

Determinante e inversa di una matrice

Esercizio 6.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.3. Calcolare il rango della seguente matrice A , utilizzando il calcolo del determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \quad k \in \mathbf{R}$$

Esercizio 6.4. Calcolare l'inversa delle seguenti matrici (invertibili) utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.5. Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.6. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.
- Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.

Esercizio 6.7. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .

Esercizio 6.8. Sia A_t la matrice reale

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.

Esercizio 6.9. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

Esercizio 6.10. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

Esercizio 6.11. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.
- Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A .

Esercizio 6.12. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k , si calcoli la matrice inversa di A .

1. Suggerimenti

Una matrice (quadrata) A è invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1} , tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$.

Per calcolare l'inversa di una matrice utilizzeremo due metodi:

- Si affianca alla matrice A la matrice identica e si riduce A a gradini in forma normale (cioè con tutti 1 sulla diagonale e 0 altrove). La matrice in cui è stata trasformata la matrice identica è l'inversa A^{-1} .
- Si utilizzano le formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [a'_{ij}]^T$$

dove

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \text{complemento algebrico di } a_{ij} \\ &= (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{matrice ottenuta da } A \text{ eliminando la riga } i \text{ e la colonna } j) \end{aligned}$$

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

- (1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
- (2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
- (3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
- (4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Talvolta per calcolare il rango di una matrice può essere utile utilizzare un metodo misto di riduzione e di calcolo dei determinanti. Infatti, sia A una matrice e A' la matrice ottenuta da A con qualche passo di riduzione a gradini. Allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$. In particolare se A è quadrata $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$, ovvero che $\text{rg}(A)$ sia massimo.

2. Soluzioni

Esercizio 6.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

SOLUZIONE:

$$\det(A) = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -4 - 3 = -7$$

$$\det(B) = 0 - 2 \cdot 3 = -6$$

Per calcolare il determinante di C sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-7) = 2 - 14 = -12 \end{aligned}$$

Analogamente per calcolare il determinante di D sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\det(D) = -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -2 \cdot (7) = -14$$

Per calcolare il determinante di F sviluppiamo rispetto alla prima riga. Notiamo che il determinante di F risulta il prodotto degli elementi della diagonale:

$$\det(F) = 7 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot (-3) = -21$$

□

Esercizio 6.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo dalle matrici 2×2 :

$$\det(A_1) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$

$$\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\det(A_3) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Consideriamo ora le matrici 3×3 .

Per la matrice A_4 sviluppiamo il determinante rispetto alla prima colonna:

$$\det(A_4) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (10) = 10$$

Per la matrice A_5 possiamo sviluppare il determinante indifferentemente rispetto alla prima colonna o alla prima riga:

$$\det(A_5) = -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

Per la matrice A_6 ci conviene sviluppare il determinante rispetto alla seconda colonna:

$$\det(A_6) = -(-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot (7 - 4) + 1 \cdot (7 - 6) = 3 + 1 = 4$$

□

Esercizio 6.3. Calcolare il rango della seguente matrice A , utilizzando il calcolo del determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \quad k \in \mathbf{R}$$

SOLUZIONE:

Per calcolare il rango di A utilizziamo la seguente proprietà.

Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di A con determinante non nullo.

Cominciamo quindi a calcolare il determinante di A per stabilire quando $\text{rg}(A) = 3$.

Sviluppiamo rispetto alla terza colonna:

$$\det(A) = -(4-k) \cdot [2k-3-(k+2)] = (k-4)(k-5)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se $k = 4$ o $k = 5$.

Di conseguenza:

- Se $k \neq 4, 5$, la matrice ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 4$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(B) = -15 \cdot 6 \neq 0$$

quindi $\text{rg}(A) = 2$.

- Se $k = 5$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(C) = 7 \neq 0$$

quindi $\text{rg}(A) = 2$.

□

Esercizio 6.4. Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

SOLUZIONE:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $\text{rref}(A)$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow II - 2I \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ &\Rightarrow -1/5II \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \Rightarrow I - 2II \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $\text{rref}(B)$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{array}{l} II - I \\ III - 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ 1/2II &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow 1/2III \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ I - 3III &\Rightarrow II + 1/2III \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow I + II \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n \times n}$ è una matrice tale che $\text{rref}(M) = I_n$, allora $\text{rg}(M) = n$, quindi: una matrice $n \times n$ è **invertibile** se e solo se ha rango n .

