

Superfici

Si calcoli la matrice jacobiana delle seguenti funzioni:

1	$f(x, y) = e^{2x+y}\hat{i} + \cos(x + 2y)\hat{j}$
2	$f(x, y, z) = (x + 2y^2 + 3z^3)\hat{i} + (x + \sin 3y + e^z)\hat{j}$

Si calcoli la divergenza dei seguenti campi vettoriali

3	$f(x, y) = \cos(x + 2y)\hat{i} + e^{2x+y}\hat{j}$
4	$f(x, y, z) = (x + y + z)\hat{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\hat{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\hat{k}$

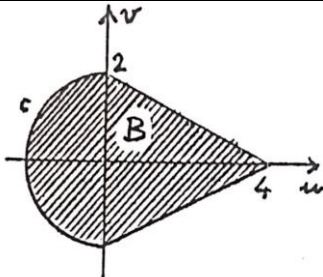
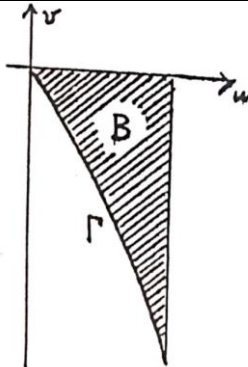
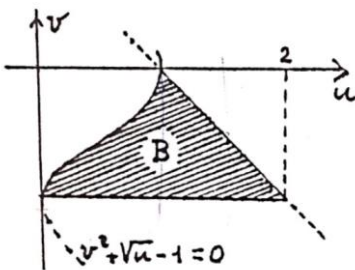
Si calcoli il rotore dei seguenti campi vettoriali

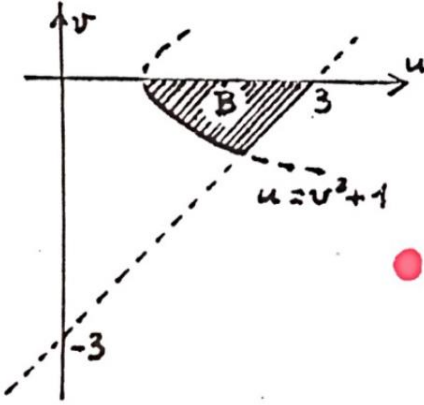
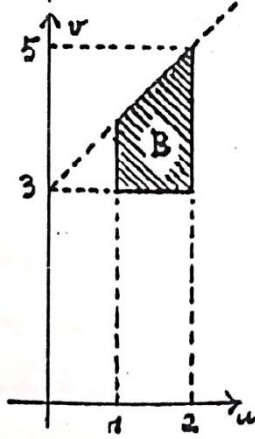
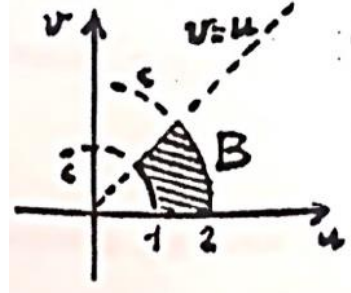
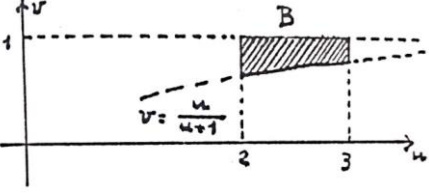
5	$f(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
6	$f(x, y, z) = xyz\hat{i} + z\sin y\hat{j} + xe^y\hat{k}$
7	$f(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\hat{j}$
8	$f(x, y) = \mathbf{grad}(\log_x y)^2$

