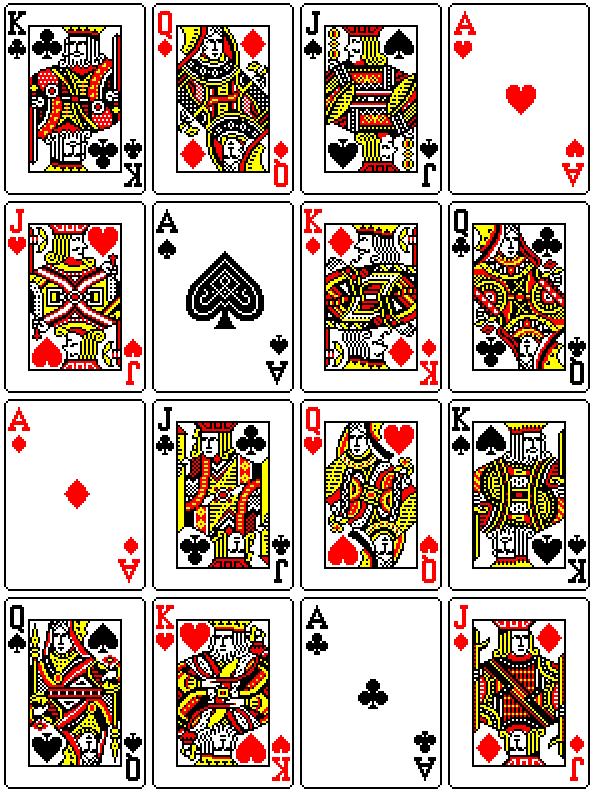
Elementi di Calcolo Combinatorio

Il calcolo combinatorio



Per "calcolo combinatorio" (C.C.) si intende una branca della matematica che studia i modi di raggruppare ed ordinare oggetti presi da un insieme assegnato, con l'obiettivo finale di contare il numero dei possibili raggruppamenti od ordinamenti.

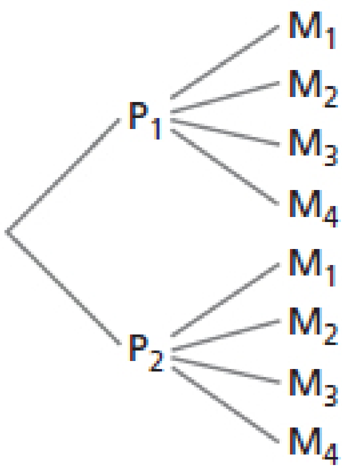
Qualcuno ha definito la combinatoria come "l'arte di contare ... senza contare" mettendo in evidenza la maggiore importanza che in combinatoria ha la conoscenza del numero di combinazioni, rispetto alla conoscenza delle combinazioni stesse.

Serve conoscere prima i seguenti dati:
il numero di oggetti disponibili
il numero di quelli che costituiscono una sola combinazione
le regole per procedere alla costituzione delle combinazioni: si possono utilizzare tutti gli oggetti disponibili oppure solo una parte; lo stesso oggetto può essere utilizzato una sola volta o più volte in una stessa combinazione, regole che stabiliscono se conta oppure no l'ordine in cui sono disposti gli oggetti nelle varie combinazioni.

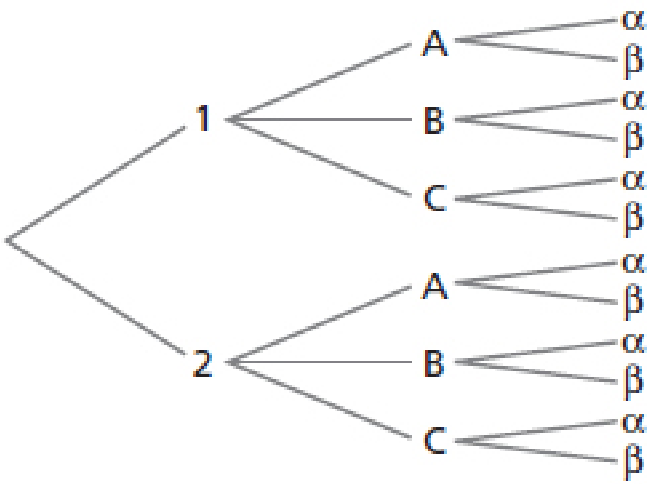
I raggruppamenti

Un ragazzo ha a disposizione due paia di pantaloni e quattro magliette. In quanti modi diversi può vestirsi?
Indichiamo due paia di pantaloni con P_1 e P_2 le quattro magliette con M_1, M_2, M_3, M_4.
Elenchiamo tutte le possibili coppie. Esse non sono altro che il prodotto cartesiano fra l'insieme dei pantaloni P e l'insieme delle magliette M.

