rocci editore @ Studi Superiori

olume, ispirato all'approccio costruttivista anglosassone
 particolare al curricolo verticale Van de Walle-Lovin, fornisce
 strumento sia per gli studenti dei corsi di laurea in Scienze
la Formazione Primaria, sia per corsi di formazione per insegnanti
ervizio. Dopo una breve rassegna dei paradigmi teorici in didattica
la matematica e un esame delle basi metodologico-didattiche
costruttivismo, l'esposizione si concentra sui temi curricolari
enti per la scuola dell'infanzia e la scuola primaria: il senso
numero, l'esperienza spaziale, le operazioni a una e a più cifre
numeri naturali, le frazioni e i numeri decimali, la geometria,
re-algebra e la logica, la probabilità e la statistica. Si affrontano
incipali problemi didattici posti da ciascun tema e si suggerisce
 ricca esemplificazione di attività in classe.

**ncesco Paoli** è professore associato di Logica e filosofia della scienza
Jniversità di Cagliari, dove insegna Didattica della matematica presso
rso di laurea in Scienze della Formazione Primaria. Ha coordinato
getti contro la dispersione scolastica nella scuola secondaria
ndotto corsi di formazione in servizio per insegnanti di scuola primaria
condaria. Ha pubblicato, tra l'altro, il volume *Substructural Logics:*
*imer* (Kluwer, 2002).

ISBN 978-88-430-7206-4

9 788843 072064

:1,00

Progetto grafico: Falcinelli & Co.

Didattica della matematica: dai tre agli undici anni

Carocci editore

# Didattica della matematica: dai tre agli undici anni

Francesco Paoli

Carocci editore @ Studi Superiori

# 3

# Il senso del numero

In un curricolo verticale che abbraccia la formazione matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore, qual è il curricolo Van de Walle-Lovin, una buona partenza è ovviamente fondamentale. Lavorare bene nella scuola dell'infanzia e nel primo anno della primaria farà sì che per i nostri allievi la matematica, a differenza di quanto succede a molti e forse è successo anche ad alcuni di noi, sia un'esperienza piacevole e appagante, che accresce la fiducia in se stessi anziché ingenerare ansia e frustrazioni.

In questo capitolo ci occuperemo di come sia possibile promuovere nel bambino dai tre ai sei anni il *senso del numero*, ponendo le basi per lo sviluppo delle abilità determinanti per l'acquisizione della matematica negli anni successivi.

Perché ciò possa avvenire, l'insegnante deve familiarizzarsi con due aspetti essenziali:

1. *Conoscere lo sviluppo del concetto di numero dalla nascita ai sei anni*. Solo comprendendo come si evolve la costruzione della conoscenza numerica lungo questo arco temporale saremo in grado di impostare un'azione didattica mirata ed efficace. Riprendendo quanto già accennato nel CAP. 1, cercheremo pertanto di schematizzare l'immane mole di ricerche che sono state effettuate su questo tema in ambito psicologico, nelle scienze cognitive, in etologia.
2. *Comprendere come potenziare il senso del numero nelle sue diverse componenti*. Vedremo che la nozione di senso del numero è piuttosto complessa e in certa misura controversa; proveremo ad analizzarne le varie sfaccettature e ad approfondire i problemi didattici che ciascuno di questi aspetti solleva.

## 3.1
## Lo sviluppo del concetto di numero

Sullo sviluppo della conoscenza numerica nel bambino vi è una letteratura immensa, che non pretendiamo qui di voler riassumere neanche sommariamente. Ci limiteremo ad accennare ai modelli e alle teorie principali, che ogni insegnante in formazione (soprattutto se di scuola dell'infanzia o di scuola primaria) è tenuto a conoscere. Esporremo in breve la teoria di Piaget (PAR. 3.1.1), le ricerche sulla conoscenza numerica preverbale e la teoria di Gelman e Gallistel (PAR. 3.1.2) e infine alcuni modelli più recenti (PAR. 3.1.3).

OK

### 3.1.1. LA TEORIA DI PIAGET

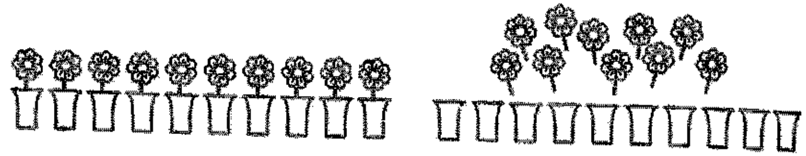
per insiemi ?

Gli studi contemporanei sullo sviluppo della cognizione numerica prendono le mosse da un fondamentale volume di Piaget e Szeminska, *La genesi del numero nel bambino* (Piaget, Szeminska, 1941). L'idea fondamentale di Piaget è che nei bambini in fase preoperatoria (fino ai sei-sette anni) i processi di confronto di numerosità sono ancora dominati da elementi percettivi. Il bambino si libera di tali distorsioni con lo stadio delle operazioni concrete, quando giunge ad operare sugli oggetti dell'ambiente circostante nella consapevolezza della *reversibilità* delle operazioni compiute, ossia del fatto che la situazione di partenza può venire ristabilita, e del fatto che l'alterazione di certi attributi può essere *compensata* dalla modifica di altre caratteristiche. In particolare, il soggetto arriva a comprendere che insiemi tra loro equipotenti restano tali anche dopo che alcune proprietà della disposizione spaziale dei loro elementi sono state modificate.

Piaget avvalora la sua tesi con diversi esperimenti, molti dei quali hanno al loro centro il concetto di *corrispondenza biunivoca*. In un classico esperimento sulla corrispondenza biunivoca "provocata", ad esempio, viene presentata a bambini di varie età una fila di bottiglie e viene loro chiesto di "mettere un bicchiere per ogni bottiglia". A un primo stadio, il bambino esegue la consegna affiancando alla fila di bottiglie una fila di bicchieri di ugual lunghezza, ma non necessariamente equinumerosa. Bambini più grandi riescono invece a mettere un bicchiere accanto ad ogni bottiglia; poi, però, se i bicchieri vengono avvicinati tra loro, alla domanda se siano di più i bicchieri o le bottiglie, rispondono che ci sono più bottiglie. Solo intorno ai sette anni questo tipo di



FIGURA 3.1
Esperimento piagetiano sulla corrispondenza provocata



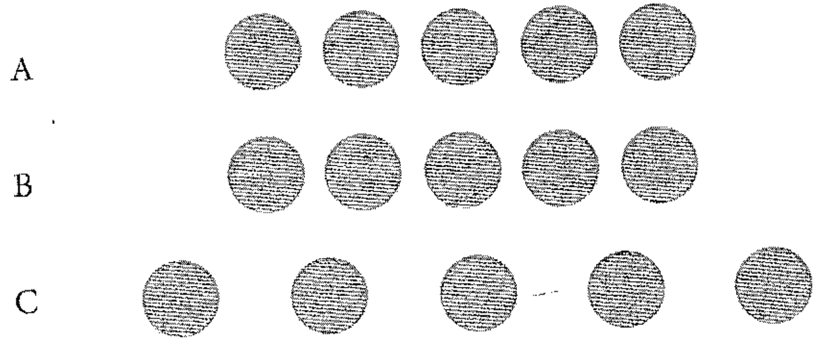
*Fonte*: Smith *et al.* (2000).

risposta scompare ed emerge la consapevolezza della permanenza della corrispondenza biunivoca al variare della collocazione spaziale degli oggetti (FIG. 3.1).

