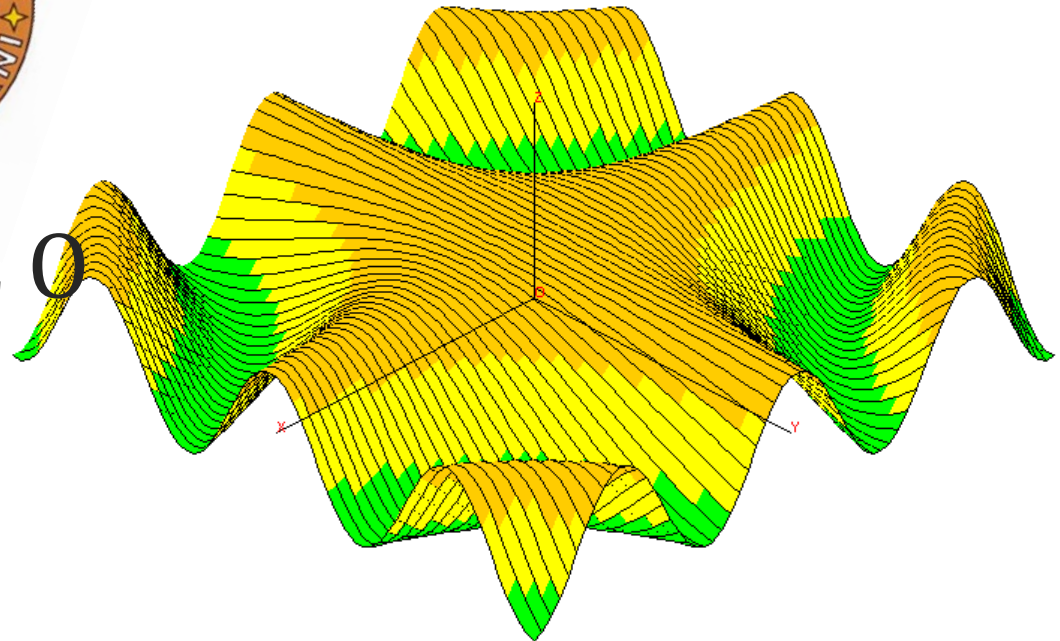




FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI

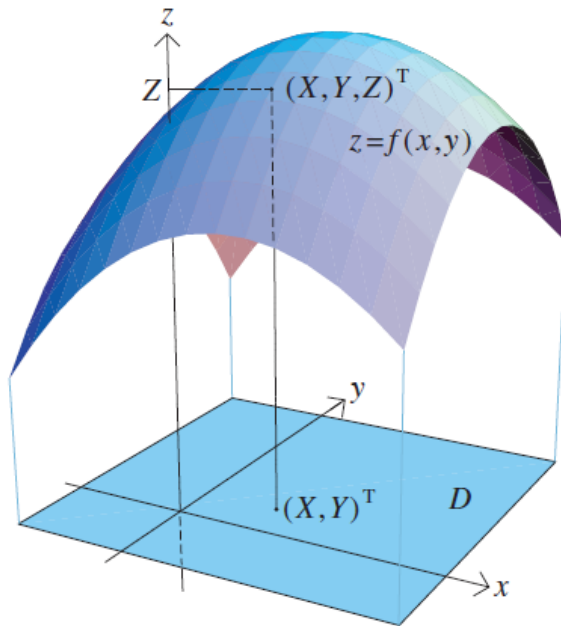


Prof. Roberto Capone
Corso di Matematica II
A.A. 2018/19
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

DEFINIZIONE

Funzione reale di due variabili reali

Indichiamo con R^2 l'insieme di tutti i vettori bidimensionali. Dato un sottoinsieme $D \subseteq R^2$, una funzione $f: D \rightarrow R$ è una legge che assegna a ogni punto (x, y) dell'insieme D un unico valore $z \in R$ indicato con $z = f(x, y)$

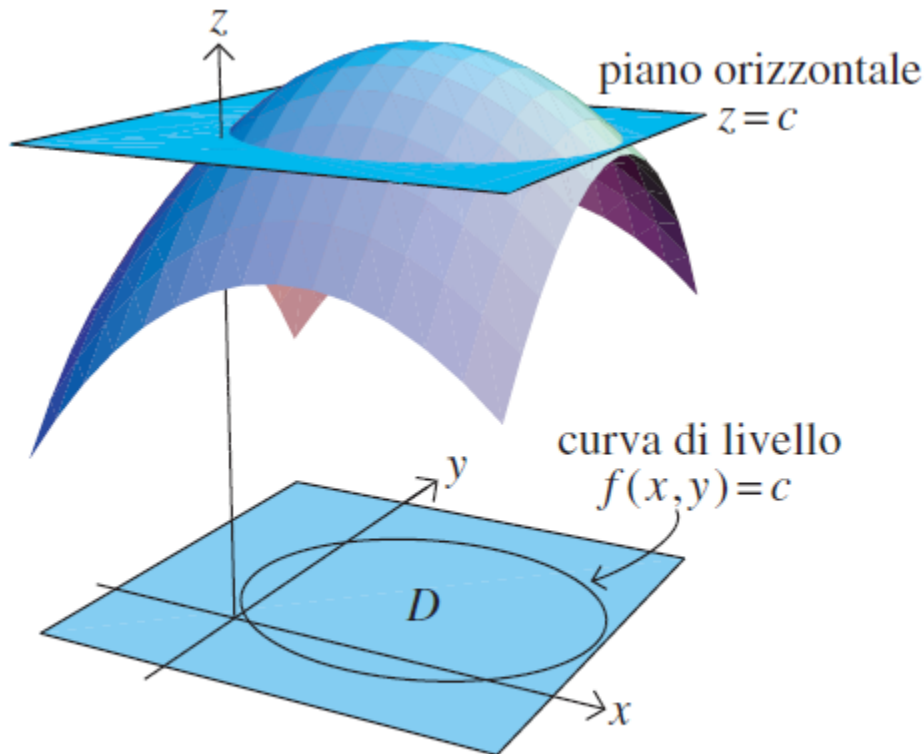


In questo caso, x e y sono le variabili indipendenti e z è la variabile dipendente. Il dominio D è una regione del piano (x, y) e il grafico è una superficie dello spazio tridimensionale. A ciascun punto (X, Y) di D con $f(X, Y) = Z$ corrisponde un unico punto (X, Y, Z) sulla superficie.