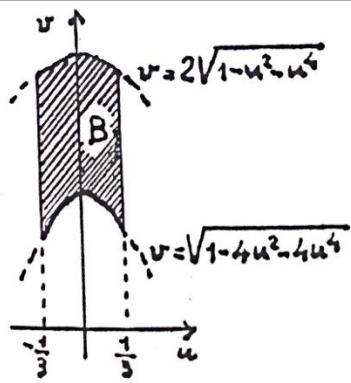
9	Siano $f(x, y) = 3x + 2y$ e $g(u, v) = (u + v)\hat{i} + uv\hat{j}$. Scrivere esplicitamente la funzione composta $f \circ g$ e calcolarne il gradiente
10	Siano $f(s, t) = \sqrt{s + t}$ e $g(x, y) = xy\hat{i} + \frac{x}{y}\hat{j}$. Scrivere esplicitamente la funzione composta $f \circ g$ e calcolarne il gradiente
11	Siano $f(x, y, z) = xyz$ e $g(r, s, t) = (r + s)\hat{i} + (r + 3t)\hat{j} + (s - t)\hat{k}$. Scrivere esplicitamente la funzione composta $f \circ g$ e calcolarne il gradiente
12	Si consideri la superficie parametrica $\sigma(u, v) = uv\hat{i} + (1 + 3u)\hat{j} + (v^3 + 2u)\hat{k}$ <ol style="list-style-type: none"> Dire se la superficie è semplice Determinare l'insieme R su cui σ è regolare Determinare il vettore normale alla superficie in ogni punto di R Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in $P_0 = \sigma(u_0, v_0) = (1, 4, 3)$
13	Le superfici $\sigma_1(u, v) = \cos(2 - u)\hat{i} + \sin(2 - u)\hat{j} + v^2\hat{k} \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ e $\sigma_2(u, v) = \sin(3 + 2u)\hat{i} + \cos(3 + 2u)\hat{j} + (1 - v)\hat{k} \quad (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 1]$ parametrizzano lo stesso sostegno Σ in R^3 . <ol style="list-style-type: none"> Determinare tale sostegno Dire se i versi di attraversamento di Σ definiti dalle due superfici coincidono oppure no

	c. Calcolare i versori normali a Σ in $P_0\left(0,1,\frac{1}{4}\right)$ associati alle due superfici
14	Si consideri la superficie cartesiana $\sigma(u,v) = u\hat{i} + v\hat{j} + (u^2 + 3uv + v^2)\hat{k}$ <p>a. Calcolare il versore normale $n(u,v)$ b. Determinare i punti sul sostegno Σ della superficie in cui la normale è perpendicolare al piano di equazione $8x + 7y - 2z = 4$</p>

Si risolvano i seguenti integrali superficiali (di I specie)

15	$\int_S x^3 \cdot e^z d\sigma$	S è la porzione di superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{4}{3}r^4(e^h - 1)$
16	$\int_S (x^2 - y^2 + y + 3z^2) d\sigma$	S è la superficie della sfera di centro l'origine e raggio r	$4\pi r^4$
17	$\int_S \frac{(z+1)^2 - x - y}{\sqrt{2z^2 + 4z + 3}} d\sigma$ $S: \begin{cases} x = u^2 + v \\ y = 2u - v \\ z = u \end{cases} \quad (u,v) \in B$		$8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\pi$
18	$\int_S e^{x+y-z} d\sigma$ $S: \begin{cases} x = v \\ y = v \\ z = u + v \end{cases} \quad (u,v) \in B$ $\Gamma: \begin{cases} u = \log(1 - 2t) \\ v = t - \log(1 - 2t) \end{cases} \quad t \in [-1; 0]$		$\frac{\sqrt{3}}{2}(\log^2 3 - \log 3 + 2)$
19	$\int_S \frac{x+y}{\sqrt{3+2\sin^2(x+y+1)}} d\sigma$ $S: \begin{cases} x = u - \cos(1+v) \\ y = v - u + \cos(1+v) \\ z = 2u - v - \cos(1+v) \end{cases}$ $\Gamma: v^2 + \sqrt{u} - 1$		$\frac{2}{3}$
20	$\int_S \frac{e^{x+y}}{\sqrt{(x+y-1)^2 + (y+z-1)^2 + (x+2y+z-1)}} d\sigma$ $S: \begin{cases} x = u(v-1) \\ y = u+v-uv \\ z = v(u-1) \end{cases}$		

