt{x^2 - 5xy + 4y^2}$	18	$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
4	$f(x,y) = \frac{x^2 - y + 5}{y^2 - 2x}$	19	$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$
5	$f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$	20	$f(x,y) = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y}$
6	$f(x,y) = \frac{y}{cosx}$	21	$f(x,y) = \sqrt{sin(x^2 + y^2)}$
7	$f(x,y) = \sqrt{3x - 2y + 5}$	22	$f(x,y) = \frac{1}{x - y}$
8	$f(x,y) = \sqrt{log(y^2 - 2x)}$	23	$f(x,y) = \sqrt{\frac{x + 3y^2}{2x^2 - 4y}}$
9	$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}{x^2 - 4y^2 - 4}$	24	$f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x^2 + y^2 - 3}{3x^2 - y^2}}$
10	$f(x,y) = \frac{1}{y - x} + \sqrt{1 - xy}$	25	$f(x,y) \log_{(y - x^2)}(3 - y)$
11	$f(x,y) = \frac{logx}{\cos(x + y)}$	26	$f(x,y) = \sqrt{x - y^2} + \sqrt{\frac{1}{4 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2}}}$
12	$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$	27	$f(x,y) = \log(x^2y^2 - 4) + \log(16 - x^2 - y^2)$
13	$f(x,y) = \arcsin(x - y + 4)$	28	$f(x,y) = \sqrt{\frac{xy - 3}{x^2 + 4}}$
14	$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{25 - y^2}$	29	$f(x,y) = arcos(x^2 - 2y^2)$
15	$f(x,y) = \arcsin(xy)$	30	$f(x,y) = \arcsin(x^2 - 4y + 1)$

31	$f(x,y) = \log(4 - \lvert x\rvert - \lvert y\rvert + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$
32	$f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 2x - y)(x^2 - 2x + y)}}{x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{5}{2}} + log\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)$
33	$f(x,y) = \sqrt{x^2 - x^4}$
34	$f(x,y) = \log(1 - x^2) + \log(1 - y^2)$
35	$f(x,y) = log\left(\dfrac{1 - x^2}{1 - y^2}\right)$
36	$f(x,y) = arcsin\left(\dfrac{x + y - 1}{x - y + 1}\right)$
37	$f(x,y) = arctg\left(\dfrac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$
38	$f(x,y) = log\left(log\left(\dfrac{(x-1)^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right)\right)$
39	$f(x,y) = log\left(\dfrac{arcsin(x^2 + y^2 - 1)}{xy}\right)$
40	$f(x,y) = arccos\left(\dfrac{x^2}{4} + y^2 - 2\right)$