



GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Prof. Roberto Capone
A.A. 2018/19
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica/Gestionale



Introduzione alla geometria analitica dello spazio

Anche lo spazio, come il piano, può essere riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, procedendo come segue: si considerano tre rette a due a due ortogonali, dette asse x , asse y e asse z , tutte e tre passanti per un punto O , origine del sistema di riferimento; si orientano i tre assi e si considera su di essi una unità di misura; se l'orientamento è come in fig. 11.1 il sistema di riferimento si dice destro, mentre se è come in fig. 11.2 si dice sinistro

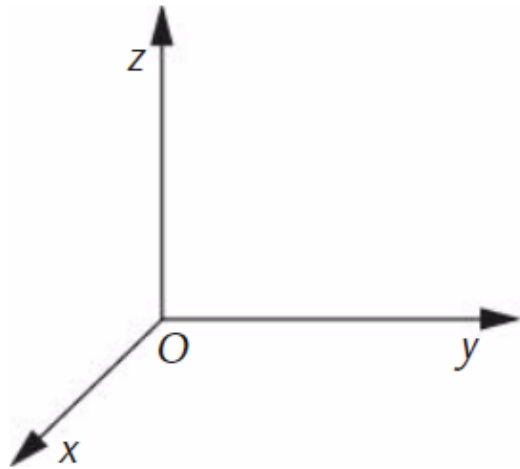


Figura 11.1

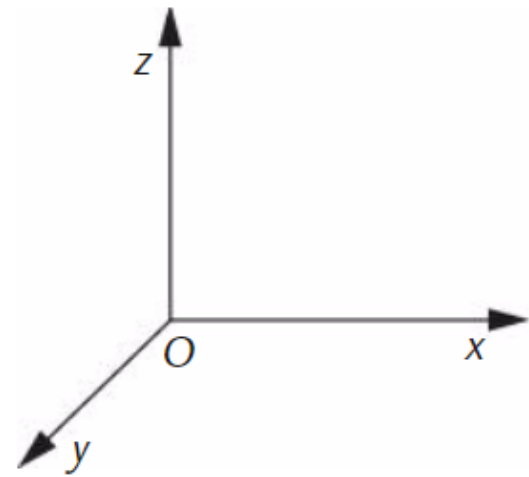


Figura 11.2

Il piano che contiene gli assi x e y è detto piano xy ; analogamente il piano che contiene gli assi x e z è detto piano xz e il piano che contiene gli assi y e z è detto piano yz (fig. 11.3). I tre piani xy , yz e xz , detti piani coordinati, dividono lo spazio in otto parti, detti ottanti (gli analoghi dei quadranti nel piano). A ogni punto P dello spazio è possibile associare una terna ordinata di numeri reali (x, y, z) , che costituiscono le coordinate del punto P (fig. 11.4)