Oltre alla corrispondenza "provocata", Piaget indaga a fondo anche la corrispondenza "spontanea": stavolta al bambino viene presentato un certo numero di oggetti, ad esempio gettoni, e viene chiesto di mettere accanto ad essi altrettanti oggetti dello stesso tipo. In una prima fase, questa consegna porta alla costruzione di un raggruppamento di gettoni che ha più o meno la stessa forma di quello presentato, senza che ci si curi di quanti gettoni contiene. Bambini più grandi riescono invece a operare una corrispondenza termine per termine, ma non capiscono la sua permanenza in caso di deformazione della configurazione. È nuovamente intorno ai sette anni che il bambino giunge a comprendere tale permanenza.

Come interpretare questi esperimenti? Nel primo stadio individuato, gli insiemi sono considerati non come collezioni di più oggetti distinti, ma come un *tutto indivisibile*. La corrispondenza tra due insiemi è dunque una *corrispondenza qualitativa globale*: l'attenzione del soggetto si concentra sulle caratteristiche percettive globali degli insiemi stessi, come ad esempio la lunghezza delle file. Solo nella fase successiva (*corrispondenza intuitiva*) il bambino giunge a considerare l'insieme come un raggruppamento composto da più elementi; tuttavia, gli elementi percettivi giocano ancora un ruolo preponderante. Ad esempio, posto di fronte a due file di cinque gettoni ciascuna, se i gettoni della seconda vengono distanziati tra loro il bambino non comprende che la minore lunghezza della prima fila è compensata dalla sua maggiore densità e che un allineamento termine a termine delle due file può essere ripristinato senza alterazione della quantità semplicemente invertendo l'operazione eseguita, cioè ravvicinando nuovamente i gettoni della seconda fila (FIG. 3.2). Solo con lo stadio delle operazioni

FIGURA 3.2
Il bambino allo stadio preoperatorio può credere che i gettoni della fila C siano più numerosi di quelli delle file A e B, a causa della maggior lunghezza della fila




concrete i bambini, ormai padroni dei processi di inversione e compensazione, arrivano a una vera e propria corrispondenza *operante* o *quantificante*, astraendo dalle qualità individuali degli elementi degli insiemi considerati e conservando quale unica loro proprietà quella di essere un "più uno" (Dolle, 1995).

È in questo senso che va intesa l'affermazione piagetiana secondo cui saper mettere due insiemi in corrispondenza biunivoca non significa aver acquisito il concetto di numero: sin da molto piccolo il bambino capisce che due insiemi *A* e *B* possono essere messi in corrispondenza uno a uno quando contengono lo stesso numero di elementi, ma in seguito a una mutata disposizione degli elementi medesimi questa convinzione è resa vacillante dall'apparenza percettiva contraria. Solo nella fase della corrispondenza operante gli aspetti qualitativi vengono messi da parte e si ha piena comprensione del fatto che un qualsiasi elemento di *A* può esser fatto corrispondere a un qualunque elemento di *B*. La stessa capacità di contare, per Piaget, non è che l'acquisizione di una corrispondenza operante tra gli oggetti contati e i nomi dei numeri (che d'ora in avanti chiameremo *numerali*) adoperati per contare. Essa, quindi, si colloca successivamente allo sviluppo della corrispondenza biunivoca di tipo quantificante.

Vedremo nei paragrafi seguenti come le assunzioni cardine della teoria piagetiana vengano messe in discussione negli altri principali modelli evolutivi della cognizione numerica. Per il momento ci limi-



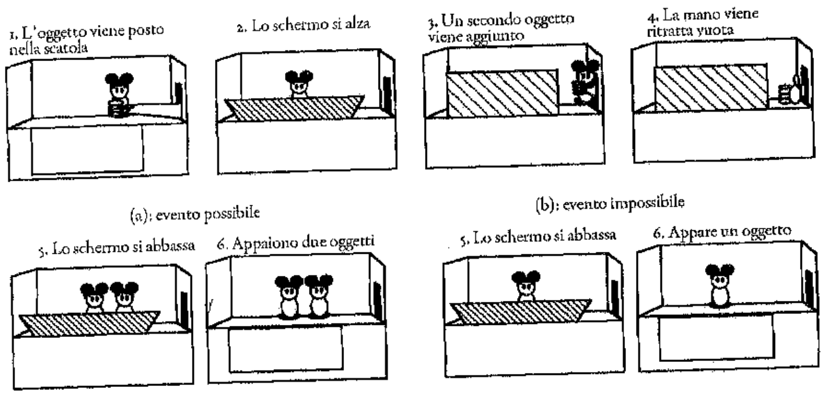
tiamo a sottolineare due esiti della ricerca psicologica successiva che invitano a ripensare le conclusioni degli esperimenti piagetiani sulla corrispondenza biunivoca. In primo luogo, si è visto che i processi di istruzione hanno margini più ampi di quanto Piaget credesse: invece di attendere passivamente che i bambini abbiano raggiunto lo stadio di maturazione appropriato per l'acquisizione di un certo concetto, l'insegnante può anticipare le tappe presentando loro attività e problemi di tipologia adeguata. Gelman (1969), ad esempio, ha mostrato che training specifici in compiti di conservazione del numero migliorano le prestazioni dei soggetti, sino a giungere a un 95% di risposte corrette in bambini nella fase preoperatoria. In secondo luogo, si è avanzata l'ipotesi secondo cui gli errori rilevati da Piaget nei bambini di scuola dell'infanzia potessero dipendere da incomprensioni linguistiche, provocate dal modo in cui la consegna era formulata (Donaldson, 1979). Una volta eliminata tale variabile di disturbo, le risposte dei bambini in età prescolare non differivano significativamente da quelle dei bambini nella fase delle operazioni concrete.

### 3.1.2. LA CONOSCENZA NUMERICA PREVERBALE E LA TEORIA DI GELMAN E GALLISTEL

Piaget tendeva a collocare l'acquisizione delle competenze aritmetiche in una fase relativamente avanzata dello sviluppo ontogenetico, successiva alla comparsa delle abilità logiche che esse a suo avviso presupponevano. Studi più recenti sulla prima infanzia hanno però evidenziato come anche bambini molto piccoli siano in grado di discriminare numerosità e persino di compiere operazioni aritmetiche molto semplici a livello mentale (per una rassegna si vedano Lucangeli *et al.*, 2003; Smith *et al.*, 2000).