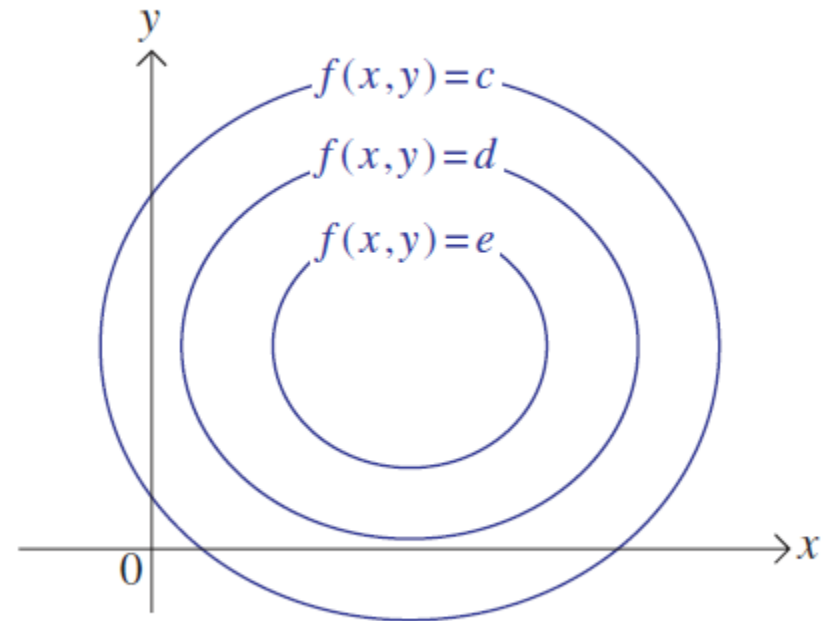
Di solito la superficie non è facile da disegnare per cui talvolta si preferisce considerarla come se fosse la superficie di un terreno. È allora naturale rappresentare l'andamento del terreno disegnando una mappa di curve orizzontali a una quota fissata, chiamate **curve di livello** o **contorni**, lungo le quali il valore della funzione è costante.

Ciascuna di queste linee corrisponde a una sezione orizzontale che taglia la superficie. Anche le sezioni verticali aiutano a descrivere la superficie, mostrandone delle viste laterali. Il reticolo che compare nel grafico di una funzione generato da un calcolatore corrisponde a sezioni verticali che tagliano la superficie secondo due direzioni ortogonali.

Rappresentazione delle linee di livello



Disegno della superficie



Curve di livello

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$z = f(x; y) = \frac{3x + 2y - 5}{x^2 + 4}$$

Qual è il suo dominio?

Denominatore non nullo: $x^2 + 4 \neq 0$,
condizione vera per ogni x e per ogni
 y

→ Dominio di f : $S = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

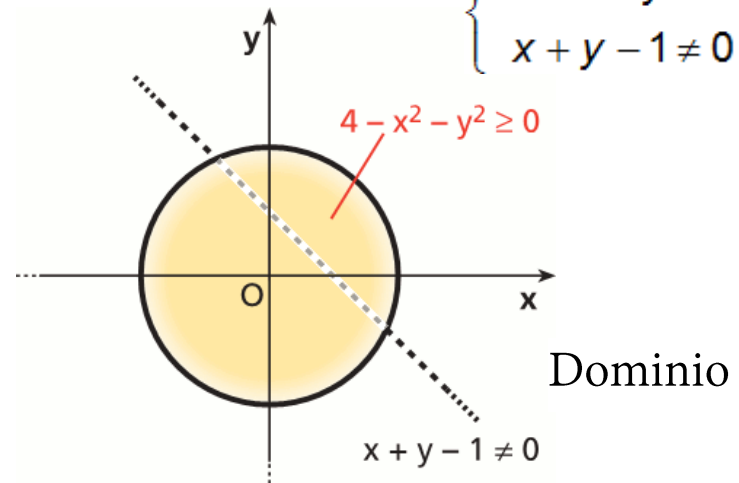
ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x + y - 1}$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x + y - 1 \neq 0 \end{cases}$$



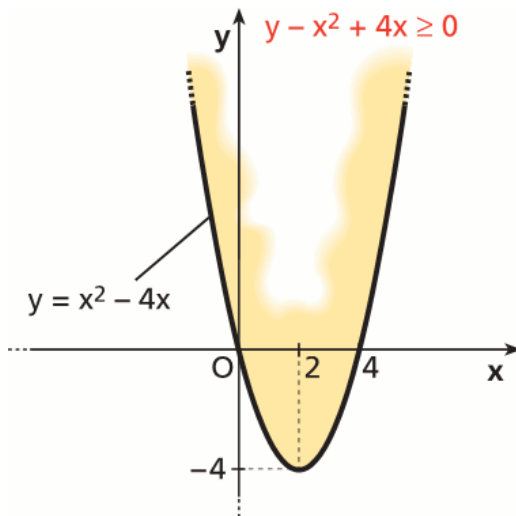
ESEMPIO

Determiniamo il dominio della funzione:

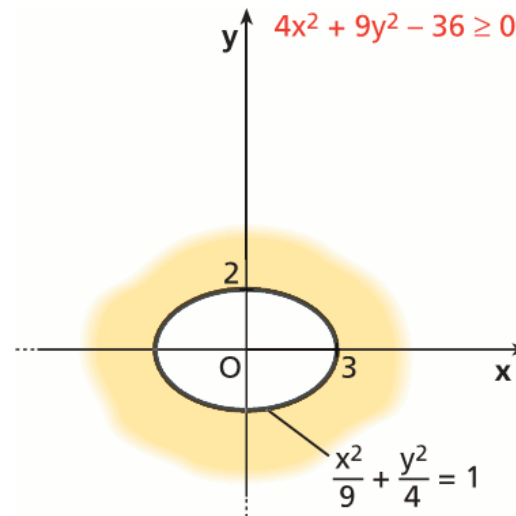
$$z = \frac{\sqrt{y - x^2 + 4x}}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36} + 7}.$$

Condizione di esistenza:

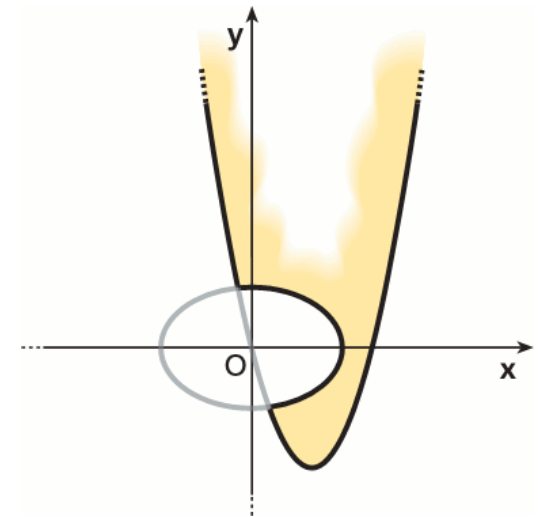
$$\begin{cases} y - x^2 + 4x \geq 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0 \end{cases}.$$