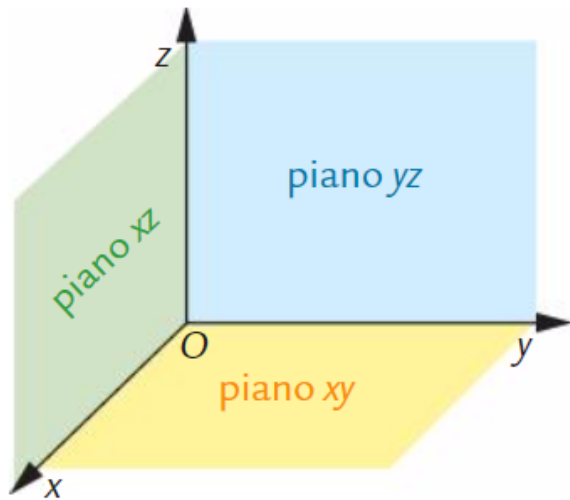


Figura 11.3

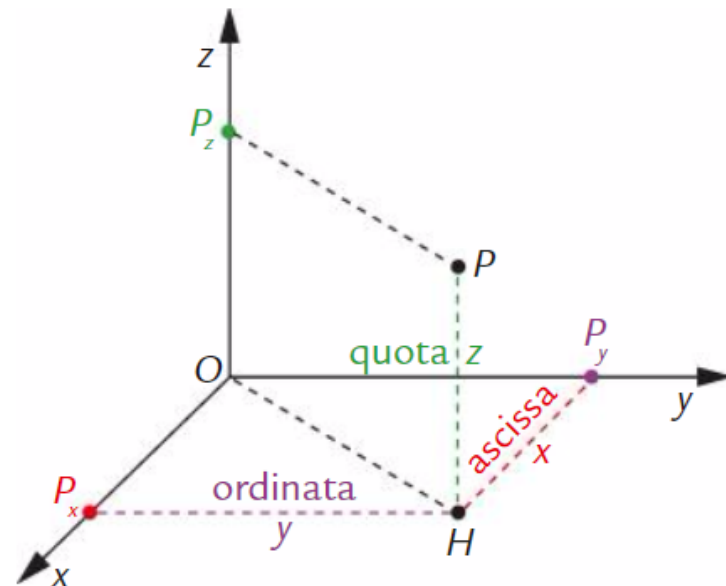
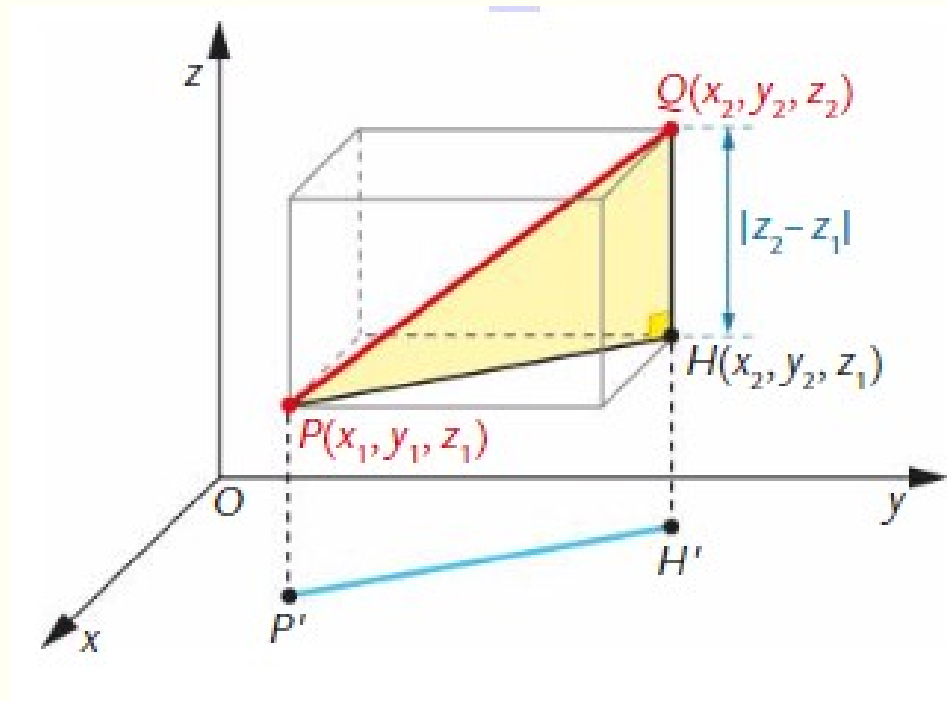


Figura 11.4

Distanza tra due punti



Distanza tra due punti nello spazio

Nello spazio, la distanza d tra due punti di coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , è espressa dalla formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

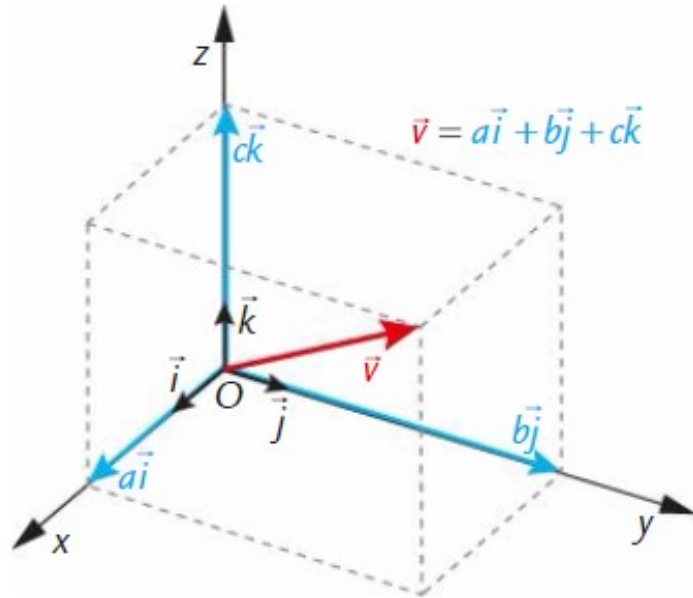
Punto medio di un segmento

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO NELLO SPAZIO

Il **punto medio** di un segmento i cui estremi hanno coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , ha coordinate:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Vettori nello spazio