Ovviamente, i neonati non sono in grado di parlare e quindi non è possibile interrogarli verbalmente per testare queste capacità, ma la psicologia dell'età evolutiva ha elaborato degli strumenti in grado di sopperire a questo inconveniente: ad esempio, la tecnica dell'*abituazione* si basa sul fatto che i bambini tendono a guardare più a lungo gli stimoli nuovi, che li incuriosiscono maggiormente. "Abituare" un bambino significa presentargli ripetutamente lo stesso stimolo, in modo da fargli perdere interesse. Antell e Keating (1983) abituarono un campione di bambini di età inferiore ai dodici giorni alla visione di un cartoncino con 3 puntini e verificarono che i tempi di fissazione aumentavano

FIGURA 3.3
La struttura dell'esperimento di Karen Wynn sulla competenza numerica dei neonati




*Fonte*: Wynn (1998).

(segno di "disabituazione") quando veniva presentato un cartoncino con 2 puntini. Analoghi risultati vennero riscontrati abituando i bambini alla visione di 2 puntini e aumentando successivamente i puntini a 3. Servendosi di metodi simili, Wynn (1992) rilevò che bambini di cinque-sei mesi erano in grado di compiere mentalmente una semplice operazione di addizione ($1 + 1$). Un pupazzo veniva loro mostrato e poi nascosto da uno schermo. Una mano, ben visibile ai bambini, aggiungeva poi un pupazzo dietro allo stesso schermo. A questo punto lo schermo veniva sollevato, e la sperimentatrice iniziava a seguire due procedure divergenti con due gruppi di soggetti. In una condizione sperimentale apparivano due pupazzi (la condizione "normale": $1 + 1 = 2$), mentre nell'altra condizione appariva un pupazzo soltanto (la condizione "paradossale": $1 + 1 = 1$). In quest'ultima condizione i bambini guardavano più a lungo lo stimolo, segnalando secondo l'autrice una sorta di sorpresa per un risultato non in linea con le attese della loro "aritmetica mentale" (FIG. 3.3).

Accanto alla psicologia dell'età evolutiva, anche l'etologia ha contribuito a modificare profondamente la nostra concezione dello sviluppo della cognizione numerica (Dehaene, 2000). Ricerche sui topi hanno evidenziato come in questa specie siano in atto meccanismi elementari di discriminazione di quantità, mentre gli scimpanzé sarebbero capaci persino di riconoscere il numerale scritto associato a de-



terminate numerosità. La cosa più interessante che questi studi hanno accertato, tuttavia, riguarda il modo in cui questi e altri animali non umani giungono a formulare le loro valutazioni aritmetiche. Le numerosità verrebbero rappresentate da grandezze mentali che variano in modo *continuo*, non discreto. La loro aritmetica non è basata sulla serie numerica e sul conteggio, ma su un "senso della quantità" di tipo analogico, che rende anche la discriminazione di piccole numerosità simile a un'operazione di *stima* di una grandezza continua, come la lunghezza o il peso.

Il modello della cognizione numerica che andiamo ad esaminare, dovuto a Gelman e Gallistel (1978), è senz'altro più coerente, rispetto alla teoria di Piaget, col quadro delle ricerche appena delineato. Secondo Gelman e Gallistel, le basi della competenza numerica si trovano in meccanismi preverbali *innati* che condividiamo con gli animali, e che si evolvono successivamente nel conteggio verbale e nell'acquisizione delle procedure di calcolo. Prima ancora di imparare i numerali, il bambino è in possesso di "etichette-numero" mentali a cui vengono poi fatti corrispondere i numerali stessi. In un certo senso, quindi, sappiamo contare prima ancora di apprendere i nomi dei numeri, perché disponiamo sin dalla nascita di una lista ordinata di etichette mentali che possiamo applicare per enumerare gli oggetti. Naturalmente non possediamo una conoscenza innata dei *numerali*, che ciascuno di noi deve apprendere nella propria lingua; ma questa acquisizione si riduce a stabilire una corrispondenza termine a termine tra i numerali stessi e le etichette-numero mentali corrispondenti.

Per Gelman e Gallistel, vi sono cinque principi che definiscono e guidano il conteggio.

1. *Principio della corrispondenza biunivoca*. Il bambino assegna uno e un solo numerale a ciascun oggetto contato. Il bambino che salta un oggetto nella conta, o conta due volte lo stesso oggetto, non ha acquisito il principio della corrispondenza biunivoca.
2. *Principio dell'ordine stabile*. I numerali usati nella conta si succedono in un ordine stabile e ripetibile. Il bambino che conta un insieme di tre oggetti con "1, 2, 3" e poi un altro insieme di tre oggetti con "2, 1, 3" ha compreso la corrispondenza biunivoca ma non il principio dell'ordine stabile. Il bambino che, invece, conta ripetutamente gli insiemi di tre oggetti con "2, 1, 3" ha probabilmente acquisito il principio dell'ordine stabile ma non ha una buona conoscenza dei numerali.

3. *Principio di cardinalità*. Il bambino è consapevole del fatto che il numerale associato all'ultimo oggetto contato indica la numerosità *di tutto l'insieme*. Se un bambino conta correttamente un insieme di cinque oggetti ma poi, alla domanda "Quanti sono?", esita o inizia a contare di nuovo, mostra di padroneggiare i principi della corrispondenza biunivoca e dell'ordine stabile, ma non il principio di cardinalità.
4. *Principio di astrazione*. Il bambino comprende che i principi precedenti possono essere applicati a una qualsiasi collezione di oggetti – persino ai numerali stessi, come avviene ad esempio quando facciamo una sottrazione contando a partire dal sottraendo sino a raggiungere il minuendo.
5. *Principio di irrilevanza dell'ordine*. Il bambino è consapevole del fatto che l'ordine in cui gli oggetti vengono contati non è importante ai fini degli esiti del conteggio.

Mentre i primi due principi vengono padroneggiati già a due-tre anni, il principio di cardinalità viene normalmente acquisito intorno ai quattro-cinque anni. Si osservi, però, che il fenomeno del *last word responding* (il bambino risponde alla domanda "Quanti sono?" con l'ultimo numerale usato nella conta) non è necessariamente indice dell'acquisizione del principio di cardinalità (Wynn, 1992; Bermejo *et al.*, 2004; Thompson, 2010). A tale domanda, infatti, rispondevano "7" anche bambini invitati a contare un insieme di cinque oggetti partendo da 3.

### 3.1.3. ALTRI MODELLI TEORICI

Mentre la teoria di Gelman e Gallistel sottolinea la preponderanza della componente innata nelle abilità numeriche, altri modelli assegnano un maggior valore alle conoscenze apprese, all'interazione con l'ambiente e al ruolo dell'esercizio e dell'imitazione. La teoria di Karen Fuson (1988) è nota anche col nome di teoria dei *contesti diversi*. Il perché di tale denominazione si spiega facilmente. Fuson sostiene che i numerali presentano significati diversi a seconda dei contesti in cui occorrono. I bambini apprendono tali significati così come apprendono il senso degli altri vocaboli, ossia in maniera dipendente dal contesto e dall'uso; gradualmente, poi, li integrano tra loro. I significati più importanti sono:
1. *Significato sequenziale*: occorre in contesti nei quali i numeri sono recitati in sequenza, ma non vengono usati per contare oggetti o riferirsi a numerosità (per esempio, nelle filastrocche dei numeri). I numerali non hanno in questo caso un referente.