$$P \times M = \{(P_1; M_1), (P_1; M_2); (P_1; M_3); (P_1; M_4); (P_2; M_1); (P_2; M_2); (P_2; M_3); (P_2; M_4)\}$$



Quante sigle di tre elementi possiamo scrivere utilizzando le cifre 1 e 2 per il primo posto; A,B,C per il secondo e le lettere α e β per l'ultimo posto. Calcoliamo poi quante sono



Le disposizioni semplici

Una persona possiede quattro quadri ma può appenderne solo tre lungo una parete. In quanti modi può appenderli?

Costruiamo un diagramma ad albero per rappresentare tutte le possibili terne di quadri.
Ogni terna dovrà distinguersi dalle altre:

- per la diversità di almeno un elemento;
- per l'ordine degli elementi.

I gruppi con tali caratteristiche prendono il nome di **Disposizioni Semplici**
In particolare, avremo una disposizione di 4 oggetti presi a 3 a 3 o di classe 3 e scriveremo:

$$D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Le disposizioni semplici

DEFINIZIONE

Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per l'ordine* con cui gli elementi sono collocati:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

Esempi

A un torneo di calcio regionale under 21 partecipano 15 squadre. Quante sono le possibili classifiche delle prime 5 squadre?

Quante sigle di 5 elementi si possono formare tali che i primi posti siano occupati da due diverse cifre e gli altri tre posti da tre lettere diverse dell’alfabeto italiano?

Quanti numeri di 4 cifre tutte diverse tra loro si possono formare con le dieci cifre decimali?

Soluzioni

L'insieme di partenza contiene come elementi le 15 squadre, perciò n=15; i raggruppamenti contengono 5 elementi, dunque k=5 pertanto:

$$D_{15,5} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$$

Per i primi due posti abbiamo

$$D_{10,2} = 10 \cdot 9$$

Per gli ultimi tre posti abbiamo

$$D_{21,3} = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$$

Ad ogni disposizione di due cifre accompagniamo una disposizione di tre lettere:

$$D_{10,2} \cdot D_{21,3} = 718200$$

Se calcoliamo

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Sono compresi anche quei numeri che iniziano con la cifra 0 e che, in realtà, non sono numeri di 4 cifre ma di tre. Dobbiamo determinare quanti sono e sottrarre il loro numero da quello appena calcolato. Essi sono

$D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7$. Quindi, in definitiva:

$$D_{10,4} - D_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Le disposizioni con ripetizione

Lanciamo una moneta tre volte e cerchiamo di prevedere tutti i modi con cui si succedono le due facce.
Si costruisca un diagramma ad albero.
I gruppi ottenuti differiscono per l'ordine degli elementi contenuti ma un elemento può comparire più di una volta. I gruppi trovati si chiamano disposizioni con ripetizione.

A differenza delle disposizioni semplici , la classe di un gruppo può essere maggiore del numero di elementi a disposizione. Nell'esempio la classe di ogni gruppo è 3 mentre gli elementi sono 2

DEFINIZIONE

Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione di n oggetti distinti di classe k (con $k \gtreqless n$) sono tutti i gruppi di k elementi, anche ripetuti, scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per il loro ordine*:

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Esempi

Le targhe delle automobili italiane iniziano con una coppia di lettere (anche ripetute) dell'alfabeto inglese. Quante sono le possibili sigle con cui iniziare la targa?

Vogliamo organizzare una vacanza in Scozia e dobbiamo prenotare sei pernottamenti, in luoghi diversi oppure fermandoci più di una notte nello stesso luogo. Abbiamo a disposizione una lista di nove Bed and Breakfast. In quanti modi possiamo fare la nostra scelta?

Quante sigle di 5 elementi, anche non distinti, si possono formare, tali che i primi due posti siano indicati da due cifre e gli ultimi tre da lettere dell'alfabeto italiano?