			
<p>21</p>	$\int_S \frac{d\sigma}{z^2 \sqrt{x^2 + 4y^2 + 4y - 20z}}$ $S: \begin{cases} x = 5u + v \\ y = u^2 \\ z = uv \end{cases}$		$\frac{1}{3}(\log 8 - \log 5)$
<p>22</p>	$\int_S \frac{x + z - 2}{\sqrt{12x + 8y - 12z + 34(x + 2z - 4)}} d\sigma$ $S: \begin{cases} x = u - v \\ y = u^2 + 3v \\ z = v + 2 \end{cases}$		$\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \log 2 \right)$
<p>23</p>	$\int_S \frac{d\sigma}{z(y - 1 + \sqrt{z})\sqrt{40z + 9}}$ $S: \begin{cases} x = 3u \\ y = u - v \\ z = v^2 \end{cases}$		$\log \frac{4}{3}$

	$\int_S z \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{z} d\sigma$ $S: \begin{cases} x = uv \\ y = u^2 \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in B$		
<p>24</p>	<p>Sia S la superficie cilindrica, con le generatrici parallele all'asse z, compresa tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, y), diagramma, rispetto all'asse x, della restrizione all'intervallo $(0; \frac{\pi}{4})$ della funzione esponenziale. Calcolare</p> $\int_S \frac{z^2 \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1 + e^{2x}}} d\sigma$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$	
<p>25</p>	<p>Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse y compresa tra i piani di equazioni $y = 1$ e $y = e$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, y) diagramma rispetto all'asse x della restrizione nell'intervallo $[0; 1]$ della funzione arcoseno. Calcolare</p> $\int_S \frac{z^2 \sqrt{1 - x^2}}{y \sqrt{2 - x^2}} d\sigma$	$\frac{\pi^2}{4} - 2$	
<p>26</p>	<p>Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse x compresa tra i piani di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (y, z) che ha equazione $y^2 - z + 3 = 0$ e che si proietta sull'asse y nell'intervallo $[1; 1 + \sqrt{2}]$. Calcolare</p> $\int_S \frac{x^4}{(z - 2y) \sqrt{1 + 4y^2}} d\sigma$		
<p>27</p>	<p>Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z compresa tra i piani di equazioni $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, y) diagramma, rispetto all'asse x, della restrizione della funzione logaritmo, all'intervallo $[\frac{\pi}{6}; \pi]$. Calcolare</p> $\int_S \frac{x \cos^2 3x \cdot \cos z}{\sqrt{1 + x^2}} d\sigma$	$\frac{5}{12} \pi$	
<p>28</p>	<p>Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse y compresa tra i piani di equazioni $y = 0$ e $y = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, z) diagramma, rispetto all'asse x, della restrizione nell'intervallo $[1; e]$ della funzione logaritmo. Calcolare</p> $\int_S \frac{xy^3 z \log x}{\sqrt{1 - x^2}} d\sigma$	$\frac{1}{4} (e - 2)$	

29	<p>Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse x compresa tra i piani di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (y, z) che ha equazione $y^4 - z = 0$ e che si proietta sull'asse y nell'intervallo $[0; 1/2]$. Calcolare</p> $\int_S \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{z} - y + 1)\sqrt{1 + 16y^6}} d\sigma$	$-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$
----	--	---------------------------

Svolgimento Esercizio n°15

Una rappresentazione parametrica della superficie S è:

$$S: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

La matrice Jacobiana associata alla superficie è:

$$J = \begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La prima forma differenziale di Gauss per la superficie è:

$$J_G = \sqrt{\begin{vmatrix} r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} -r \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -r \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2} = r$$

Pertanto:

$$\int_S f d\sigma = r \cdot \iint_D (r \cos \theta)^3 \cdot e^z d\theta dz$$

Dove

$$A: \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2: -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq z \leq h\}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} r \cdot \iint_D (r \cos \theta)^3 \cdot e^z d\theta dz &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta)^3 d\theta \cdot \int_0^h e^z dz = r^4 [e^z]_0^h \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^3 d\theta = \\ &= r^4 (e^h - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) d\theta = \frac{4}{3} r^4 (e^h - 1) \end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio n°25

La rappresentazione parametrica della curva è

$$S: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \arcsin u \end{cases}$$

Mentre il dominio nel piano $(u; v)$ è dato dalla seguente:

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq v \leq e; 0 \leq u \leq 1\}$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{1-u^2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{1-u^2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto

$$J = \sqrt{1 + \frac{1}{1-u^2}} = \sqrt{\frac{2-u^2}{1-u^2}}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_S f d\sigma &= r \cdot \iint_B \frac{\arcsin^2 u \cdot \sqrt{1-u^2}}{v\sqrt{2-u^2}} \sqrt{\frac{2-u^2}{1-u^2}} dudv = \\ &= \int_1^e \frac{1}{v} dv \int_0^1 \arcsin^2 u du = \int_1^e \frac{1}{v} \left[u \arcsin^2 u + 2\sqrt{1-u^2} \arcsin u - 2u \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

Teorema della Divergenza

Siano D un dominio regolare del piano e $F = (F_1, F_2)$ una applicazione da D verso R^2 di classe $C^1(D)$. Allora:

$$\iint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_{\partial D} (F, N) \, ds$$

dove $\operatorname{div} F$ è la divergenza del vettore, $F(x, y) = (F_1(x, y); F_2(x, y))$ definito da

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

e (F, N) è il prodotto scalare tra il vettore F e il versore N normale a ∂D , rivolto verso l'esterno di D e s è l'ascissa curvilinea sulla frontiera di D

Dimostrazione

Se la frontiera di D è costituita da una curva regolare a tratti di equazioni parametriche $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $t \in [a; b]$, e se il verso indotto da tale rappresentazione coincide con quello positivo della frontiera ∂D , il versore normale esterno N , quindi per la definizione di integrale curvilineo

$$\int_{+\partial D} (F, N) \, ds = \int_a^b \left(\frac{F_1 y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{F_2 x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt = \int_a^b (F_1 y' - F_2 x') \, dt = \int_{+\partial D} F_1 \, dy - F_2 \, dx$$

Dimostriamo questo caso utilizzando la prima formula di Gauss-Green con F_1 al posto di F e la seconda formula con F_2 al posto di F , abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \, dy &= \int_{\partial D} F_1 \, dy \\ \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx \, dy &= - \int_{\partial D} F_2 \, dx \end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro, si ha

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int_{\partial D} -F_2 \, dx + F_1 \, dy = \iint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy$$

Ma essendo

$$\int_{+\partial D} (F, N) \, ds = \int_{+\partial D} F_1 \, dy - F_2 \, dx$$

si ha la tesi.

Se la frontiera di D è unione di un numero finito di curve regolari a tratti (come ad esempio in una corona circolare) si ragiona suddividendo D nell'unione di domini normali

regolari privi di punti interni in comune.

Osservazione: Il teorema della divergenza, anche detto teorema di Ostrogradskij per il fatto che la prima dimostrazione è dovuta a Michail Ostrogradskij, è la generalizzazione a domini n -dimensionali del teorema fondamentale del calcolo integrale. A sua volta, esso è un caso speciale del più generale teorema di Stokes. Da non confondere col teorema di Gauss-Green, che invece è un caso speciale (ristretto a 2 dimensioni) del teorema del rotore, o con il teorema del flusso.

Teorema della divergenza nello spazio

Sia D un dominio regolare di \mathbb{R}^3 e sia

$$F(x; y; z) = F_1(x; y; z)\mathbf{i} + F_2(x; y; z)\mathbf{j} + F_3(x; y; z)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora, l'integrale su D della divergenza del campo F è pari al flusso del campo uscente da D si ha

$$\iiint_D \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial D} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma$$

dove \mathbf{n} è il campo normale alla frontiera di D orientato verso l'esterno del dominio D

Teorema del Rotore

Il teorema del rotore afferma che il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. Si tratta pertanto di un caso particolare del teorema di Stokes. Il teorema di Green è un caso speciale del teorema del rotore che considera superfici appartenenti a \mathbb{R}^2

