586. D’Amore B. (2006). Basi epistemologiche della Didattica della Matematica. In: D’Amore B. (editor) (2006). *Matematica: l’emergere della didattica nella formazione*. *Rassegna*. XIV, 29, 8-14.

Basi epistemologiche della Didattica della Matematica

Bruno D’Amore

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia

La ricerca in didattica disciplinare degli anni inizio ’80 - fine ’90 ha contribuito ad allentare l’attenzione dalla problematica dell’insegnamento e ad accentrarla invece sul fenomeno dell’apprendimento, non accettando per esso un unico modello teorico psicologico o pedagogico. Questa accezione si è sviluppata soprattutto in didattica della matematica, disciplina che si è rivelata trainante per altre (soprattutto per la didattica della storia, delle scienze naturali ed altre). Questa forza trainante è certo dovuta ad alcuni strumenti – chiave che sono stati dapprima evidenziati, poi studiati, teorizzandoli in un ambito epistemologico che si è rivelato vincente. Mi limiterò qui solo ad evidenziare alcuni di questi *strumenti*, rinviando il lettore interessato a (D’Amore, 1999).

1. Il contratto didattico

Uno dei primi tentativi di “definizione” del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d’insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l’allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l’accesso a questo compito si fa attraverso un’interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall’allievo ed i comportamenti dell’allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico» (Brousseau, 1986).

Spesso queste “attese” sono del tutto implicite, non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *l'età del capitano*; lo racconterò qui di seguito, così come l’ho vissuto (e fatto vivere) personalmente (D’Amore, 1993). In una classe IV elementare (età degli allievi 9-10 anni) di un importante centro agricolo, ho proposto il celeberrimo problema (nel quale il “capitano” diventa un “pastore”): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?». In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte al suo sgomento, ho spiegato alla maestra che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità), dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un’altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti (una ed una sola volta), e possibilmente nell’ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun’altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L’unico imbarazzo stava semmai nella scelta dell’operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell’addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...

Con l’espressione *effetto «età del capitano»* si designa oggi la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell’enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica.

Naturalmente, il “caso” non è esclusivo della scuola elementare ma, mutando quel che c’è da mutare, interessa ogni ordine di scuola.

Tale effetto rientra tra quelli cosiddetti di *rottura* del contratto didattico: se anche l’allievo si rende conto dell’assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche. Ma lo studente non ha la forza, non essendo mai stato abituato, a rompere il contratto e preferisce rispettarne le supposte clausole pur di non rischiare, pur di non osare in prima persona.

Un esempio di scuola secondaria superiore, raccontatomi da un supplente; il professore propone agli allievi la seguente equazione di secondo grado:

$(x\text{-}1)(x\text{-}2)=0$

e chiede agli studenti: Trovare le radici di questa equazione.

Gli studenti, nessuno escluso, moltiplicano tra loro i due binomi… Ma come, nessuno si lancia, senza fare calcoli, affermando semplicemente: «Le radici sono 1 e 2»? No, nessuno, perché? Per contratto didattico! Lo studente *interpreta* le supposte attese dell’insegnante; rispondere così è troppo semplice, il prof certamente vuole vedere se sappiamo fare i conti, vuol vedere applicata la formula risolutiva, impossibile che si accontenti di così poco…

Ci si aspetta sempre che uno studente rompa il contratto, osi, rischiando le proprie competenze; questo sarebbe apprendimento vero, significativo, genuino; ma questo, ahinoi, accade poso spesso in aula…
Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissini anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

2. Conflitti e misconcezioni

Un altro argomento di studio in didattica della matematica emerso con estrema forza e grande rilievo riguarda i *conflitti cognitivi*. Si tratta di questo: lo studente può nel tempo aver assunto un concetto ed essersene fatto un'immagine; questa immagine può essere stata rinforzata nel tempo da prove, esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto ad un'altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall'insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente.
Si crea così *conflitto* tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva.
Legata alle idee di "immagine di un concetto" e "conflitto", c'è un'importante questione che riguarda la *misconcezione*. Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.
Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute.
Qui si presenta la vasta ed interessante problematica del curricolo nascosto. Lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica *correttamente* regole *scorrette*. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Se l'insegnante non si rende conto di ciò, le sue sollecitazioni cadono a vuoto perché lo studente ha già incluso nel proprio curricolo quelle regole che ritiene corrette e che, in taluni casi, hanno funzionato.
Per esempio, in una III elementare, uno studente eseguiva in colonna le seguenti sottrazioni:

37-	89-	26-
56-		

24= 67= 18=
43=
---- ---- ----
----
13 22 12
13

L'insegnante osservò che tre sottrazioni su quattro erano state risolte correttamente, diede dunque una valutazione positiva, ma invitò lo studente, nella terza, a "prendere in prestito una decina". Lo studente non capiva di che decina si stava parlando perché aveva in mente un'altra regola personale: per eseguire le sottrazioni in colonna si procede da destra verso sinistra e, in ogni colonna, si sottrae dal più grande il più piccolo. Ne aveva avuto conferma in molti casi, la comunicazione che riguardava casi come la terza sottrazione non gli era giunta per chissà quale motivo, e dunque aveva assunto nel suo curricolo quella "regola". Essa funzionava *quasi* sempre e, nei casi negativi, egli non capiva perché: stava usando *correttamente*, infatti, una regola che non sapeva essere invece scorretta. Una vera e propria misconcezione.

Dunque, il conflitto cognitivo è un conflitto "interno" causato dalla non congruenza tra due concetti, o tra due immagini o tra un'immagine ed un concetto.
Alla base dei conflitti ci sono quindi le *misconcezioni*, cioè concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Attenzione, però: lo studente non lo sa e dunque ritiene che le sue, quelle che per il ricercatore o per l'insegnante sono misconcezioni, siano invece concezioni vere e proprie! Dunque è l'adulto che sa essere quelle elaborate e fatte proprie dai ragazzi delle misconcezioni. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale: non si tratta di punire, di valutare negativamente; si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica. In un certo senso, dato che anche i bambini molto piccoli (3-6 anni) hanno concezioni matematiche ingenue ma profonde ottenute empiricamente o per scambio sociale, si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene la matematica, sia costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni corrette.
In un certo senso, le misconcezioni, intese come detto (concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica) non sono eliminabili, né costituiscono del tutto un danno. Sembrano un momento delicato necessario di passaggio, da una prima concezione elementare (ingenua, spontanea, primitiva, ...) ad una più elaborata e corretta (D'Amore, Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005).

3. Immagini e modelli

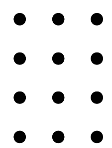
Appena un rapido cenno su questo complesso argomento. Poiché ho fatto riferimento, sopra, a termini come “immagine” e “modello” è bene chiarire che sto usando la seguente terminologia.
Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L’immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell’individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall’individuo). Tuttavia l’immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria.
L’insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative ad un certo concetto costituisce il modello mentale (interno) del concetto stesso.
Detto in altro modo, lo studente si costruisce un’immagine I_1 di un concetto C; egli la crede stabile, definitiva. Ma ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni su C che non sono contemplate dall’immagine I_1 che aveva. Egli deve allora (e ciò può essere dovuto ad un conflitto cognitivo, *voluto* dall’insegnante) adeguare la “vecchia” immagine I_1 ad una nuova, più ampia, che non solo conservi le precedenti informazioni, ma accolga anche le nuove. Di fatto si costruisce una nuova immagine I_2 di C. Tale situazione può ripetersi più volte durante la storia scolastica di un allievo.
Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nei mesi o negli anni, da un’immagine ad un’altra più… potente e si può immaginare questa successione di costruzioni concettuali, cioè di successive immagini I_1, I_2,…, I_n, I_{n+1},… come una specie di scalata, di “avvicinamento” a C.
Ad un certo punto di questa successione di immagini, c’è un momento in cui l’immagine cui si è pervenuti dopo vari passaggi “resiste” a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza “forte” da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che arrivano rispetto al concetto C che rappresenta. Un’immagine di questo tipo, dunque stabile e non più mutevole, si può chiamare “modello” M del concetto C.
Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile).
Ci sono due possibilità:

• M si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello corretto, proprio quello che l’insegnante auspicava per C; l’azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello M corretto (quello voluto dall’insegnante) del concetto C;

• M si forma troppo presto, quando ancora rappresenta solo un’immagine che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata; a questo punto non è facile raggiungere C perché la stabilità di M è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

Vediamo due soli esempi in dettaglio.