Prima disequazione



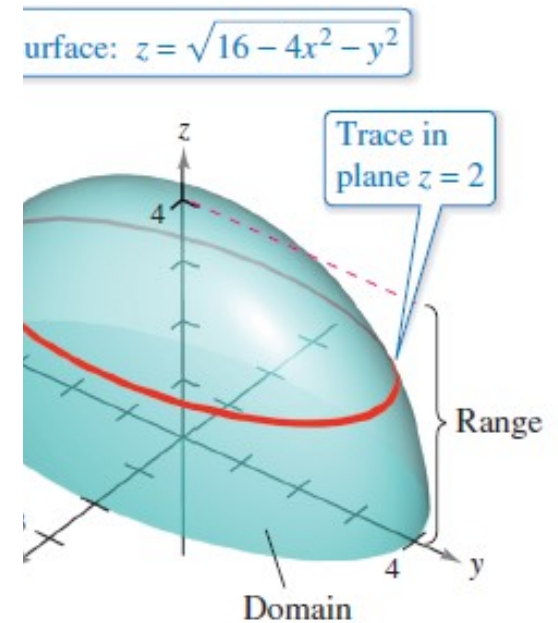
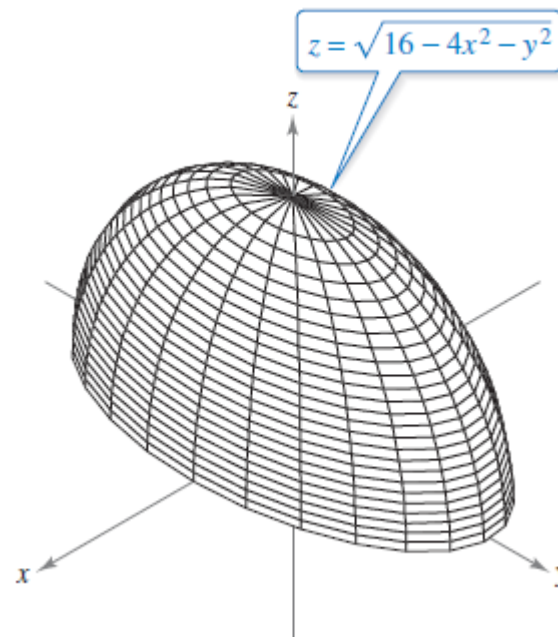
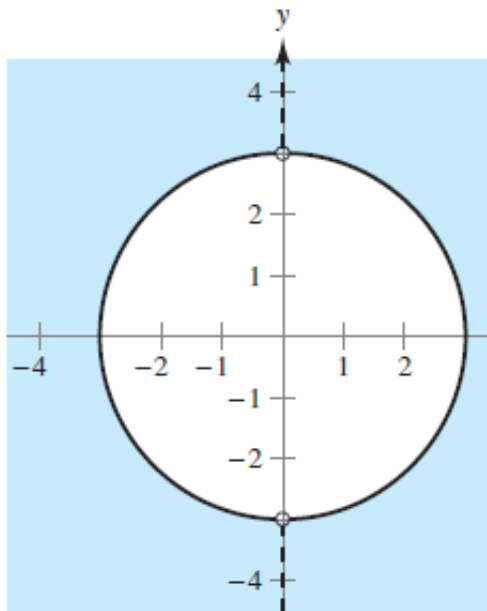
Seconda disequazione

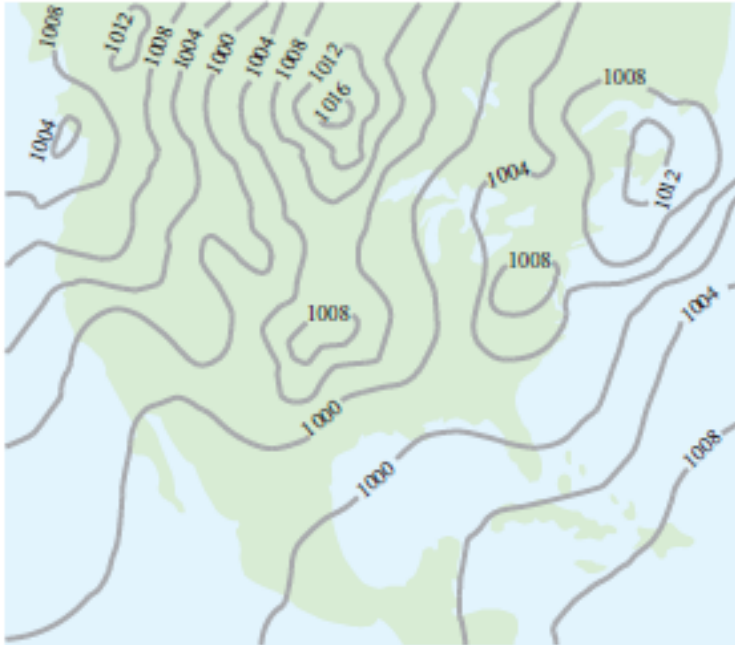


Intersezione

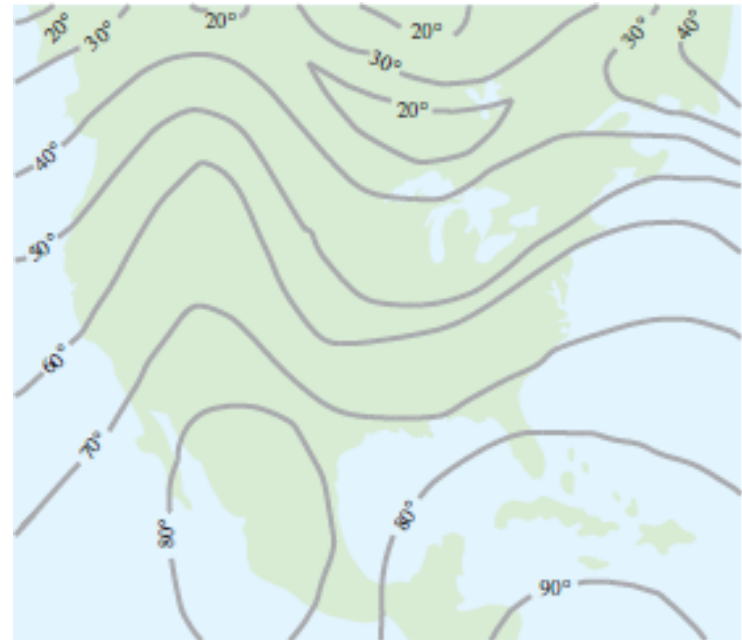
$$\text{a. } f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}?$$



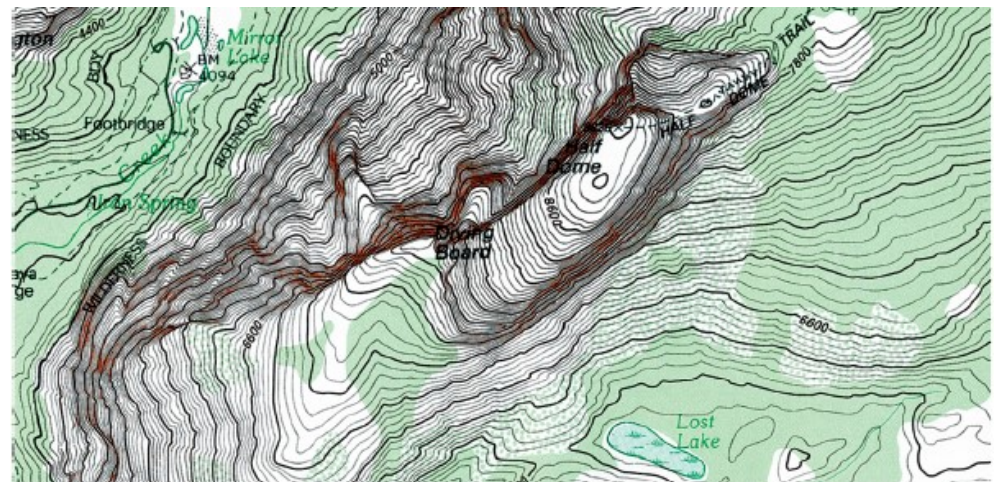


Level curves show the lines of equal
Level curves show the lines of equal
pressure (isobars), measured in
millibars.