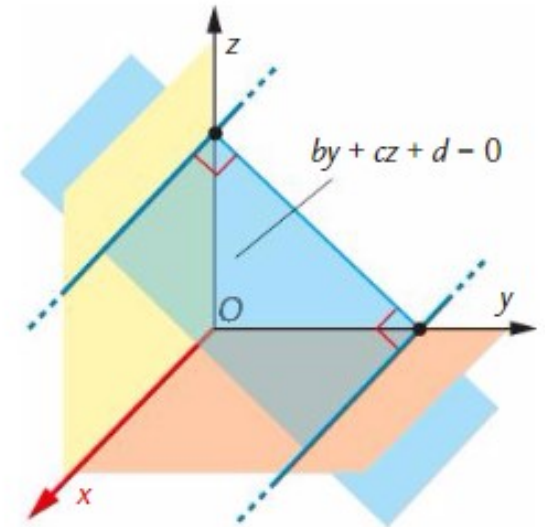
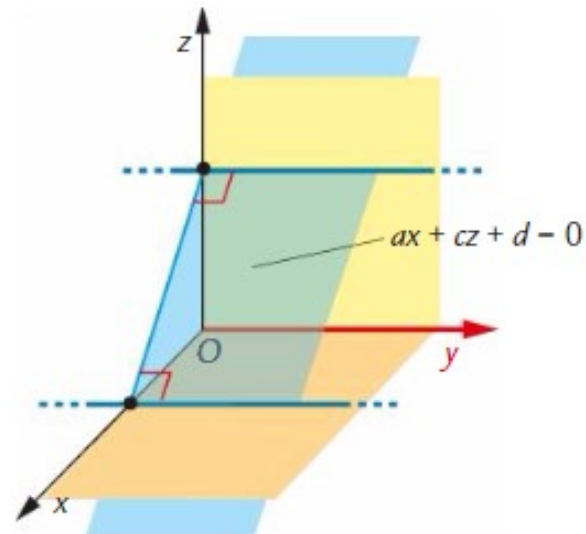
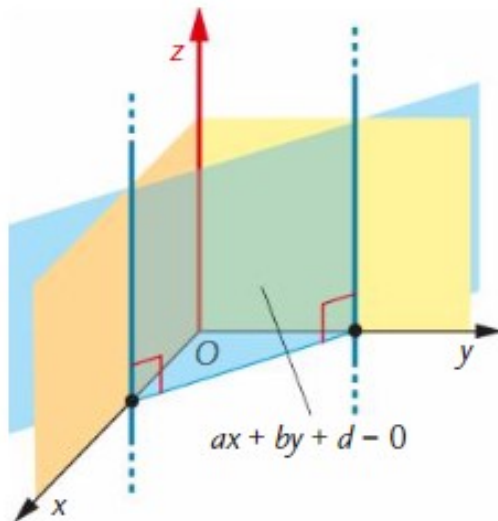
$$ax + by + cz + d = 0$$

Equazione del piano passante per un punto, di dato vettore normale

Il piano passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e di vettore normale $\vec{n}(a, b, c)$ ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

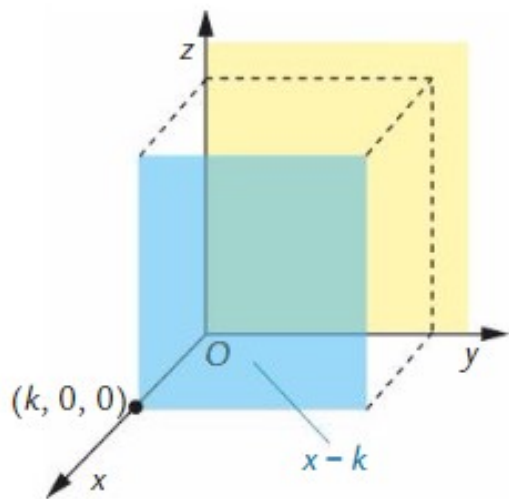
[11.2]