□

Esercizio 6.5. Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

- Poichè $\det(A_1) = -1 - 4 = -5$ la matrice A_1 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_2 . Poichè $\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, la matrice A_2 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}0 = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_3 . Poichè $\det(A_3) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, la matrice A_3 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}3 = 3 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}1 = -1 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_4) = 10 \neq 0$, la matrice A_4 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{13} = (-1)^{1+3}1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 20 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \\ a'_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \\ a'_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \end{cases} \Rightarrow A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_5) = -6 \neq 0$, la matrice A_5 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 3 & a'_{12} = 0 & a'_{13} = 0 \\ a'_{21} = 0 & a'_{22} = -6 & a'_{23} = 0 \\ a'_{31} = 0 & a'_{32} = 0 & a'_{33} = -2 \end{array}$$

Quindi

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_6) = 4 \neq 0$, la matrice A_6 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 7 & a'_{12} = -3 & a'_{13} = -2 \\ a'_{21} = 7 & a'_{22} = 1 & a'_{23} = -2 \\ a'_{31} = -5 & a'_{32} = 1 & a'_{33} = 2 \end{array}$$

Quindi

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.6. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.
- Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.

SOLUZIONE:

a)

$$\det(A) = (1 - 4) + 2k = 2k - 3$$

La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

- Calcoliamo l'inversa di A dopo avere posto $k = 1$, nel quale caso $\det(A) = 2 - 3 = -1$.

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = -3 & a'_{12} = -1 & a'_{13} = 2 \\ a'_{21} = 2 & a'_{22} = 1 & a'_{23} = -2 \\ a'_{31} = -1 & a'_{32} = -1 & a'_{33} = 1 \end{array}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare l'inversa di A potevamo calcolare $rref(A)$ dopo avere affiancato a A , con $k = 1$, la matrice identica:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \Rightarrow & \begin{array}{l} III - 2II \\ I + III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \begin{array}{l} I + III \\ II + III \\ -III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Esercizio 6.7. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- a) Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
 b) Calcolare il rango di A al variare del parametro k .

SOLUZIONE:

- a) Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k-2) \cdot [k(2-k) - k] = (2k-2)(-k^2+k)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se

$$2k-2=0 \Rightarrow k=1$$

$$-k^2+k=0 \Rightarrow k=0 \text{ o } k=1$$

Infine A è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xRightarrow{\substack{-I \\ -1/4II \\ III+I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\xRightarrow{\substack{I-2II \\ III+4II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xRightarrow{1/2III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &\xRightarrow{I-III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b) Abbiamo visto che se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante non nullo, quindi in questi casi $\text{rg}(A) = 3$. Inoltre:

– Se $k = 0$, A diventa

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xRightarrow{\substack{III \\ 1/2II \\ I}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xRightarrow{III-II} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

– Se $k = 1$, A diventa

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xRightarrow{III-II} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

□

Esercizio 6.8. Sia A_t la matrice reale

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.

SOLUZIONE:

A_t è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se il suo rango è 3. Riduciamo quindi A a gradini per stabilire se è invertibile.

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} II \\ I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 0 \\ 2 & t & 1 \end{array} \right] \xRightarrow{III-2I} \begin{matrix} I \\ III-2I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 0 \\ 0 & t-2 & 1-2t \end{array} \right] \xRightarrow{III-II} \begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & 1-2t \\ 0 & t & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Scambiando ora la seconda e terza colonna otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-2t & t-2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Quindi A_t ha rango 3, cioè A_t è invertibile, se $t \neq 0, \frac{1}{2}$.

In alternativa potevamo calcolare direttamente il determinante:

$$\det(A_t) = -t(1-2t)$$

e A_t è invertibile se $\det(A_t) \neq 0$, ovvero se $t \neq 0, \frac{1}{2}$. □

Esercizio 6.9. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

SOLUZIONE:

- Riduciamo A a gradini:

$$II - 3kI \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III - II \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

- Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
 - Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.
- Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$. □

Esercizio 6.10. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

SOLUZIONE:

- Riduciamo A a gradini:

$$II + 2kI \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4k-1 & 11k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad III + II \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4k-1 & 11k-2 \\ 0 & 0 & 11k-2 \end{bmatrix}$$

Quindi:

- Se $k \neq \frac{1}{4}, \frac{2}{11}$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
 - Se $k = \frac{1}{4}$ o $k = \frac{2}{11}$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.
- Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \frac{1}{4}, \frac{2}{11}$. □

Esercizio 6.11. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.
- Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A .

SOLUZIONE:

- a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$III - 2I \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow III + kII \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

- b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow III - 2I \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & I + III \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & | & -2 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - \frac{1}{k}III \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \\ & III + kII \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \quad \forall k \neq 0, 4$$

□

Esercizio 6.12. Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- a) Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
 b) Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k , si calcoli la matrice inversa di A .

SOLUZIONE:

- a) Ricordiamo che una matrice ha rango massimo, in questo caso 3, se ha determinante diverso da zero.

$$\det(A) = 2 \cdot 6k - 1 \cdot 6k = 6k$$

Quindi se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3. Per $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e per $k = 0$ la matrice ha rango 2.

- b) Abbiamo visto che $\det(A) = 6k$, quindi A ha determinante 1 se $k = \frac{1}{6}$. Calcoliamo l'inversa con il metodo della riduzione:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{6} & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{12} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{12} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{12} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I - 1/12III \\ II + 1/12III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{matrix} I - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□