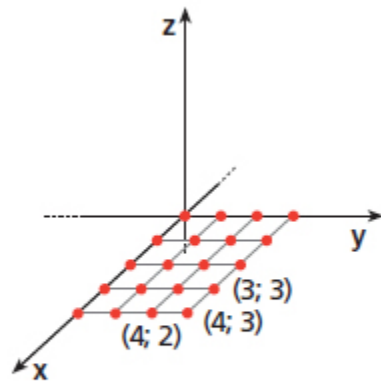
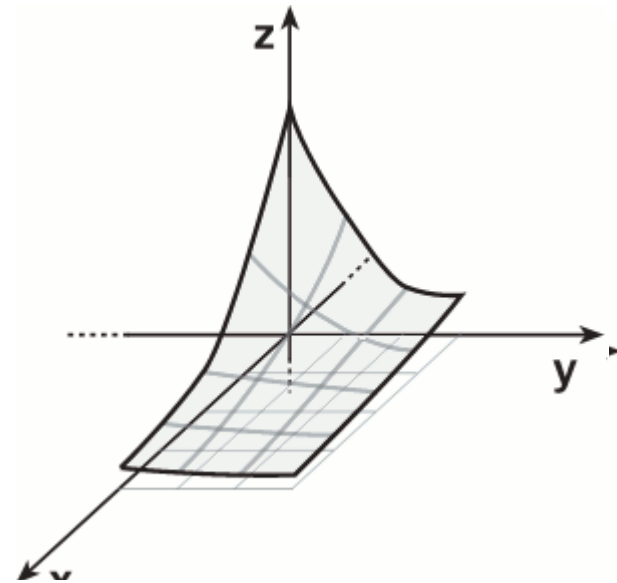
Level curves show the lines of equal
pressure (isobars), measured in
millibars. temperature (isotherms),
measured in degrees Fahrenheit.

A contour map depicts the variation of with respect to and by the spacing between level curves. Much space between level curves indicates that is changing slowly, whereas little space indicates a rapid change in Furthermore, to produce a good three-dimensional illusion in a contour map, it is important to choose values that are *evenly spaced*.

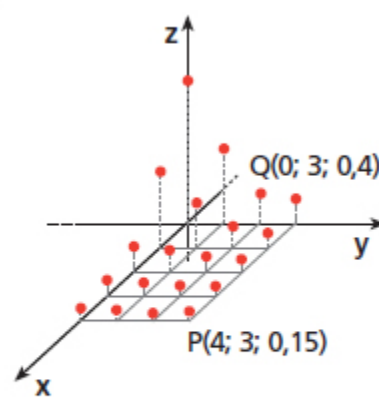


I grafici per punti

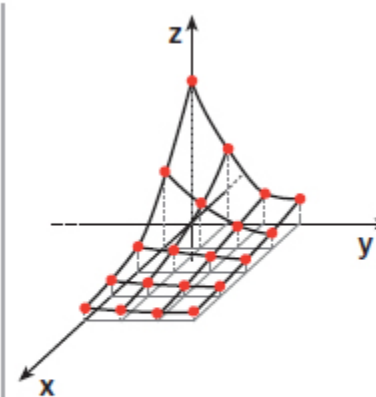
Grafico di $z = f(x; y)$: si individua un reticolo all'interno della porzione di dominio che si vuole rappresentare;
si innalzano le quote di ciascun nodo;
si congiungono con delle linee i punti ottenuti;
i quadrilateri ottenuti forniscono una rappresentazione approssimativa della superficie curva $z = f(x; y)$.



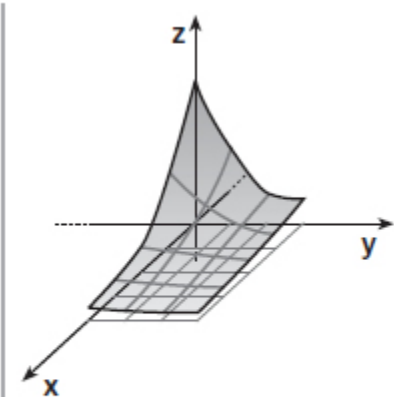
a. Tracciamo i lati di un reticolo.



b. Innalziamo le quote da ciascun nodo.



c. Congiungiamo i punti ottenuti con delle linee.

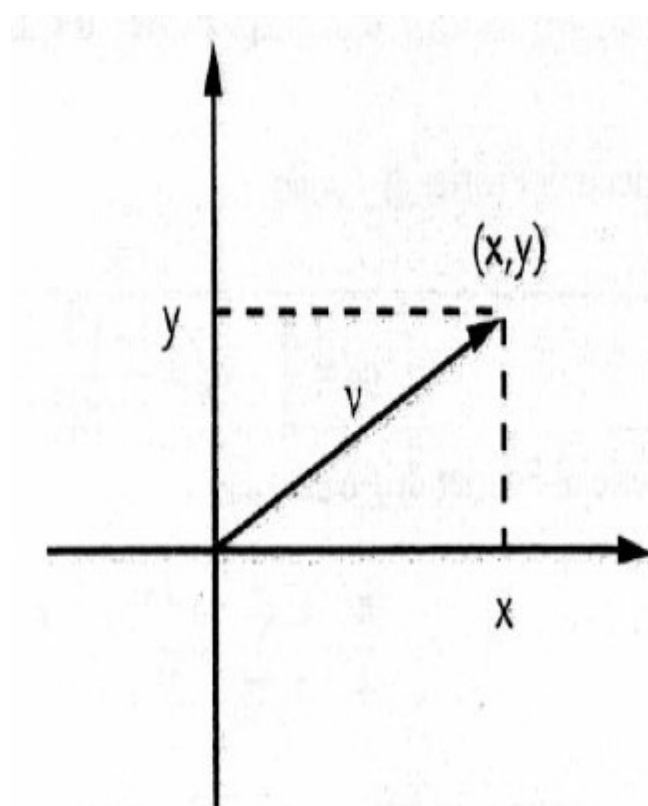
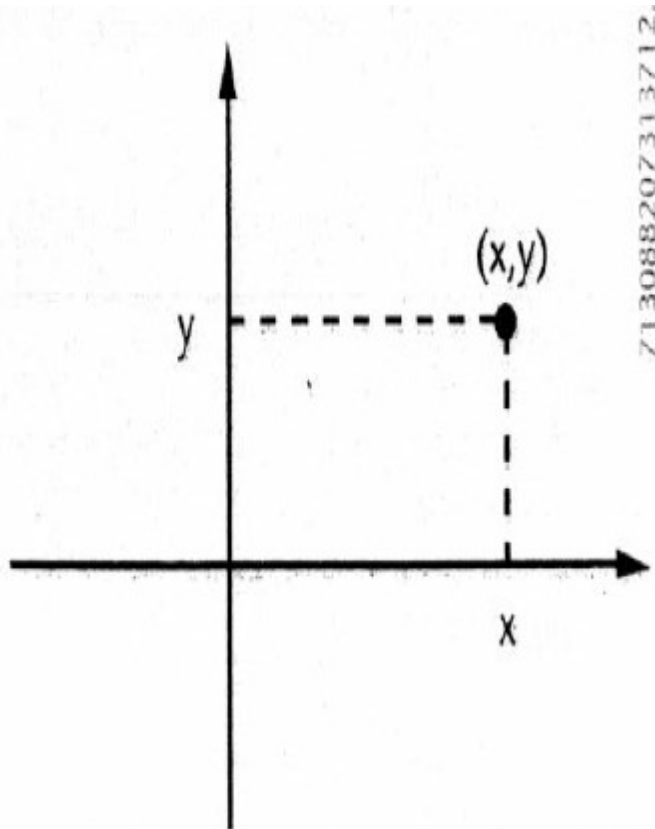


