Formule di Gauss–Green

In queste lezioni vogliamo studiare il legame esistente tra integrali in domini bidimensionali ed integrali curvilinei sulla frontiera di questi. In seguito ci occuperemo del problema analogo nello spazio tridimensionale. Il punto di partenza essenziale è il **Teorema Fondamentale del Calcolo**, il nome del teorema già indica la sua importanza. Questo ci dice che data una funzione $f \in C([a,b])$ ed F una sua primitiva vale la seguente uguaglianza

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Come ben sapete questo ci permette di calcolare gli integrali definiti di moltissime funzioni, tutto si riduce a trovare una primitiva, ovvero una funzione F tale che $F' = f$.
Nel caso unidimensionale esiste quindi un legame tra l'integrale della derivata di una funzione nell' intervallo $[a,b]$ ed i valori della stessa funzione sulla frontiera ovvero nei punti a e b. Tutto ciò si può generalizzare al caso di n varibili. Per ora consideriamo $n = 2$. La frontiera di un dominio del piano in generale sarà una curva. Richiamiamo gli integrali di una funzione su una curva. Data una curva semplice e regolare γ parametrizzata tramite $(x(t), y(t))$ con $t \in [a,b]$ ed una funzione f continua su γ definiamo l'integrale di f su γ come

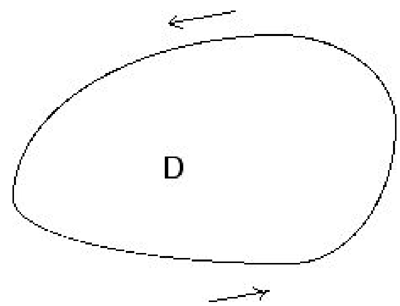
$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

questo integrale non dipende dalla parametrizzazione ma solo dal supporto della curva. Un altro concetto che avete già incontrato è quello di integrale di un campo $F \equiv (F_1, F_2)$ lungo una curva, che ha l'interpretazione fisica del lavoro lungo un cammino. Questo si può definire come

$$\int_\gamma < F, \vec{t} > \, ds \tag{1}$$

dove con $< \cdot, \cdot >$ indichiamo il prodotto scalare, mentre $\vec{t}$ è il campo definito su γ dato dal vettore tangente alla curva normalizzato ad 1. In altre parole $\vec{t}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(x'(t), y'(t))$. In questo modo l'integrale in (1) si riscrive come

$$\int_a^b F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)\,dt. \tag{2}$$



Questo dipende dalla parametrizzazione solo nella scelta dal verso del vettore $\vec{t}$, ovvero dal verso di percorrenza della curva, un modo usuale per indicare (2) è

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy$$

dove con γ sottintendiamo oltre al supporto della curva anche il suo orientamento. Le definizioni precedenti si estendono facilmente al caso in cui γ è data tramite unione finita di curve regolari.

Dato un dominio chiuso $D \subset R^2$ e due funzioni f e g regolari in D, ci proponiamo di dimostrare le seguenti uguaglianze, note come **formule di Gauss–Green**

$$\int\int_D f_x\,dxdy = \int_{\partial D} f\,dy,\ \int\int_D g_y\,dxdy = -\int_{\partial D} g\,dx. \tag{3}$$

il verso di percorrenza sulla frontiera di D è quello per cui il dominio rimane alla sinistra della frontiera (vedi Figura 1). Queste uguaglianze si possono pensare come un' estensione del teorema fondamentale del calcolo in $\mathbb{R}^2$. Prima di dimostare le formule di Gauss–Green nel caso di domini particolari vediamo un' utile applicazione. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x$, allora usando la prima delle uguaglianze in (3) otteniamo

$$\int\int_D dxdy = \int_{\partial D} x\,dy, \tag{4}$$

il primo membro nell' uguaglianza di sopra coincide con la misura di D (la sua area) e la (4) ci permette di calcolare l'area di un insieme tramite un integrale curvilineo. Un risultato analogo lo troviamo usando la seconda delle formule di Gauss–Green, in tal caso usando la funzione $g(x,y) = y$ otteniamo

$$\int\int_D dxdy = -\int_{\partial D} y\,dx.$$

Esempio 1 Sia D il cerchio di centro l'origine e raggio 1, vediamo se è verificata la (4). L'area di D sappiamo che è uguale a π. Ora scegliamo come parametrizzazione per ∂D la classica $(x(t), y(t)) = (cos(t), sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che questa parametrizzazione ci fornisce il corretto verso di percorrenza. Il secondo membro della (4) diventa

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi.$$

Esercizio 1 Sia $h(s)$ una funzione derivabile e positiva nell' intervallo $[a, b]$, sappiamo che $\int_a^b h(s)\, ds$ ci da' l'area della regione D che si trova sotto il grafico della funzione h. Si verifichi questo fatto attraverso una delle uguaglianze di Gauss–Green.