Le permutazioni semplici

Abbiamo 4 palline colorate, ognuna di colore diverso . In quanti modi possiamo metterle in fila?
Costruiamo un diagramma ad albero.
Ogni gruppo contiene tutti gli elementi dell'insieme e differisce dagli altri solo per l'ordine. Stiamo cioè considerando le disposizioni semplici di 4 elementi di classe 4.
Raggruppamenti che hanno queste caratteristiche prendono il nome di permutazioni semplici.

DEFINIZIONE

Permutazioni semplici

Le permutazioni semplici di n elementi distinti sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per il loro *ordine*:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ con } n \geq 2.$$

Esempi

La password

La password per l’accesso a un sito internet è formata da 5 caratteri. Determina: il numero totale dei codici possibili se i caratteri utilizzabili sono le cifre da 0 a 9, ipotizzando sia che le cifre possano ripetersi, sia che debbano essere tutte diverse; il numero totale dei codici se i caratteri utilizzabili sono le cifre da 1 a 5, senza che queste si ripetano; il numero totale dei codici possibili se nella combinazione possono essere utilizzate sia le cifre da 0 a 5 che le 26 lettere dell’alfabeto inglese, senza che nessuna di queste si ripeta.

La vetrina

Per allestire una vetrina una commessa ha a disposizione 7 nuovi tipi di maglioni e 3 manichini. A rotazione vuole esporre in vetrina tutti i capi, senza mai riproporre lo stesso abbinamento. Determina: quante vetrine diverse potrà allestire la commessa; per quante settimane si potranno osservare vetrine diverse supponendo che ogni lunedì e giovedì si rinnovino gli abbinamenti; quanti tipi di maglioni dovrebbe avere a disposizione la commessa, supponendo che un manichino non possa essere utilizzato, per esaurire tutte le combinazioni in 10 settimane.

Il planisfero

Un bambino vuole colorare ogni continente di un planisfero con un colore diverso e per fare questo ha a disposizione 10 colori. In quanti modi può colorare i continenti? Se pittura subito l’Europa di verde, in quanti modi può poi colorare gli altri continenti? Qual è la relazione con il caso precedente? Quanti colori dovrebbe avere a disposizione per poter colorare Asia e Africa in più di dieci possibili modi?

Le permutazioni con ripetizione

DEFINIZIONE

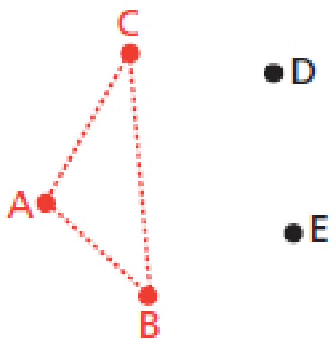
Permutazioni con ripetizione

Le permutazioni con ripetizione di n elementi, di cui h, k, … ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per l'*ordine* in cui si presentano gli elementi distinti e la *posizione* che occupano gli elementi ripetuti:

$$P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \ldots}.$$

Le combinazioni semplici

Consideriamo 5 punti, a tre a tre non allineati. Determinare quanti triangoli possiamo costruire congiungendo tre punti.



Tutte le terne di lettere che indicano i vertici dei triangoli costituiscono dei gruppi e si differenziano fra di loro solo per gli elementi contenuti e non per il loro ordine. Chiamiamo questi gruppi combinazioni (semplici) di 5 elementi di classe 3.

$$C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$$

DEFINIZIONE

Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento (ma non per l'ordine):

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

Esempio

Le compagnie aeree

Le compagnie aeree sono identificate da una sigla formata da due lettere, anche uguali, oppure da una lettera e una cifra. Le lettere sono scelte tra le 26 dell'alfabeto inglese e la cifra, tra 1 e 9, può essere messa in prima o in seconda posizione (es. AC, WW, L6, 2P). Gli aeroporti sono invece identificati da codici di tre lettere di cui al massimo due si possono ripetere. Attualmente le sigle delle compagnie aeree sono 856. Quante sigle sono ancora disponibili per nuove compagnie? Calcola in quanti modi si può associare una sigla di una compagnia a un codice di un aeroporto (considera le sigle e i codici possibili, non quelli effettivamente esistenti).