d. Otteniamo la rappresentazione della superficie nello spazio.

Indichiamo con il simbolo \mathbb{R}^2 l'insieme costituito dalle coppie ordinate di numeri reali, ovvero:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Gli elementi o punti di \mathbb{R}^2 possono essere rappresentati come segue.



E' utile definire la somma di due vettori v_1, v_2 di coordinate $v_1(x_1, y_1)$ e $v_2(x_2, y_2)$ nel modo seguente:

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

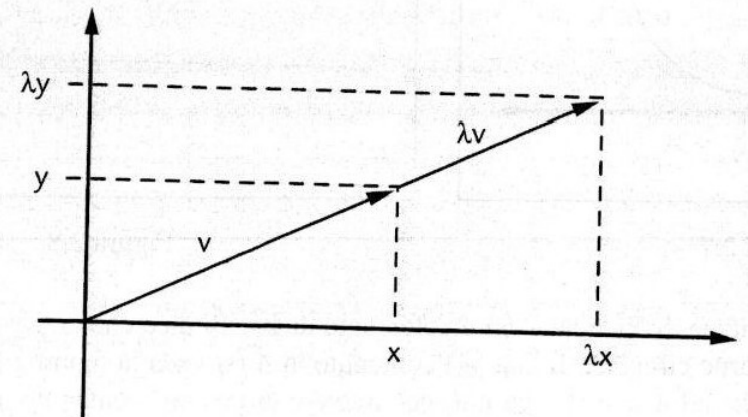
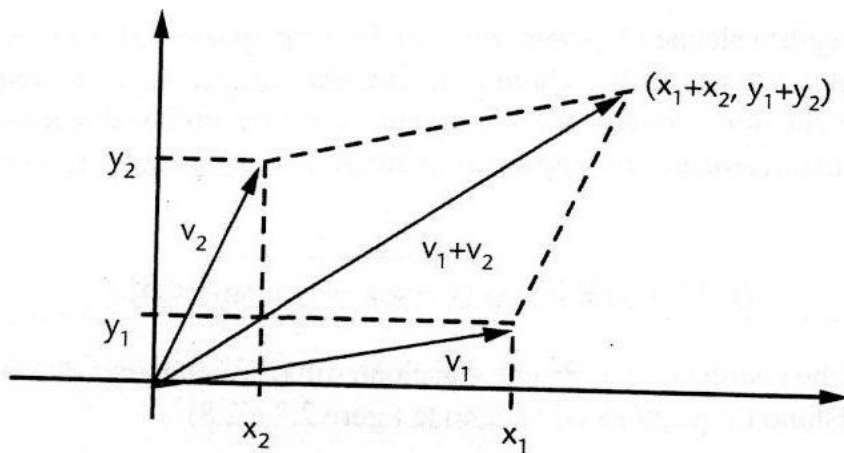
Analogamente si definisce la moltiplicazione di un vettore v per uno scalare λ nel modo seguente:

$$\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y)$$

Con le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare l'insieme \mathbb{R}^2 si può riguardare come uno spazio vettoriale. Il vettore nullo ha componenti $(0,0)$, mentre l'opposto è il vettore $-v = (-x, -y)$

$\forall v(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si definisce modulo o norma di v la quantità

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Il prodotto scalare di due vettori v_1 e v_2 viene indicato col simbolo (v_1, v_2) ed è definito nel modo seguente:

$$(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano due vettori v_1 e v_2 di R^2 . Se indichiamo con $|v_1|$ e $|v_2|$ i moduli dei due vettori e con (v_1, v_2) il loro prodotto scalare, risulta:

$$|(v_1, v_2)| \leq |v_1| \cdot |v_2|$$

Dimostrazione

Dati due vettori $v_1(x_1, y_1)$ e $v_2(x_2, y_2)$, $\forall t \in R$ si ha:

$$0 \leq (x_1 + tx_2)^2 + (y_1 + ty_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + 2t(x_1x_2 + y_1y_2) + t^2(x_2^2 + y_2^2)$$

Posto:

$$\begin{aligned} \alpha &= x_2^2 + y_2^2 = |v_2|^2 \\ \beta &= x_1x_2 + y_1y_2 = (v_1, v_2) \\ \gamma &= x_1^2 + y_1^2 = |v_1|^2 \end{aligned}$$

si avrà:

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$$

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$$

Se $\alpha = 0$ risulta $|v_2| = 0$ cioè $v_2 = 0$ e, in tal caso, anche $(v_1, v_2) = 0$ pertanto la disuguaglianza si riduce a una ovvia identità $0 = 0$

Se $\alpha \neq 0$ la disuguaglianza scritta esprime il fatto che il polinomio di secondo grado rispetto a t è non negativo $\forall t \in R$. Ciò implica che il discriminante dell'equazione associata verifica $\Delta \leq 0$.

Pertanto:

$$\frac{\Delta}{4} = (v_1, v_2)^2 - |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \leq 0$$

che corrisponde alla tesi

DEFINIZIONE**Intorno circolare**

Sia $P_0(x_0; y_0)$ un punto fissato di \mathbb{R}^2 .