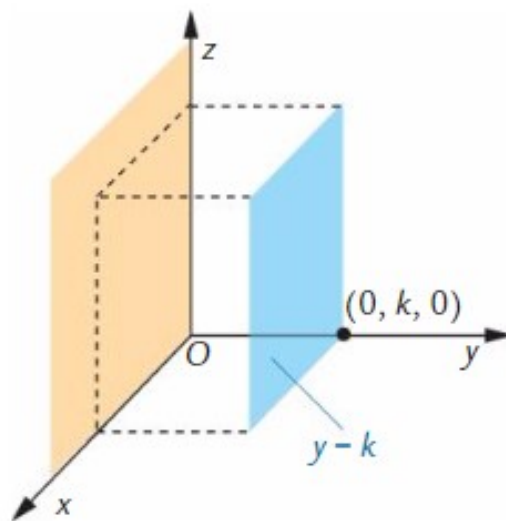
a. Piano parallelo **all'asse z** (deve perciò intersecare i piani xz e yz lungo rette parallele all'asse z). Tale piano è anche perpendicolare al piano xy .

b. Piano parallelo **all'asse y** (deve perciò intersecare i piani yz e xy lungo rette parallele all'asse y). Tale piano è anche perpendicolare al piano xz .

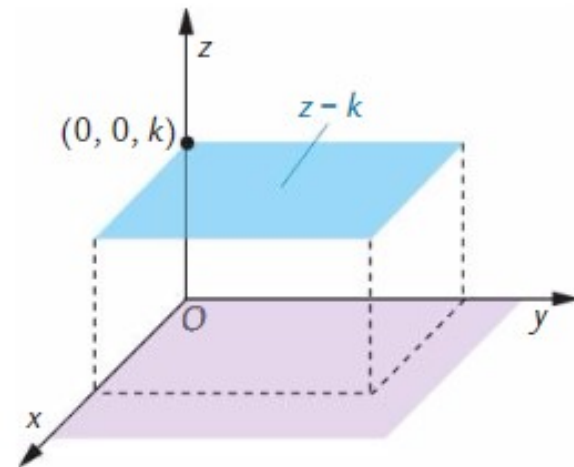
c. Piano parallelo **all'asse x** (deve perciò intersecare i piani xy e xz lungo rette parallele all'asse x). Tale piano è anche perpendicolare al piano yz .



a. Piano parallelo al piano yz.



b. Piano parallelo al piano xz.



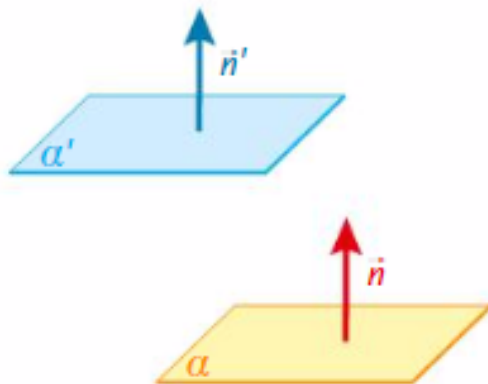
c. Piano parallelo al piano yz.

Parallelismo tra due piani

**Condizione di parallelismo
tra i due piani**

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{e } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$



I due piani sono *paralleli* se e solo se lo sono i due vettori normali:

$$\vec{n}(a, b, c) \text{ e } \vec{n}'(a', b', c')$$

Ciò si verifica se e solo se esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che:

$$a = ka', b = kb', c = kc'$$

ovvero, se $a', b', c' \neq 0$, quando:

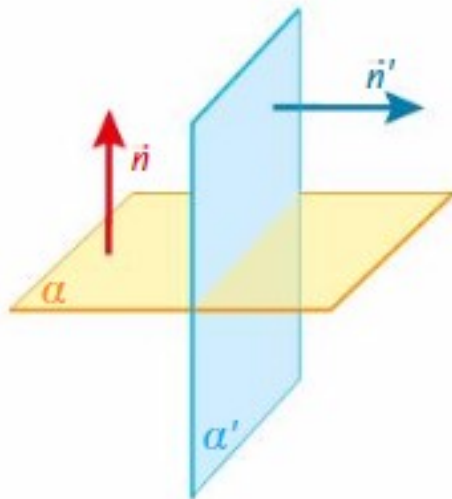
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Perpendicolarità tra due piani

**Condizione di perpendicolarità
tra i due piani**

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{e } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$



I due piani sono *perpendicolari* se e solo se lo sono i due vettori normali:

$$\vec{n}(a, b, c) \text{ e } \vec{n}'(a', b', c')$$

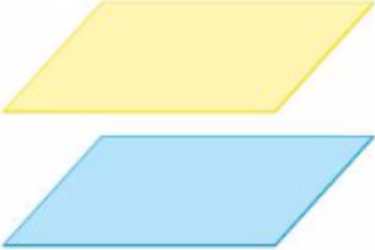

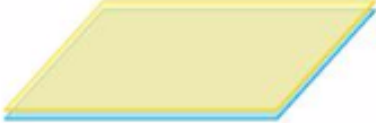
Ciò si verifica se e solo se risulta:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