Le combinazioni semplici

La formula delle combinazioni semplici può assumere anche un'altra forma. Utilizzando quella delle disposizioni semplici espressa come rapporto di due fattoriali, abbiamo:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

detta legge dei tre fattoriali.

Vale, inoltre, la seguente legge

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = C_{n,n-k} = \binom{n}{n-k}$$

detta legge delle classi complementari

Le combinazioni con ripetizione

DEFINIZIONE

Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k (con $k \gtreqless n$) sono tutti i gruppi di k elementi che si possono formare, nei quali:

- ogni elemento può essere ripetuto al massimo fino a k volte;
- non interessa l'ordine con cui gli elementi si presentano;
- è diverso il numero di volte col quale un elemento compare:

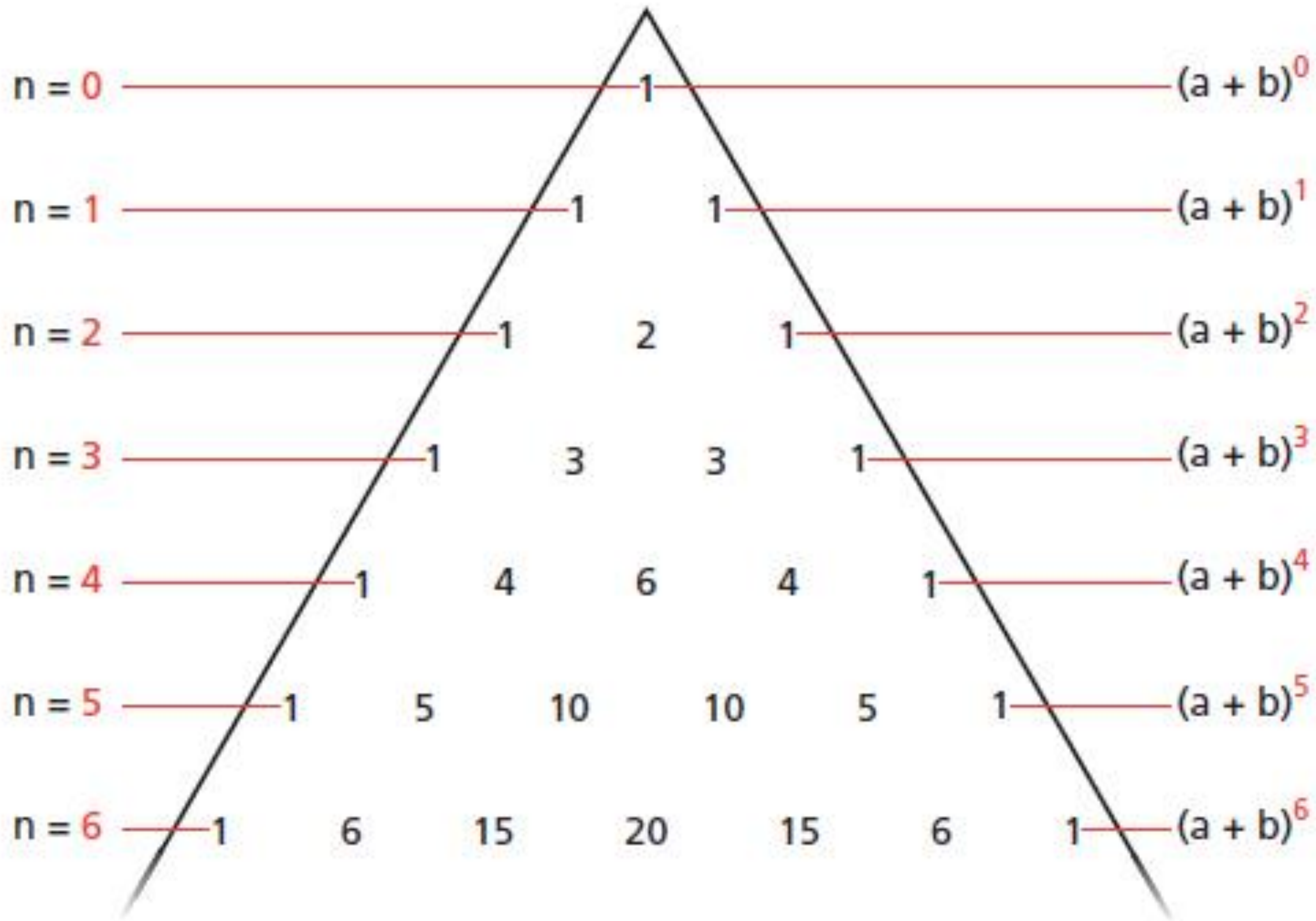
$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n}{k!}.$$