Si chiama intorno circolare del punto

$P_0(x_0; y_0)$ del piano l'insieme dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$

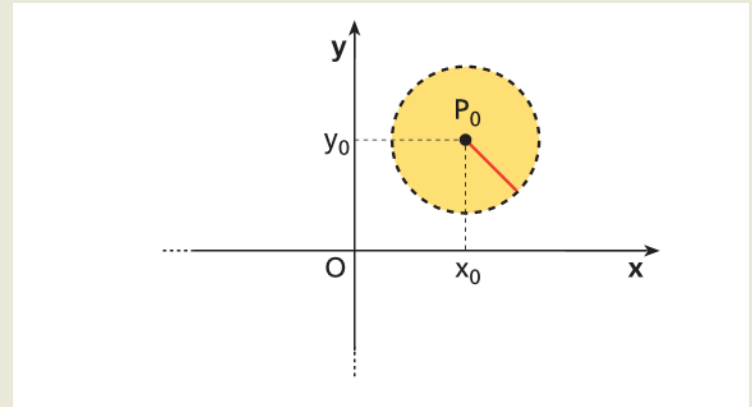
soddisfano la disequazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

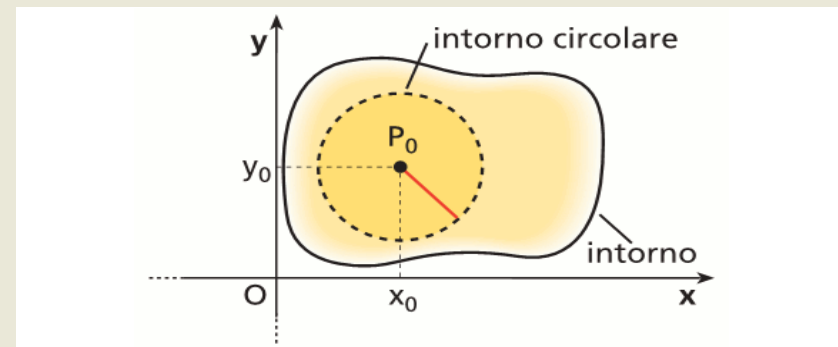
con δ numero reale positivo,

ovvero un cerchio aperto di centro $(x_0; y_0)$ e raggio δ

$$I_\delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}$$

**DEFINIZIONE****Intorno**

Si chiama intorno di un punto P_0 del piano ogni sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che contiene un intorno circolare di centro P_0 .



ESEMPIO

Consideriamo l'insieme

$$I = \{ (x;y) \mid (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge \\ \wedge x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 < 0 \}.$$

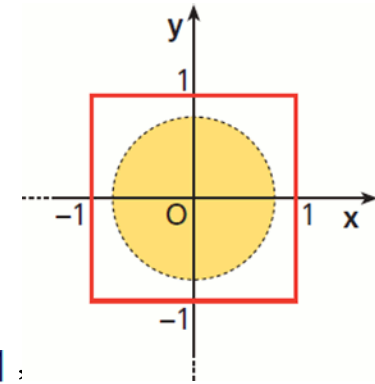
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$$

è l'equazione di una circonferenza centrata in $P_0(3;2)$ con raggio $r = 1$.

→ I è un intorno circolare di raggio 1 del punto $P_0(3;2)$.

ESEMPIO

Consideriamo l'insieme I rappresentato nella figura.



$$-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1;$$

I contiene in intorno circolare di $O(0;0)$ di raggio 0,75.

→ I è un intorno di $O(0;0)$.
 O è un **punto di accumulazione** per I .

DEFINIZIONE

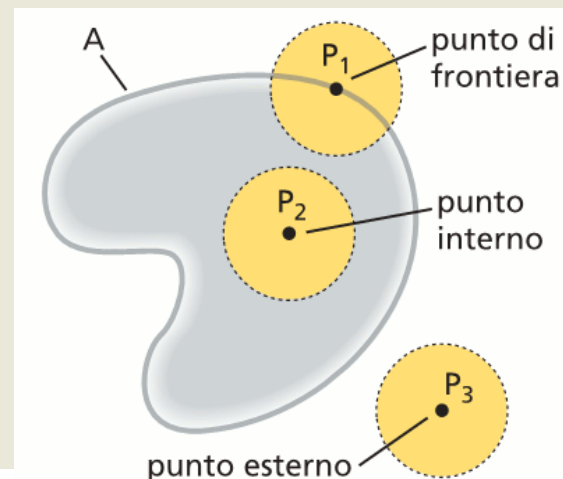
Punto di accumulazione

Dato un insieme I di punti di un piano, un punto P_0 si dice di accumulazione per I se, comunque fissato un intorno circolare di P_0 , tale intorno contiene infiniti punti di I .

DEFINIZIONE**Punti interni, esterni, di frontiera**

Dato un insieme A di punti del piano, un punto P è:

- **di frontiera** per A , se ogni intorno di P ha punti di A e punti che non appartengono ad A ;
- **interno** ad A , se P appartiene ad A e se esiste un intorno di P i cui punti sono soltanto punti di A ;
- **esterno** ad A , se esiste un intorno di P che non ha punti appartenenti ad A .

**ESEMPIO**

Dato un cerchio:

sono **esterni** i punti che non appartengono al cerchio;

sono **interni** i punti del cerchio che non appartengono alla circonferenza;

la circonferenza è la **frontiera**.

DEFINIZIONE**Insieme aperto, insieme chiuso**

Un insieme di punti del piano si dice:

- **aperto**, se ogni suo punto è *interno*;
- **chiuso**, se il suo complementare è aperto.

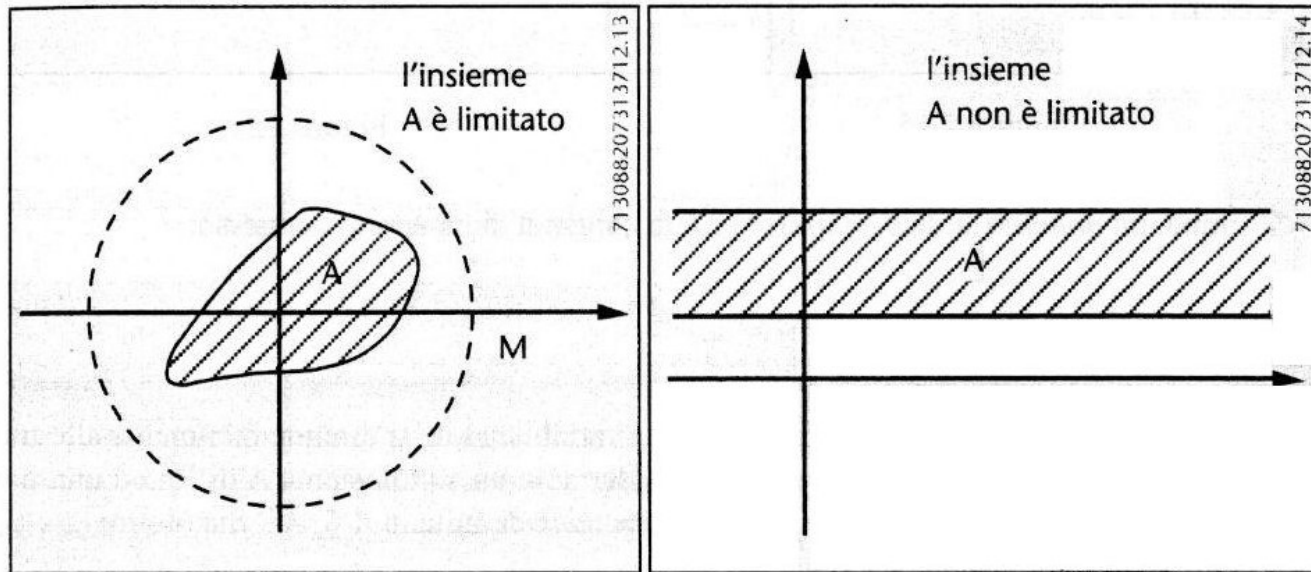
ESEMPIO

Un poligono è un insieme **chiuso**.

Un poligono privato dei lati è un insieme **aperto**.