2. *Significato di conta*: occorre in contesti nei quali i numeri sono usati per contare oggetti. Il referente di ciascun numerale è l'oggetto a cui esso è appaiato nella conta.
3. *Significato cardinale*: occorre in contesti nei quali i numeri sono impiegati per indicare la numerosità di un insieme di oggetti. Qui il referente di un numerale è qualcosa di più complesso: non è il singolo oggetto che viene contato, ma la cardinalità di tutto l'insieme di oggetti cui viene applicata la conta.

Sia Gelman e Gallistel che Fuson, come abbiamo appena visto, si distanziano in modo marcato dalle assunzioni di Piaget. Non tutta la ricerca contemporanea sulla cognizione numerica, a onor del vero, sovverte così radicalmente l'impostazione piagetiana originaria. Per Case (2000), ad esempio, le abilità numeriche sono legate a schemi organizzatori chiamati *strutture concettuali centrali*. A uno schema di tipo verbale, digitale e sequenziale all'opera nel conteggio si affianca uno schema a carattere spaziale-analogico che sovrintende ai confronti di quantità e alle operazioni. I due schemi si connettono formando una "linea mentale del conteggio".

## 3.2
## Che cos'è il senso del numero?

In letteratura l'espressione "senso del numero" (*number sense*) ricorre spessissimo ma in modo piuttosto disomogeneo. Secondo McIntosh *et al.* (1992, p. 3):

> Il senso del numero si riferisce a una comprensione generale dei numeri e delle operazioni, come pure all'abilità e all'inclinazione ad usare tale comprensione in modo flessibile per formulare giudizi matematici e sviluppare strategie adatte per manipolare numeri e operazioni. Rivela la capacità di usare i numeri e i metodi quantitativi come mezzi per comunicare, elaborare ed interpretare le informazioni. Produce l'aspettativa che i numeri siano utili e che la matematica abbia una certa regolarità.

In base a un'altra fortunata descrizione, bambini con un senso del numero ben sviluppato «hanno una buona comprensione del significato dei numeri, hanno instaurato numerose relazioni tra i numeri, sanno riconoscere i rapporti di grandezza tra numeri e conoscono gli effetti delle operazioni sui numeri» (NCTM, 2000). La vaghezza e la generalità di queste caratterizzazioni offrono una buona indicazione di come la nozione di senso del numero sia difficile da precisare mediante una definizione astratta; tutti gli autori sono concordi sul fatto che è molto più facile riconoscere il senso del numero là dove è presente che non definirlo (McIntosh *et al.*, 1992; Case, 2000).

Si tratta semplicemente di un concetto arduo da mettere a fuoco o siamo piuttosto in presenza di una medesima espressione che viene adoperata, di volta in volta, per riferirsi a concetti del tutto differenti? Secondo molti studiosi (Berch, 2005; Wagner, Davis, 2010), è quest'ultima l'alternativa corretta. Vi sarebbero almeno due significati che la locuzione "senso del numero" assume in letteratura:

- da un lato, si riferisce a un'abilità di livello inferiore, in parte condivisa con altre specie animali: un senso percettivo della quantità, responsabile di intuizioni quantitative elementari quali la percezione rapida e accurata di piccole numerosità, la capacità di contare o di confrontare grandezze numeriche. Si tratta di un'abilità su base biologica, strettamente apparentata con quel senso analogico della quantità di cui parla Dehaene e al quale abbiamo accennato nel PAR. 3.1;
- dall'altro, denota un'abilità di livello superiore, che include una comprensione ragionata delle relazioni matematiche, la scioltezza nell'eseguire le operazioni aritmetiche e nel lavorare con espressioni numeriche, il riconoscimento della regolarità e della coerenza della matematica. Questo secondo significato collima maggiormente con la caratterizzazione della NCTM sopra citata.

La prima accezione si ritrova più spesso nei lavori di matrice psicologica, mentre la seconda è prevalente negli scritti di didattica della matematica. È a quest'ultimo significato che faremo da qui in avanti riferimento. Come si può intuire, l'acquisizione di un'abilità tanto complessa richiede un arco di tempo molto lungo, che abbraccia la scuola dell'infanzia e la scuola primaria ma va addirittura oltre. Si parla tuttavia di "senso del numero precoce" (*early number sense*) per quell'insieme di competenze e strategie che vengono sviluppate dai tre ai sei anni di età, e che dunque è specifica responsabilità della scuola dell'infanzia promuovere e rafforzare. La ricerca indica che il senso del numero precoce, fondato su competenze informalmente acquisite prima di entrare nella scuola dell'infanzia, è un buon predittore del futuro rendimento in matematica (Gersten, Chard, 2001).

Un'abilità estremamente importante, quindi. Com'è possibile svilupparla al meglio? In particolare: il senso del numero precoce dovrebbe essere





ATTIVITÀ 3.1 ✂

*Obiettivo:* Sviluppare il senso della quantità e le capacità di stima.

*Materiali:* Videoproiettore.

*Svolgimento:* L'insegnante mostra col videoproiettore, per un secondo, un'immagine di una figura contenente un certo numero di pallini (la quantità esatta può variare a seconda dell'età dei bambini). Chiede: "Secondo voi quanti pallini erano?". Con bambini di scuola primaria, fa seguire una discussione invitandoli a spiegare come hanno formulato la propria stima. Nel secondo ciclo, si può anche impostare un dibattito "provocando" la classe con domande simili alle seguenti: quanto dovrebbe essere grande un contenitore per contenere un milione di chicchi di riso? E un miliardo? E se mettessimo un chicco di riso sulla prima casella di una scacchiera, due sulla seconda, tre sulla terza, e così via, a quale punto riempiremmo una scodella? E un sacco da 15 litri? E una stanza di appartamento di media grandezza?

*Fonte:* Wagner, Davis (2010).

fatto oggetto di un insegnamento specifico? Riguardo a questo interrogativo, vi sono opinioni divergenti. Vi è chi sostiene che il senso del numero non possa essere confinato in unità di apprendimento separate; lo sviluppo di un buon senso del numero sarebbe insomma più un "effetto collaterale" di altri apprendimenti che non un obiettivo a sé stante dell'istruzione (Greeno, 1991; Verschaffel, De Corte, 1996). Van de Walle e Lovin sono invece di diverso avviso. Solo attività didattiche mirate possono mettere i bambini in grado di costruire quella rete concettuale di relazioni fondamentali tra i numeri a cui abbiamo accennato nel CAP. 2 e che rappresenta il prerequisito per un successivo apprendimento efficace della matematica. Se mai, quindi, sarebbero le singole abilità matematiche specifiche a poter essere considerate "effetti collaterali" di un'istruzione mirata al senso del numero precoce. In ciò che rimane di questo capitolo vedremo come sia possibile impostare un'azione didattica rivolta a questo obiettivo.