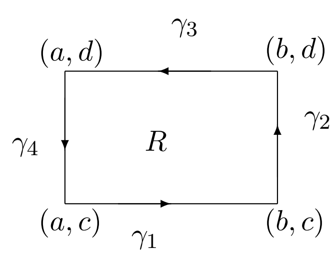
Sommando la (4) e la formula che la segue si ottiene, dopo aver diviso per 2, la seguente uguaglianza

$$A(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy.$$

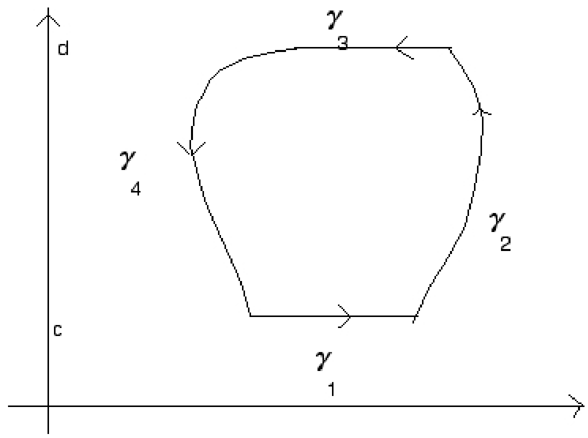
In alcuni casi questa può essere utile, provate ad utilizzarla per risolvere l'esercizio che segue.

Esercizio 2 Data la curva (cardioide) di equazioni parametriche $x(t) = (1-\cos t)\cos t,\ \ y(t) = (1-\cos t)\sin t$, si calcoli l'area del dominio delimitato da tale curva.

Cominciamo a verificare le formule di Gauss–Green nel generico rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$



Verifichiamo la prima delle due uguaglianze in (3), l'altra seguirà in modo analogo. Osserviamo che la frontiera di R si può scrivere come somma di 4 curve regolari $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$ le cui parametrizzazioni sono date rispettivamente da $\gamma_1 \equiv (t, c)$, $t \in [a, b]$, $\gamma_2 \equiv (b, t)$, $t \in [c, d]$, $-\gamma_3 \equiv (t, d)$, $t \in [a, b]$, $-\gamma_4 \equiv (a, t)$, $t \in [c, d]$. Abbiamo scritto $-\gamma_3$ e $-\gamma_4$ per ricordarci che con



queste parametrizzazioni le curve sono percorse in verso opposto a quello corretto, perciò dovremo operare un cambio di segno. Cominciamo a scrivere il secondo membro dell' uguaglianza che vogliamo dimostrare

$$\int_{\partial R} f\,dy = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\gamma_i} f\,dy = \int_a^b 0\,dt + \int_c^d f(b,t)\,dt - \int_a^b 0\,dt - \int_c^d f(a,t)\,dt.$$

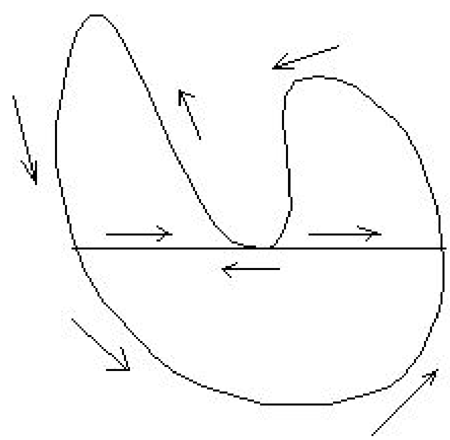
Ora consideriamo il primo membro, utilizzando le note proprietà per gli integrali doppi e il teorema fondamentale del calcolo otteniamo

$$\int\int_R f_x(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f_x(x,y)\,dx\right) dy = \int_c^d f(b,y) - f(a,y)\,dy.$$