Un insieme $A \subseteq R^2$ si dice limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine $I_M(0)$ cioè se esiste $M > 0$ t.c.

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M$$

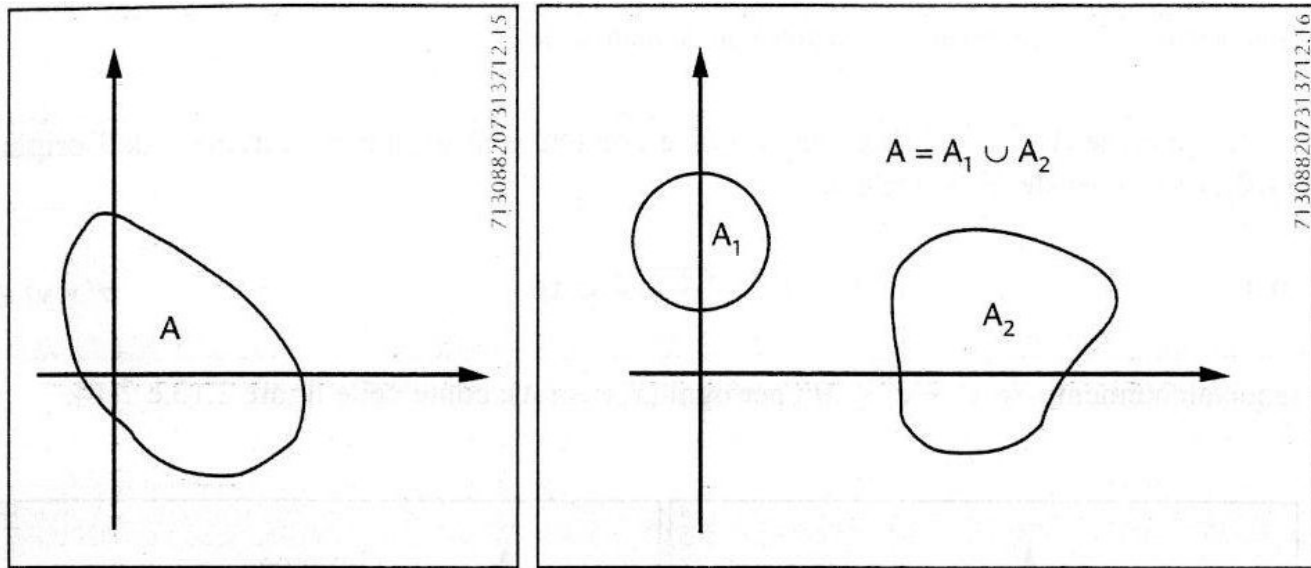


Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di \mathbb{R}^2 la cui unione sia l'insieme A .

In formule ciò significa che non esistono due aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cup A_2 = A \end{cases}$$

Un dominio si dice connesso se è la chiusura di un aperto connesso



DEFINIZIONE

Limite finito per P tendente a P_0

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D , e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D ,

si dice che la funzione ammette limite finito l per $P(x; y)$ tendente a $P_0(x_0; y_0)$ e si scrive

oppure

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x; y) = l$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = l$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo ϵ , si può determinare un

intorno circolare di P_0 , di raggio δ dipendente da ϵ , per ogni punto del quale, escluso P_0 , sia

$$|f(x; y) - l| < \epsilon$$

ESEMPIO

Verifichiamo che:

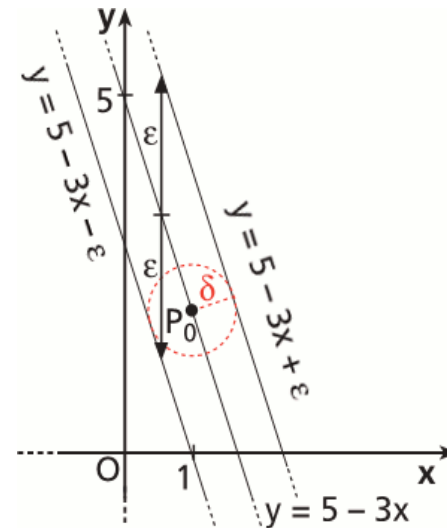
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (3x + y) = 5$$

Cerchiamo, per ogni ϵ , un intorno circolare di $(1; 2)$ in cui $|3x + y - 5| < \epsilon$.

Ossia:

$$5 - \epsilon < 3x + y < 5 + \epsilon,$$

$$5 - 3x - \epsilon < y < 5 - 3x + \epsilon.$$



La disequazione rappresenta lo spazio compreso tra le due rette esterne,

che comprende un intorno circolare di $(1; 2)$.

DEFINIZIONE

Limite infinito per P tendente a P_0

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D , e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D ,

si dice che la funzione ammette limite infinito per $P(x; y)$ tendente a $P_0(x_0; y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x; y) = \alpha \text{ oppure } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = \infty$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo M , si può determinare un intorno circolare di P_0 , di raggio d dipendente da M , per ogni punto del quale, escluso P_0 , sia $|f(x; y)| > M$.

DEFINIZIONE

Limite finito per P tendente a *infinito*

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D illimitato,

si dice che la funzione ammette limite finito l per $P(x; y)$ tendente a ∞ e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(x; y) = l \text{ oppure } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x; y) = l$$

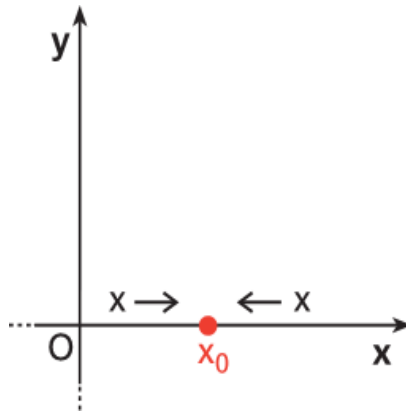
se, fissato arbitrariamente un numero positivo ϵ , si può determinare un intorno circolare di P_0 , di raggio d dipendente da ϵ , tale che per tutti i punti di D esterni ad esso risulti

$$|f(x; y) - l| < \epsilon$$

Limite destro e limite sinistro?

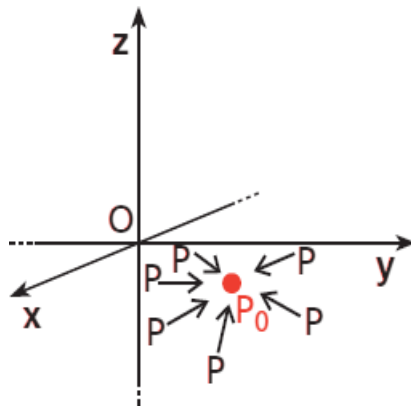
Nell'asse reale, un punto x_0 divide i propri intorno in due parti.

Si possono definire i limiti destro e sinistro di una funzione intorno a x_0 .



Nel piano, il punto $P_0(x_0; y_0)$ non divide l'intorno.

I limiti destro e sinistro non hanno senso.



DEFINIZIONE

Funzione continua

Una funzione $z = f(x; y)$ definita in un insieme D si dice continua in un punto $P_0(x_0; y_0)$, appartenente a D e di accumulazione per D stesso,

se esiste finito il $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x; y)$, e se tale

$$P \rightarrow P_0$$

limite è uguale al valore assunto dalla funzione in P_0 .