## 3.3
## Alla base del senso del numero: confronti di quantità e conteggio

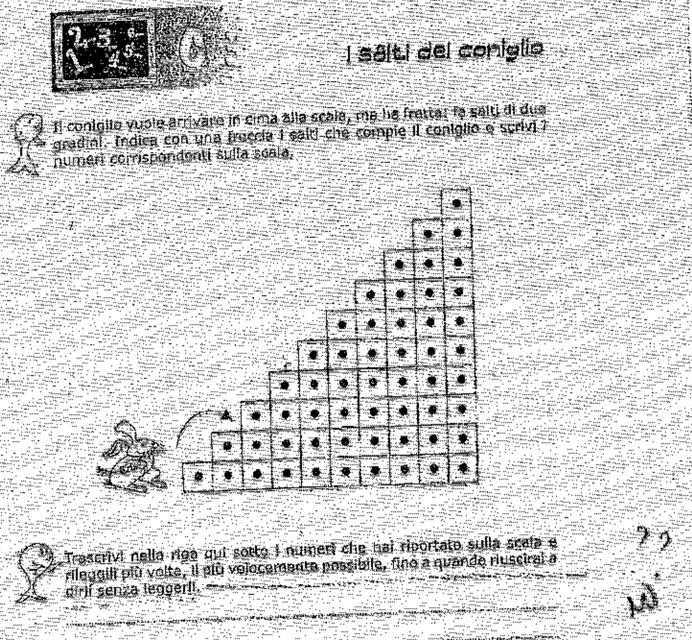
Le componenti fondamentali del senso del numero precoce sono l'abilità di conteggio e la capacità di confrontare correttamente piccoli insiemi di oggetti, riuscendo a stabilire se hanno lo stesso numero di

ATTIVITÀ 3.2

*Obiettivo*: Numerare per due in avanti e all'indietro con riferimento diretto alla quantità.

*Materiali*: La scheda riportata in FIG. 3.4.

FIGURA 3.4




*Svolgimento*: L'insegnante introduce la storia di un coniglio che vuole arrivare in cima a una scala, ma ha fretta e quindi fa salti di due gradini. I bambini vengono invitati a indicare con una freccia i salti compiuti dal coniglio e a scrivere i numeri corrispondenti sulla scala. In seguito, devono trascrivere i numeri riportati sulla scala e rileggerli più volte, fino al momento in cui riescono a dirli senza leggerli.

Terminata questa prima fase, l'insegnante osserva che il coniglio si trova in cima alla scala e invita la classe ad aiutarlo a scendere due gradini alla volta, scrivendo ancora una volta i numeri sui gradini. Di nuovo, i bambini devono trascrivere i numeri riportati sulla scala e rileggerli più volte, fino al momento in cui riescono a dirli senza leggerli.

*Fonte*: Lucangeli *et al.* (2003).



elementi e, in caso contrario, a dire quale contiene più oggetti e quale ne contiene meno.

Non ci soffermeremo a lungo sul conteggio: avendo già tracciato un quadro, se pur sommario, del ruolo importantissimo che esso svolge nei modelli teorici a cui abbiamo fatto cenno nel paragrafo precedente, ci limitiamo ad osservare che l'insegnante di scuola dell'infanzia dovrebbe dedicare un'attenzione adeguata alla conta sia in avanti che all'indietro, alla conta a partire da un certo numero (ad esempio, contando a partire da 4: 4, 5, 6, 7,...) e alla conta a salti (ad esempio, contando per 2 o per 3: 1, 3, 5, 7,... oppure 1, 4, 7, 10,...). Qualsiasi quaderno operativo o guida per l'insegnante di scuola dell'infanzia abbonda di esempi al riguardo; alcuni possibili suggerimenti sono riportati nell'attività 3.2.

Per ciò che riguarda i confronti di quantità, la ricerca ha appurato che i bambini di tre anni sanno quasi sempre individuare l'insieme che contiene *più* elementi se gli presentiamo due collezioni chiaramente diverse per numerosità. Nelle medesime situazioni, tuttavia, gli stessi bambini possono non saper indicare l'insieme che contiene *meno* elementi, anche se le due consegne sono tra loro equivalenti dal punto di vista logico. Probabilmente, ciò è dovuto al fatto che il bambino ha minori opportunità (a casa e a scuola) di familiarizzarsi con la parola "meno" di quante non ne abbia di incontrare il termine "più". È quindi opportuno non formulare le domande sul confronto di quantità usando in modo ripetitivo la frase "Quale ne ha di più?", ma chiedere almeno altrettanto spesso "Quale ne ha di meno?". Può essere una buona idea anche quella di porre le due domande una di seguito all'altra, in modo da connettere il concetto e l'espressione meno familiari con l'idea meglio nota. Al solito, le richieste di fornire una spiegazione ("Perché pensi che qui ce ne siano di meno?") possono darci molte utili informazioni sul modo in cui ciascun bambino sta costruendo l'idea di numero. Per un esempio di attività in classe, si veda l'attività 3.3.

## 3.4 Le relazioni fondamentali tra numeri

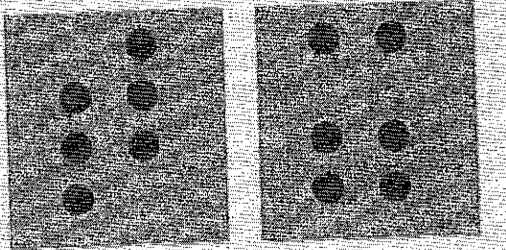
Saper contare e saper confrontare le numerosità di piccoli insiemi di oggetti sono solo gli aspetti più rudimentali del senso del numero precoce. Van de Walle e Lovin osservano che, purtroppo, molti curricoli tradizionali saltano direttamente e repentinamente da queste idee di

ATTIVITÀ 3.3

*Obiettivo*: Saper confrontare le numerosità di piccoli insiemi di oggetti.

*Materiali*: 12 *dot cards* (cfr. FIG. 3.5) suddivise in coppie. Le due carte di ogni coppia contengono lo stesso numero di puntini, ma disposti in modo diverso. Il numero di puntini varia da 1 a 6.

FIGURA 3.5



*Svolgimento*: Mettere le carte sul banco a faccia in giù. Il primo giocatore rovescia due carte a sua scelta. Se hanno lo stesso numero di puntini, il giocatore segna un punto; altrimenti le carte vengono rimesse a posto nuovamente a faccia in giù. Il turno passa poi al prossimo giocatore. Vince il giocatore che ha segnato più punti. Alcune varianti: 1) aumentare il numero delle carte usate; 2) aumentare il numero dei puntini; 3) appaiare una *dot card* a una carta con un numerale scritto.

*Fonte*: Way (2005).

base alle operazioni di addizione e sottrazione. Ma il bambino, se viene esposto alle operazioni aritmetiche fondamentali quando ha a disposizione un bagaglio ancora molto limitato di conoscenze sui numeri e sulle loro relazioni, affronterà i problemi-storia e il calcolo di somme e differenze mettendo in atto l'unica strategia che padroneggia, cioè contando. Come vedremo nel prossimo capitolo, ciò apre la strada ad ogni sorta di difficoltà e inefficienze.