Da cui segue la verifica dell' uguaglianza tra i due membri.
Proviamo ora la prima delle uguaglianze di Gauss–Green in un dominio normale rispetto alla variabile y, supponiamo quindi che $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, dove x_1 e x_2 sono due funzioni regolari. Utilizzando le formule di riduzione per gli integrali multipli il primo membro della prima formula di Gauss–Green si scrive

$$\int_c^d \left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f_x(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_c^d f(x_2(y),y) - f(x_1(y),y)\,dy.$$

D'altra parte la frontiera di D si può dividere come unione di quattro curve, su γ_1 e γ_3 gli integrali sono nulli dal momento che non c'è variazione nella



variabile y, mentre $\gamma_2 \equiv (x_2(t), t)$ con $t \in [c, d]$ e $-\gamma_4 \equiv (x_1(t), t)$ con $t \in [c, d]$ (vedi figura di sopra). Come prima mettiamo il segno meno davanti a γ_4 per puntualizzare il fatto che con questa parametrizzazione la curva è percorsa in verso opposto a quello di γ_4.
Se andiamo a considerare il secondo membro nella formula di Gauss–Green otteniamo

$$\int_{\partial D} f\,dy = \int_{\gamma_2} f\,dy + \int_{\gamma_4} f\,dy = \int_c^d f(x_2(t), t)\,dt - \int_c^d f(x_1(t), t)$$

da cui segue la tesi.
Per ripetere la dimostrazione per l'altra formula di Gauss–Green abbiamo bisogno che il dominio sia normale rispetto alla variabile x.
L' idea per dimostrare le formule di Gauss–Green nel caso di domini più generali consiste nel dividere il dominio dato in tanti sottodomini in cui già sappiamo che valgono le formule di Gauss–Green. In tal modo le cose funzionano in quanto gli integrali sulle parti di frontiera che aggiungiamo si elidono perché vengono contate 2 volte con segno opposto. Infatti supponiamo che il dominio D sia come nella figura di sopra, ovvero $D = \sum_{i=1}^{n} D_i$

e che in ogni D_i valgano le formule di Gauss–Green, allora

$$\int\int_D f_x(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int\int_{D_i} f_x(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} f\,dy = \int_{\partial D} f\,dy.$$

e analogamente

$$\int\int_D g_y(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int\int_{D_i} g_y(x,y)\,dxdy = -\sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} g\,dx = -\int_{\partial D} f\,dy.$$

Se sommiamo le due uguaglianze in (3) otteniamo la seguente

$$\int\int_D f_x + g_y\,dxdy = \int_{\partial D} f\,dy - g\,dx. \tag{5}$$

Possiamo dare un' interpretazione interessante della (5) introducendo il concetto di divergenza di un campo F. Sia $F = (F_1, \cdots, F_n)$ un campo definito in un dominio D di $\mathbb{R}^n$ (ognuna delle F_i è una funzione in D) allora si definisce la funzione divergenza di F tramite

$$\mathrm{div}(F) = \partial_{x_1}F_1 + \partial_{x_2}F_2 + \cdots + \partial_{x_n}F_n.$$

Usando questa definizione possiamo osservare che l'integranda del primo membro di (5) corrisponde proprio con la divergenza del campo $F = (f, g)$. Per quanto riguarda il secondo membro, utilizzando una parametrizzazione (che ci fornisce l'orientamento della curva appropriato) lo riscriviamo come

$$\int_a^b f(x(t),y(t))y'(t) - g(x(t),y(t))x'(t)\,dt$$

ora osserviamo che in ogni punto della curva il vettore

$$\vec{n}(x(t),y(t)) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(y'(t), -x'(t))$$

è il versore normale alla curva nel punto che ha come verso quello che punta all' esterno del dominio D. Riepilogando la (5) si può riscrivere come

$$\int\int_D \mathrm{div}F\,dxdy = \int_{\partial D} < F, \vec{n} > \,ds$$

questo si chiama anche **Teorema della Divergenza** e ci dice che dato un campo regolare in un dominio D allora l' integrale della divergenza del campo nel dominio è uguale all'integrale curvilineo sulla frontiera di D della componente del campo lungo la normale esterna, ovvero alla quantità di flusso uscente da D.