Scriviamo:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$

ESEMPIO

$$z = \frac{x + y}{x - y} \text{ è continua per } x \neq y$$

Limiti per funzioni in due variabili

Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Tale funzione è definita nell'aperto A costituito da \mathbb{R}^2 privato dell'origine, cioè $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Infatti, dalle disuguaglianze:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

cioè, $\forall \varepsilon > 0$:

$$0 \leq f(x, y) < \varepsilon$$

$$\forall (x, y) \neq (0,0) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Teorema di Weierstrass

Sia C un insieme chiuso e limitato di R^2 e sia $f(x, y)$ una funzione continua definita su C . Allora f assume massimo e minimo (assoluti) su C cioè esistono due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di C tali che

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$$

Teorema di Cantor

Sia C un insieme chiuso e limitato di R^2 e sia $f(x, y)$ una funzione continua definita su C . Allora f è uniformemente continua su C ; cioè $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ con $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta$ cioè

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$$

Teorema di esistenza dei valori intermedi

Sia D un dominio connesso e limitato di R^2 e $f(x, y)$ una funzione continua su D . Allora f assume tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo di f su D

ESERCIZIO GUIDA

Dobbiamo imporre che siano contemporaneamente verificate le seguenti condizioni:

- il denominatore diverso da 0;
- il radicando al numeratore maggiore o uguale a 0;
- l'argomento del logaritmo maggiore di 0;
- il radicando al denominatore maggiore oppure uguale a 0.

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2 - 1} \neq 0 & \rightarrow x^2 - y^2 - 1 \neq 0 \\ \ln(x^2 + y^2 - 15) \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 15 > 0 \\ x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Considerando la prima e l'ultima condizione contemporaneamente e ricordando che $\ln a \geq 0$ per $a \geq 1$, il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 15 \geq 1 \\ x^2 + y^2 - 15 > 0 \end{cases}$$

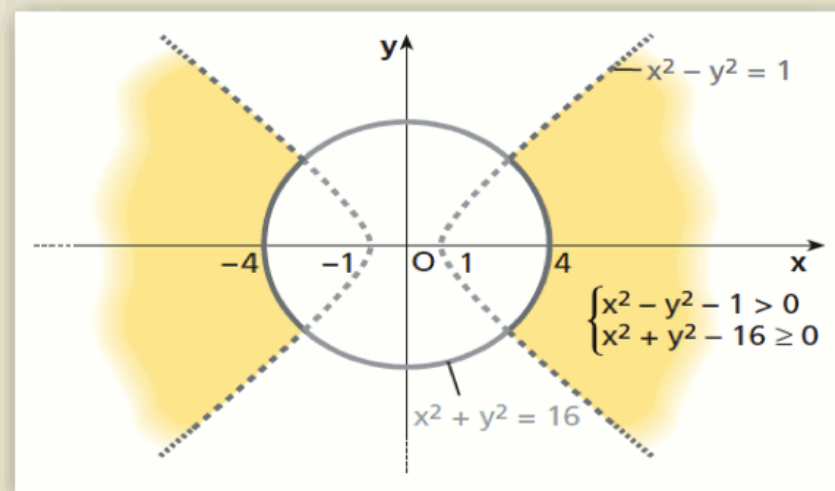
Determiniamo il dominio della funzione:

$$z = \frac{\sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 15) + 7x^2 - 6x}}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}$$

Osserviamo che la seconda e la terza disequazione sono entrambe vere soltanto se il primo membro è maggiore o uguale a 1:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 15 \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è rappresentato da tutti i punti del piano della parte colorata della figura.



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo l'andamento delle linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 10x$ e rappresentiamone alcune.

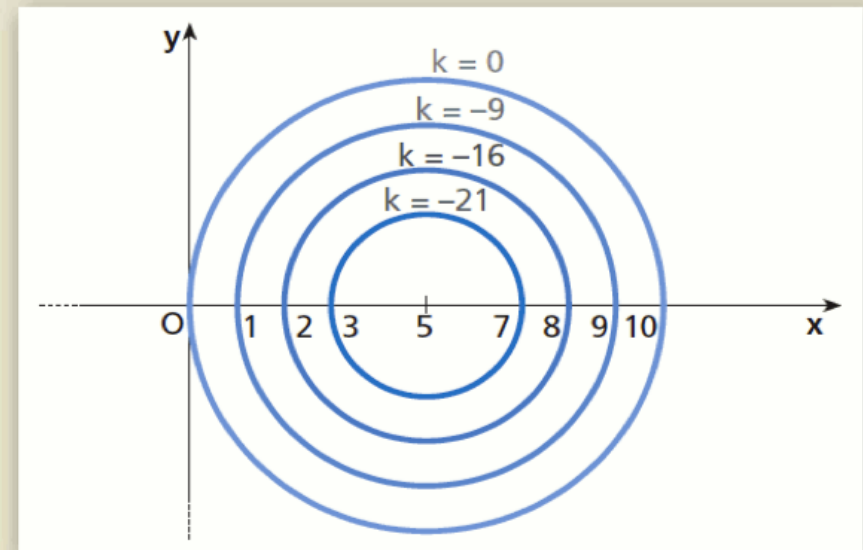
Sezioniamo la superficie con piani paralleli al piano Oxy , cioè con piani di equazione $z = k$, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 10x \\ z = k \end{cases}$$

Le sezioni ottenute hanno equazioni

$k = x^2 + y^2 - 10x$, una per ogni valore di k . Le linee di livello, al variare di k , sono le circonferenze $x^2 + y^2 - 10x - k = 0$ di centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 + k}$. Se, per esempio, sezioniamo con il piano $z = -16$, otteniamo la circonferenza $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$, che è di centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 - 16} = 3$. In figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello e i corrispondenti valori di k .

Dalla relazione $r = \sqrt{25 + k}$ si ricava $25 + k \geq 0$, quindi $k \geq -25$. Per $k = -25$ si ha il punto $(5; 0)$. Le linee di livello non esistono se $k < -25$.



ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo, applicando la definizione:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^3 + xy^2}{x} = 2.$$

Raccogliamo x a fattor comune e dividiamo per $x \neq 0$:

$$\frac{x^3 + xy^2}{x} = \frac{\cancel{x}(x^2 + y^2)}{\cancel{x}} = x^2 + y^2.$$

Dobbiamo mostrare che esiste un intorno circolare di $P_0(1; 1)$ tale che:

$$|x^2 + y^2 - 2| < \varepsilon.$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$\begin{aligned} |x^2 + y^2 - 2| < \varepsilon &\rightarrow -\varepsilon < x^2 + y^2 - 2 < \varepsilon \rightarrow \\ &\rightarrow 2 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

La doppia disuguaglianza è verificata in tutta la parte di piano compresa nella corona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 2 - \varepsilon$ e $x^2 + y^2 = 2 + \varepsilon$, e quindi in qualsiasi intorno circolare di P_0 di raggio minore o uguale alla distanza di P_0 da ciascuna circonferenza (figura b).