In realtà, una volta acquisito il principio di cardinalità, il bambino può sviluppare il proprio senso del numero solo costruendo relazioni tra i numeri che vanno oltre quanto può acquisire tramite il conteggio. Van de Walle e Lovin citano quattro esempi:

– *Relazioni spaziali*: il bambino deve imparare a determinare la numerosità di insiemi di oggetti disposti in configurazioni particolari senza contarli.



– *Relazioni "Uno o due in più, uno o due in meno"*: il bambino deve assimilare le relazioni di questo tipo che sussistono entro la prima decina. Ad esempio, deve sapere che 7 è uno in più di 6 e che è 2 in meno di 9.
– *Relazioni parte-tutto*: il bambino deve saper scomporre i primi dieci numeri naturali nelle loro parti additive, costruendo ad esempio l'idea che 7 oggetti possono essere visti come 3 oggetti e altri 4, ma anche come 2 oggetti e altri 5.
– *Numeri-àncora*: nel nostro sistema di numerazione in base dieci, i numeri 5 e 10 giocano un ruolo fondamentale. È quindi importante che i bambini apprendano ad "ancorare" i fatti numerici al 5 e al 10.

All'inizio, per costruire queste relazioni, i bambini si serviranno dell'unico strumento di cui dispongono nella propria cassetta degli attrezzi: la conta. Serve molta pazienza: il conteggio diverrà sempre meno necessario man mano che i bambini apprenderanno relazioni nuove e useranno idee più potenti ed efficaci.

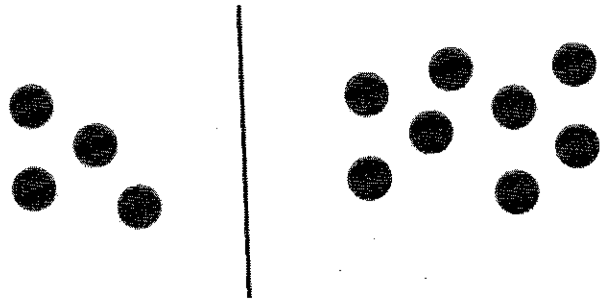
### 3.4.1. LE RELAZIONI SPAZIALI: IL *SUBITISING*

Provate a guardare la FIG. 3.6 e a dire quanti pallini ci sono a sinistra della linea di separazione, e poi a dire quanti pallini ci sono a destra. Adesso interrogatevi su *come* avete fatto a stabilire il risultato. Con ogni probabilità, per la figura di sinistra non avete avuto bisogno di contare: avete trovato la risposta corretta "a colpo d'occhio". Per l'altra configurazione, invece, è probabile che siate dovuti ricorrere al conteggio.

La ricerca sulla cognizione numerica ha stabilito che esiste una capacità verosimilmente innata, e in ogni caso accertata già nei neonati (Baroody, Wilkins, 1999), di determinare senza contare, in modo veloce e accurato, la numerosità di piccoli insiemi di oggetti, contenenti al massimo 5 elementi. A questa capacità è stato dato il nome di *subitising*[1], tradotto in italiano come "subitizzazione"; viene spesso usato anche il verbo derivato "subitizzare". Può essere possibile riconoscere in questo modo anche più di cinque oggetti, ma solo se sono disposti in configurazioni particolari, ad esempio sei oggetti collocati su due file di tre (Way, 2005). In generale, però, all'aumentare del numero di elementi dell'insieme, progressivamente si accresce anche il livello di imprecisione nella risposta. Per numerosità più grandi di 6-7 elementi, infatti, pare che nel nostro sistema di elaborazione del numero entri in

1. Nell'inglese americano è maggiormente diffusa la grafia *subitizing*.

FIGURA 3.6
Configurazioni "subitizzabili" e "non subitizzabili"



gioco un meccanismo di "stima" caratterizzato da minor precisione e accuratezza delle risposte stesse (Lucangeli *et al.*, 2003).

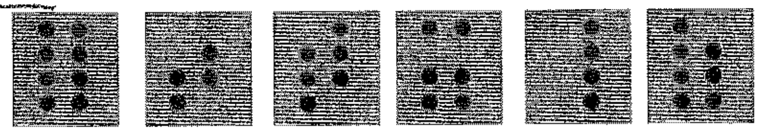
Un ottimo strumento per acquisire le relazioni di tipo spaziale tra i numeri e il *subitising* sono le *dot cards*, semplici cartoncini su cui sono stampati (o magari possono essere incollati o applicati) dei puntini (FIG. 3.7). Proposte didattiche con le *dot cards* sono riportate nell'ATTIVITÀ 3.4. In genere, si tratta di giochi assai graditi ai bambini, a cui piace molto mostrare quanto siano bravi a riconoscere le numerosità all'istante. Sono anche attività poco impegnative in termini di tempo e di risorse, che possono essere fatte velocemente in qualsiasi momento della giornata, anche al cambio d'ora o di materia.

### 3.4.2. LE RELAZIONI "UNO O DUE IN PIÙ, UNO O DUE IN MENO"

Relazioni di questo tipo costituiscono in effetti i primi "fatti aritmetici di base", di cui parleremo ampiamente nel prossimo capitolo. I bambini, quando contano, non riflettono sui rapporti che ci sono tra un numero e l'altro: tutto quello a cui pensano è appaiare numerali ad oggetti sino alla fine della conta. Occorrono situazioni didattiche appositamente predisposte per permettere loro di riflettere su queste relazioni e costruire, ad esempio, l'idea che 6 è due in più di 4 e 4 è due in meno di 6. Senza voler negare che il conteggio in avanti o all'indietro, per uno o per due, sia uno strumento utile anche in tal senso, invitiamo però a voler esplorare anche suggerimenti diversi quali quelli contenuti nell'attività 3.5.



FIGURA 3.7
*Dot cards*



ATTIVITÀ 3.4

*Obiettivo*: Acquisire relazioni di tipo spaziale tra i numeri.

*Materiali*: *Dot cards*; carte con dei numerali scritti; gettoni; piattini di plastica o altri recipienti.

*Svolgimento*: 1) Dare un piattino di plastica, dei gettoni e un numero adeguato di *dot cards* a ogni bambino. Mostrare una *dot card* e chiedere ai bambini di ricreare sul proprio piattino la figura che vedono. Chiedere quanti puntini vedono e anche come li vedono (le risposte ci daranno informazioni interessanti su come la cardinalità dell'insieme viene determinata). 2) Mostrare per un istante una *dot cards* si può chiedere ai bambini di dire a voce alta il numero, o di mostrare a loro volta una *dot card* con lo stesso numero di puntini, o ancora di costruire sul proprio piattino la medesima configurazione. 3) Può essere fatto anche l'esercizio inverso. Dire a voce alta un numero oppure mostrare una carta con un numerale. I bambini devono esibire la *dot card* corrispondente. 4) Mostrare un insieme di *dot cards* che rappresentano tutte lo stesso numero, tranne una. I bambini devono "trovare l'intrusa".

*Fonte*: Kolson *et al.* (2006).