Es. 1. Lo studente ha verificato per anni che l'operazione di moltiplicazione "aumenta il valore dei fattori"; detto in altre parole, il prodotto di due fattori è maggiore di entrambi (12 è ben più grande di 3 e di 4; e 60 è ben più grande di 12 e 5; ...). Anche le immagini figurali (di schemi rappresentativi ed operativi) offerte all'allievo per rendere accettabile ed intuitiva l'operazione di moltiplicazione confermano questa attesa intuitiva (per esempio, un maldestro uso del cosiddetto "schieramento" diffusissimo nella realtà didattica della scuola primaria). Infatti, fin dal primo ciclo elementare, l'immagine figurale della moltiplicazione, per esempio 3×4, è data da 4 file di 3 oggetti:



È evidente che una figura siffatta rinforza *quell*'immagine del concetto. Ma poi fatalmente arriverà il giorno in cui si deve moltiplicare quel 3 non più per 4, ma per 0,5 ed allora il modello (ormai formatosi) non funziona più e la sua supposta regola generale dell'aumento crolla; ed abbiamo il conflitto (Fischbein, 1985, 1992).
A questo punto assimilare la nuova situazione per accomodare il modello precedente ad uno nuovo non è affatto facile (in quanto caratteristica dei modelli, nei confronti delle immagini, è proprio la loro stabilità).
Si crea quindi la necessità didattica di non rendere stabile quell'immagine troppo presto, allo scopo di poterla poi ampliare successivamente, nel tentativo di costruire un modello del concetto di moltiplicazione in modo ottimale, che tenga conto dei successivi ampliamenti ai numeri non naturali.
Non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari!) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni: 18×0.25 e $18:0.25$ la prima è quella che dà un risultato minore. Essi conservano il modello errato creatosi nella scuola elementare in base al quale "la moltiplicazione aumenta i valori".

Es. 2: La sottrazione. La sottrazione, *per sua stessa natura*, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a dispetto di un unico significato formale, che si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti ancora da Fischbein:

1. *Se togliamo 3 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?*

2. *Ho 3 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?*

È ovvio che entrambi i problemi si risolvono con una sottrazione, 10-3; ma nel primo caso, quello del *togliere via* (come lo chiama Fischbein), la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nel secondo caso sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo: 3 + … = 10, intendo in qualche modo che quei puntini … devono valere 7. D'altra parte è additiva ogni strategia di "complemento a", come, per esempio, l'operazione di dare il resto in un negozio: il negoziante di solito non fa la differenza, ma fa, passo a passo, il complementare a partire dalla spesa fino ad arrivare alla somma versata che chiama, appunto, *resto*. Abbiamo dunque tra gli allievi una certa percentuale di risposte scorrette; al posto della sottrazione, c'è chi fa l'addizione 3+10 o 10+3 legata al fatto che c'è la parola *aggiungere* che suggerisce l'uso dell'addizione.

4. Conclusione.

Mi sono volutamente limitato, in questa occasione, ad illustrare pochi esempi degli *strumenti* che l'epistemologia dell'apprendimento matematico ha elaborato per spiegare le situazioni d'aula ed il comportamento apprenditivo degli studenti. Limitarsi a porsi problemi relativi solo all'insegnamento, senza coinvolgere modalità e caratteristiche dell'apprendimento della matematica, si rivela del tutto inutile.

Nel frattempo, la didattica della matematica ha preso altre direzioni, sempre più profonde, ma quel che si voleva qui dare era solo un breve cenno a quelle che oggi sono considerate le basi epistemologiche della didattica della matematica.

Bibliografia

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

D'Amore B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 122-132.

Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: E. Fischbein-G.Vergnaud, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, a cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 1-24.

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.