Teorema

Siano S una superficie regolare avente il contorno chiuso e regolare orientato γ^+ e $V \subset \mathbb{R}^3$ un dominio contenente la superficie S : Sia

$$F(x; y; z) = F_1(x; y; z)\mathbf{i} + F_2(x; y; z)\mathbf{j} + F_3(x; y; z)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale di classe $C^1(V)$, allora sussiste la seguente formula

$$\oint_{\gamma^+} F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

o, equivalentemente,

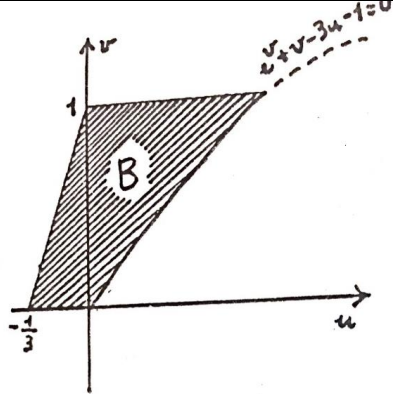
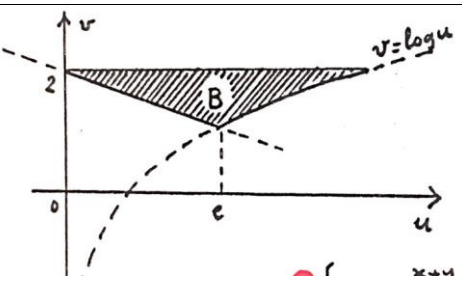
$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma^+} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \end{aligned}$$

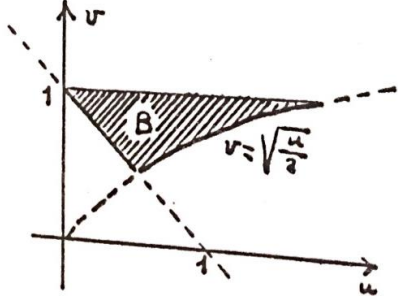
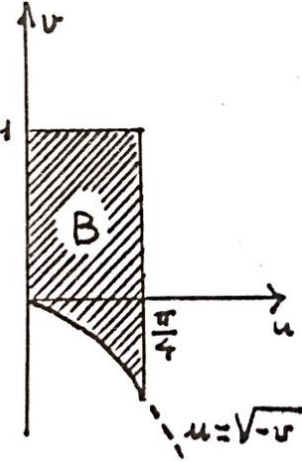
dove la curva γ^+ è percorsa nel verso corrispondente alla superficie orientata S^+ cioè un osservatore che si muove sulla curva C deve avere sempre a sinistra la faccia positiva della superficie considerata

26	<p>Determinare il flusso diretto verso il basso del campo vettoriale</p> $F = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, 1 \right)$ <p>attraverso la superficie definita in forma parametrica come</p> $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2) \quad \text{con } u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]$
27	<p>Sia $f(x, y, z) = z(y - 2x)$. Calcolare l'integrale superficiale di f su σ definita su $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq 0; v \geq 0, u^2 + v^2 \leq 16, \frac{u^2}{4} + v^2 \geq 1\}$ come $\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{16 - u^2 - v^2})$</p>
28	<p>Calcolare l'integrale superficiale della funzione</p> $f(x, y, z) = \frac{y + 1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + 4y^2}}$ <p>su Σ, parte del paraboloide ellittico</p> $z = -\frac{x^2}{4} - y^2$ <p>situata al di sopra del piano $z = -1$</p>
29	<p>Calcola l'area della calotta Σ parte della superficie di equazione $z = \frac{1}{2}y^2$, intercettata dal prisma (infinito) individuato dai piani di equazione $x + y = 4$, $y - x = 4$ e $y = 0$</p>
30	<p>Utilizzando il teorema di Gauss, determinare il flusso del campo</p> $f(x, y, z) = (x^3 + yz)\hat{i} + (xz + y^3)\hat{j} + (xy + z^3 + 1)\hat{k}$ <p>uscite da Ω definito dalle relazioni</p> $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$ <p style="text-align: right;">R: $\frac{3}{10}\pi(2 - \sqrt{2})$</p>
31	<p>Determinare il flusso del campo vettoriale</p> $f(x, y, z) = (xy^2 + z^3)\hat{i} + \left(x^2 + \frac{1}{3}y^3\right)\hat{j} + 2\left(x^2z + \frac{1}{3}z^3 + 2\right)\hat{k}$ <p>uscite dalla frontiera della calotta definita dalle relazioni</p> $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$ <p style="text-align: right;">R: $\frac{\pi}{5}(1 - \sqrt{2})$</p>
32	<p>Utilizzando il teorema di Stokes, calcolare la circuitazione del campo</p> $f(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + xy\hat{k}$ <p>lungo il bordo della superficie Σ, intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e del paraboloide $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, orientata in modo che il versore normale punti verso l'asse z.</p>