### 3.4.3. LE RELAZIONI PARTE-TUTTO

Analogamente, un bambino che conta un insieme di 8 oggetti non ha per ciò stesso occasione di riflettere sul fatto che questo insieme può essere suddiviso in un insieme di 5 e in un altro di 3, oppure in un insieme di 2 e in un altro di 6. La capacità di pensare a un numero in termini delle sue parti additive è un passo in avanti fondamentale nello sviluppo del senso del numero; anche se si manifesta prima dell'età scolare, è compito dell'educazione matematica incoraggiarla e svilupparla, perché è la base per comprendere le operazioni e sviluppare buone strategie di calcolo mentale (Way, 2005).

Le attività sulle relazioni parte-tutto possono essere impostate a diversi livelli di formalizzazione, a seconda che si stia lavorando nella

ATTIVITÀ 3.5

*Obiettivo*: Costruire relazioni del tipo "uno in più, uno in meno, due in più, due in meno" entro la prima decina.

*Materiali*: Un set di tessere per il domino; un insieme di *dot cards*; gettoni; piattini di plastica.

*Svolgimento*: 1) I bambini giocano a un gioco del domino modificato: si possono affiancare due tessere non quando contengono lo stesso numero di puntini, ma quando una contiene un puntino in più (o in meno) dell'altra. Si può poi ripetere il gioco sostituendo la regola "uno in più o uno in meno" con la regola "due in più o due in meno". 2) Fornire a ciascun bambino un numero adeguato di gettoni e un piattino. Mostrare una *dot card* per qualche secondo. I bambini devono costruire sul piattino una configurazione che contiene due gettoni in meno di quelli contenuti nella *dot card*. Ripetere poi sostituendo la regola "due in meno" con la regola "due in più".

*Fonte*: Van de Walle, Lovin (2006).

scuola dell'infanzia o in prima primaria. Con gettoni o oggetti di altro tipo i bambini, lavorando individualmente o a piccoli gruppi, possono ad esempio costruire un raggruppamento di 7 oggetti e poi separarlo in due parti, oppure costruire direttamente raggruppamenti corrispondenti alle due parti. È importante che, una volta esaurita l'attività di manipolazione, gli alunni siano invitati a riflettere sul fatto additivo su cui hanno lavorato, dicendo ad alta voce o registrando in qualche modo (in forma scritta o anche solo mediante un disegno) la relazione costruita: ad esempio, "quattro e tre fa sette". In prima primaria, si può chiedere di scrivere il fatto aritmetico completo: $4 + 3 = 7$. È evidente come queste relazioni siano i primi passi verso la comprensione delle operazioni di addizione e sottrazione e del loro reciproco rapporto, su cui torneremo molto più ampiamente nel prossimo capitolo.

SUMERI

A questo proposito, sono assai utili le *attività della parte mancante*, come pure le loro controparti formalizzate, ossia i *problemi dell'addendo mancante* (esempio 3.1), strumenti importantissimi per concettualizzare la sottrazione come operazione inversa dell'addizione. Riley *et al.* (1983) hanno rilevato forti difficoltà nel risolvere questo tipo di problemi in bambini del primo ciclo, concludendo che tale apprendimento vada rinviato a una fase più avanzata della maturazione cognitiva del bambino. In realtà la ricerca successiva (Sophian, McCorgray,



1994) ha in parte rettificato tale interpretazione, riscontrando che già a cinque-sei anni i bambini sono in grado di fornire risposte che vanno "nella giusta direzione": dato il problema-storia dell'esempio 3.1, sapevano infatti dire che il risultato doveva essere minore di 5, ossia la cardinalità dell'intero. Le difficoltà dei bambini in età prescolare, quindi, probabilmente non dipendono da una carenza concettuale ma dall'indisponibilità di adeguate strategie computazionali (Baroody, Wilkins, 1999).

Alcuni suggerimenti per un proficuo lavoro in classe si possono trovare nell'attività 3.6.

### 3.4.4. I NUMERI ÀNCORA

Come già ricordato, i numeri 5 e 10 sono di importanza fondamentale nel nostro modo di fare aritmetica, per due motivi diversi (anche se ovviamente collegati): in primo luogo corrispondono al numero delle dita rispettivamente contenute in una mano e in entrambe le mani; inoltre, il nostro è un sistema di numerazione posizionale in base 10, e 5 è la metà di 10.

Van de Walle e Lovin ricordano quanto sia decisivo il ruolo di "àncora", di punto di aggancio, che i numeri 5 e 10 possono svolgere nella costruzione di relazioni significative tra i primi dieci numeri naturali. Come vedremo meglio nel prossimo capitolo, una delle strategie più naturali per eseguire alcune delle addizioni a una cifra è il *completamento alla decina*: per calcolare la somma $8 + 6 = 14$ completo a 10 l'addendo maggiore, poi aggiungo le quattro unità che rimangono. Una strategia immediata e naturale per molti di noi; si pensi però a quante relazioni di base tra i primi dieci numeri essa chiami in causa. Richiede per due volte il ricorso alle relazioni "due in più, due in meno", e in più presuppone che ci si serva del 10 come numero àncora.

ESEMPIO 3.1

*Versione problema-storia*. Bianca compra delle caramelle. La mamma le compra altre tre caramelle. Adesso Bianca ha cinque caramelle. Quante caramelle ha comprato Bianca?

*Versione equazionale*. $[] + 3 = ?$

*Fonte*: Baroody, Wilkins (1999).

ATTIVITÀ 3.6

*Obiettivo*: Costruire relazioni parte-tutto entro la prima decina.

*Materiali*: *Dot cards*; carte con dei numerali scritti; gettoni; piattini di plastica o altri recipienti.

*Svolgimento*: 1) Fornire a ciascun bambino un numero adeguato di gettoni e un piattino. Invitare i bambini a costruire una configurazione di 6 gettoni, e poi a "fare a pezzi il 6" suddividendo la collezione costruita in due sottocollezioni diverse, di grandezza a piacere. Fare anche l'esercizio inverso, facendo costruire prima le parti e poi facendole riunire in un tutto. 2) Scegliere un numero-bersaglio, ad esempio il 5. Scrivere alla lavagna una serie di numeri minori di 5, disposti in file di tre. In ciascuna fila devono comparire due numeri la cui somma fa 5, ad esempio:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 2 |

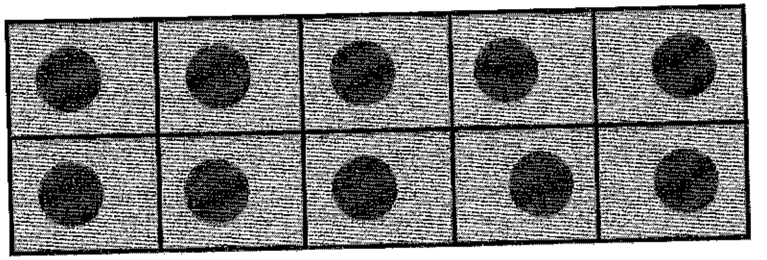
I bambini devono individuare quali sono gli addendi giusti e qual è invece l'"intruso". Cambiare il numero-bersaglio. 3) Mostrare una *dot card* con quattro puntini, oppure una carta con il numerale 4. Dire: "Vorrei un 7!". I bambini devono trovare l'addendo mancante, dicendo a voce alta il numero 3. Ripetere con numeri diversi.