I coefficienti binomiali

Sappiamo che il numero combinatorio $C_{n,k}$ è indicato anche con il simbolo $\binom{n}{k}$. Questo simbolo è chiamato coefficiente binomiale. Valgono le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n)!\,0!}1$$	
$$\binom{0}{0} = 1$$	
$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n)!\,(n-n)!} = 1$$	
$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$	Quest'ultima è detta formula di ricorrenza

Le potenze di un binomio



Combinazioni di poesie

Tratto da: \Insalate di matematica" - Paolo Gangemi - Sironi Editore
Il meraviglioso canzoniere di Petrarca comprende 366 componimenti che sono alla base di molta poesia occidentale. [. . .]
Ma c'è un poeta che, a prescindere da ogni valutazione estetica, surclassa di gran lunga tutti gli altri quanto al numero di poesie composte: si tratta di Raymond Queneau che è stato poeta, romanziere, saggista, ludolinguista e si è interessato anche di scienza e in particolare di matematica.
Proprio il suo spirito matematico lo ha portato a creare una delle sue opere più originali: \Cent mille milliards de poèmes"[. . .]
Ma quanti volumi riempie lo smisurato libro di Queneau? A parte brevi introduzioni e appendici, il testo poetico vero e proprio è lungo appena 10 pagine.
Non è un miracolo, nè un mistero: l'autore francese ha unito una proprietà elementare del calcolo combinatorio alla sua fantasia rutilante.
La caratteristica dell'opera, infatti, è la possibilità di permutare i versi: Queneau ha composto 10 sonetti, ma, anzichè su una pagina normale, li ha scritti ognuno su un foglio diviso in 14 striscioline orizzontali, una per verso, in modo che le striscioline si possano sfogliare indipendentemente l'una dall'altra

Combinazioni di poesie

Per far sì che tutti i sonetti risultanti fossero validi, Queneau li ha rimati secondo lo schema:

ABAB ABAB CCD EED

utilizzando sempre le stesse rime.
Se il lettore vuole, può leggere i 10 sonetti normalmente e finire i 140 versi del libro in pochi minuti.
Ma può anche decidere di sfogliare le striscioline in modo alternativo ottenendo ogni volta una poesia differente, sempre con la rima giusta. Certo il senso logico non è sempre coerentissimo. Del resto Queneau aderiva al surrealismo!
La cosa più bella (e più surreale) è che il lettore può creare poesie nuove ogni volta, aprendo il libro a caso

Dalle prove INVALSI

D20. **Luisa non ricorda bene la combinazione del lucchetto della sua bicicletta. La combinazione si ottiene girando quattro rotelline, ognuna delle quali riporta tutte le cifre da 0 a 9.**

Luisa non ricorda per nulla la seconda cifra della combinazione ma sa che

- **la prima cifra è 6**
- **la terza cifra è 3 o 4**
- **l'ultima cifra è 1**

Quante combinazioni al massimo dovrà provare Luisa per riuscire ad aprire il lucchetto della sua bicicletta?

A. ☐ 2

B. ☐ 3

C. ☐ 10

D. ☐ 20

Dalle prove INVALSI

E19. Immagina di lanciare prima una moneta e poi un dado.

a. Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune caselle sono già compilate).

	FACCE DEL DADO					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Testa (T)	T ; 1	…………	…………	…………	T ; 5	…………
Croce (C)	C ; 1	…………	C ; 3	…………	…………	…………

b. La probabilità che escano una croce e un numero dispari è

A. ☐ $\frac{1}{2}$

B. ☐ $\frac{3}{12}$

C. ☐ $\frac{3}{8}$

D. ☐ $\frac{2}{12}$

Dalle prove INVALSI

D21. **Si lanciano due dadi e si calcola la <u>differenza</u> dei punti sui due dadi. In quanti modi si può ottenere 0?**

☐ A. Mai

☐ B. In un solo modo

☐ C. In 6 modi

☐ D. In 12 modi