		$R: \frac{10}{9}\pi$
33	<p>Dato il campo vettoriale</p> $f(x, y, z) = (y + z)\hat{i} + 2(x + z)\hat{j} + 3(x + y)\hat{k}$ <p>e la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, calcolare il flusso del rotore di f uscente dalla parte della superficie Σ che sta al di sopra del piano $z = y$</p>	$R: 3\sqrt{2}\pi$

Si risolvano i seguenti integrali superficiali (di II specie)

<p>Data la superficie S che ha la seguente forma parametrica</p> $S: \begin{cases} x = uv \\ y = v(1 - u) \\ z = u - v + uv \end{cases} \quad (u, v) \in B$ <p>Dato il vettore normale positivo n relativo alla rappresentazione parametrica di S assegnata e v è definito dalla seguente espressione</p> $v(x, y, z) = \frac{x + y + 1}{y + z - 1} \hat{i}$ <p>e B è il dominio rappresentato in figura, si risolva il seguente integrale di flusso</p> $\int_S (v \times n) d\sigma$	 <p style="text-align: right;">$R: \frac{e}{3}$</p>
<p>Data la superficie S che ha la seguente forma parametrica</p> $S: \begin{cases} x = u \sin v \\ y = v - u \sin v \\ z = u(1 + \sin v) - v \end{cases} \quad (u, v) \in B$ <p>Dato il vettore normale positivo n relativo alla rappresentazione parametrica di S assegnata e B è il dominio rappresentato in figura, si risolva il seguente integrale di flusso</p> $\int_S \frac{e^{x+y}}{\sin(x+y)} dx dy$	

	<p>Data la superficie S che ha la seguente forma parametrica</p> $S: \begin{cases} x = ue^v \\ y = v - ue^v \\ z = u - v + ue^v \end{cases} \quad (u, v) \in B$ <p>Dato il versore normale positivo n relativo alla rappresentazione parametrica di S assegnata e B è il dominio rappresentato in figura, si calcoli il flusso attraverso S del vettore</p> $v(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + 1)(y + z + 1)} \hat{j}$	 <p>$[2\sqrt{e} - e]$</p>
		

Svolgimento esercizio n°26

Calcoliamo le derivate parziali rispetto a u e v

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 2u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

Il prodotto vettoriale che ci restituirà il vettore normale alla superficie è

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$$

La terza componente è u ed è positiva, il vettore normale è rivolto verso l'alto; l'esercizio richiede che n sia rivolto verso il basso; dunque prenderemo il vettore

$$-\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (2u^2 \cos v, 2u^2 \sin v, -u)$$

La funzione

$$F(r(u, v)) = \left(\frac{2u \cos v}{u^2}, \frac{2u \sin v}{u^2}, 1 \right)$$

Il prodotto scalare tra $F(r(u, v))$ e $-\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)$ è

$$F(r(u, v)) \left[-\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) \right] = 3u$$

Infine impostiamo l'integrale

$$\iint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3uvudv = 3\pi$$

Svolgimento esercizio n°30

Applicando il teorema di Gauss, si ha

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot n = \int_{\Omega} \operatorname{div} f = \int_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

Passando alle coordinate sferiche, la regione Ω si trasforma in Ω' definita dalle relazioni

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Allora:

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot n = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 3r^4 \sin\varphi dr d\varphi d\theta = \frac{3}{10} \pi (2 - \sqrt{2})$$

Svolgimento esercizio n°32

Parametrizzando Σ come superficie cartesiana:

$$\sigma(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \right) \text{ con } (u, v) \in R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}$$

Allora $\nu(u, v) = \left(-\frac{2}{9}u, -\frac{v}{2}, 1\right)$ è orientato come richiesto. Per applicare il teorema di Stokes, osserviamo che $\operatorname{rot} f = x\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{k}$ e

$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot \tau = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(-\frac{2}{9} \cos^2\theta + \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) r^3 dr d\theta = \frac{10}{9} \pi$$