*Fonte*: Van de Walle, Lovin (2006).

Uno strumento appropriato per raggiungere questo obiettivo è la *ten frame* (FIG. 3.8), che può essere realizzata semplicemente prendendo un cartoncino e suddividendolo in dieci riquadri uguali, disposti su due file, in ognuno dei quali può essere collocato un gettone. Poiché può essere prodotta facilmente, con pochi mezzi e praticamente a costo zero, è opportuno rifornire sempre tutti i nostri alunni con un numero adeguato di *ten frames*, di cui potranno all'occorrenza servirsi nei compiti per i quali le riterranno utili. All'inizio, occorrerà porre particolare attenzione a come i bambini rappresentano i numeri sulle *ten frames*: se chiediamo loro di "fare un 6", è probabile che tutti collochino 6 gettoni sul cartoncino, ma non è affatto scontato che seguano l'ordine dall'alto in basso e da sinistra verso destra. In una prima fase, qualsiasi rappresentazione potrà essere considerata accettabile. In seguito, però, è bene incoraggiare la classe a disporre gli oggetti nel modo sopra indicato: questa modalità uniforme permetterà ai bambini di confrontare e condividere più facilmente quanto



FIGURA 3.8
Una *ten frame*



stanno facendo con i loro compagni e faciliterà la costruzione delle strategie di completamento, molto più difficoltose da trovare in presenza di "buchi" o "salti".

Con bambini molto piccoli, ad esempio nei primi due anni di scuola dell'infanzia, è utile cominciare con la *five frame*, che come si può immaginare comprende un'unica fila di cinque caselle e facilita l'ancoraggio al 5.

Esempi di utilizzo delle *ten frames* sono riportati nell'attività 3.7 e in alcune attività del prossimo capitolo.

Una volta che la classe ha eretto, come sopra indicato, una solida impalcatura di relazioni e reciproche interconnessioni tra i primi dieci numeri naturali, si può iniziare a lavorare sulla decina successiva. Per il bambino che padroneggia il conteggio sino al 20 e sa rispondere alla domanda "Quanti sono due in più di 6?", non è molto difficile fare l'ulteriore piccolo passo in avanti necessario per rispondere a "Quanti sono due in più di 16?".

Anche in questo caso, le *ten frames* possono essere un valido ausilio. Il bambino che vede una *ten frame* completamente riempita e un'altra *ten frame* con sei gettoni dovrebbe essere in grado di dire senza contare che il totale è 16. Questo lavoro sui numeri nella prima ventina può essere fatto già alla scuola dell'infanzia o all'inizio della prima, ma non è ancora il momento adatto per introdurre il concetto di valore posizionale, di cui parleremo nel CAP. 5. Per i bambini di questa età, i concetti di decina e unità sono ancora astratti e difficili da comprendere. Non dovremmo quindi aspettarci che i bambini sappiano spiegare che l'1 del numero 16 rappresenta una decina.

ATTIVITÀ 3.7

*Obiettivo*: Riconoscimento istantaneo di numeri; comprensione delle relazioni di maggiore, minore e uguale; esplorazione delle relazioni numeriche entro il 20 usando il 10 come numero àncora.

*Materiali*: Un'adeguata quantità di *ten frames* sulle quali sono stati già *disegnati* dei puntini.

*Svolgimento*: 1) Il seguente gioco è una variante del gioco di carte "Guerra". I bambini lavorano a coppie; ciascun giocatore ha un mazzo di *ten frames* coperte. I giocatori girano simultaneamente la prima *ten frame* del proprio mazzo e dicono ad alta voce il numero corrispondente (dovrebbe avvenire mediante riconoscimento istantaneo, non contando). Il giocatore col numero più alto vince la carta dell'avversario; in caso di pareggio, le due carte rimangono in palio e vanno al vincitore del turno successivo. Con bambini più piccoli, si possono usare solo *ten frames* con al massimo 5 puntini e poi gradualmente aumentare il numero dei puntini. Con bambini più grandi, si può invitare il vincitore di ciascun turno a specificare di quanto il suo numero è maggiore di quello del compagno: ad esempio, con 8 e 5 chi vince deve dire "8 è tre in più di 5". 2) Prima di iniziare a giocare, si tolgono dal mazzo tutte le *ten frames* complete, contenenti dieci puntini. Una *ten frame* completa viene messa a faccia in su al centro del ripiano di gioco. I bambini giocano tutti insieme; ciascun giocatore ha un mazzo di *ten frames* coperte. A turno, i giocatori girano la prima *ten frame* del proprio mazzo. Se ad esempio un bambino ha una carta con un 4, deve dire "10 più 4 fa 14". Il giocatore col numero più alto vince le carte degli avversari.

*Fonte*: Gerdemann (2010).

## Approfondimenti

Sullo sviluppo della cognizione numerica nel bambino si può trovare abbondante materiale in lingua italiana, anche di taglio non specialistico. Citiamo ad esempio Lucangeli (1999); Lucangeli, Passolunghi (1995); Liverta Sempio (1997). Sulla matematica nella scuola dell'infanzia si vedano Bartolini Bussi (2008) e Angeli *et al.* (2011).



# 4
# Le operazioni a una cifra e le tabelline

Integrare con [illegible] [illegible].

Se l'aritmetica è tradizionalmente il cuore del curricolo di matematica nella scuola primaria, lo studio delle operazioni a una cifra rappresenta il cuore del curricolo di aritmetica per buona parte del primo ciclo. Al pari dell'acquisizione delle abilità di cui abbiamo trattato nel capitolo precedente, anche un tale apprendimento solleva problemi didattici relativi a due distinti aspetti:

1. *Comprendere il significato delle quattro operazioni*. Il bambino deve costruire rappresentazioni adeguate delle operazioni fondamentali per capire quale operazione eseguire in una data situazione problematica. In altri termini, e in analogia con quanto abbiamo già detto riguardo al senso del numero, il bambino dovrà sviluppare un "senso delle operazioni", una comprensione integrata di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione e dei diversi significati che queste assumono nei contesti problematici quotidiani. Relativamente a tale aspetto, una difficoltà è data dal fatto che i bambini tendono all'inizio a vedere un'operazione esclusivamente sotto l'aspetto *procedurale*, ossia come "azione" che dev'essere compiuta, e non anche sotto l'aspetto *statico*, ovvero come oggetto matematico eventualmente dotato di proprietà (associativa, commutativa ecc.: Sfard, 1991; Barmby *et al.*, 2009). Questo apprendimento dovrà essere gradualmente costruito. Come si può raggiungere al meglio tale obiettivo?
2. *Apprendere e rendere automatici i fatti aritmetici di base*. Oltre a ciò, occorrerà mettere i bambini nella condizione di padroneggiare il calcolo con le quattro operazioni. In vista del successivo scoglio costituito dalle operazioni con operandi a più cifre, è essenziale che gli studenti acquisiscano e rendano via via automatici tutti i *fatti aritmetici di base*: le addizioni e le moltiplicazioni con operandi entro il 10 e le sottrazioni e divisioni inverse rispetto a tali addizioni e moltiplicazioni (ad