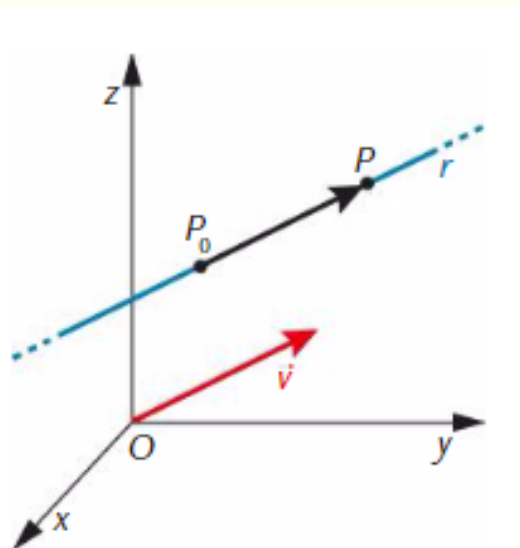
da cui la condizione:

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Posizione reciproca tra due piani

Piani paralleli distinti	Piani secanti	Piani paralleli coincidenti
		
<p>Il sistema</p> $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ <p>non ammette soluzioni.</p>	<p>Il sistema</p> $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ <p>ammette <i>infinite</i> soluzioni, tutte appartenenti a una medesima <i>retta</i>.</p>	<p>Il sistema</p> $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ <p>è verificato da ogni terna ordinata (x, y, z) che soddisfa la prima equazione (o la seconda).</p>

Equazione della retta nello spazio



$$\overrightarrow{P_0P} = t \vec{v} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

$$\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad \text{e} \quad t \cdot \vec{v} = (ta, tb, tc)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA NELLO SPAZIO

La retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e di vettore direzione $\vec{v}(a, b, c)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

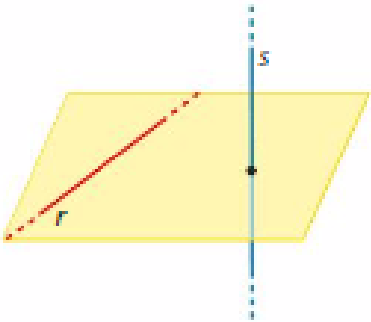
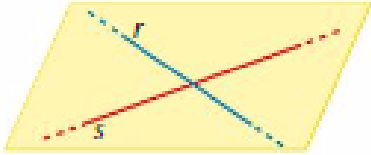
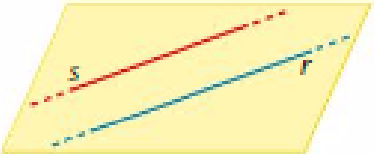
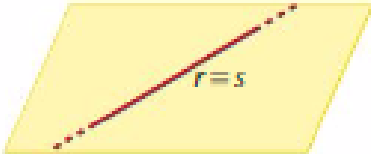
[11.5]

Equazione della retta nello spazio

Se i numeri a , b , c sono diversi da zero, possiamo eliminare il parametro t e ottenere le equazioni cartesiane della retta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Posizione reciproca di due rette nello spazio

Rette sghembe	Rette incidenti
	
<p>I due vettori direzione di r ed s non sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).</p>	<p>I due vettori direzione di r ed s non sono paralleli e le due rette hanno un solo punto in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni ha una e una sola soluzione).</p>
Rette parallele distinte	Rette parallele coincidenti
	
<p>I due vettori direzione di r ed s sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).</p>	<p>I due vettori direzione di r ed s sono paralleli e ciascun punto di r appartiene a s, ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato.</p>

Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

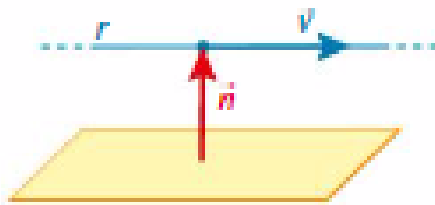
Condizione di parallelismo tra:

- un piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

- una retta di vettore direzione

$$\vec{v}(l, m, n)$$



La retta è parallela al piano se e solo se il vettore $\vec{n}(a, b, c)$ normale al piano è perpendicolare al vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ della retta.

Ne segue la condizione:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

da cui:

$$la + mb + nc = 0$$

Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

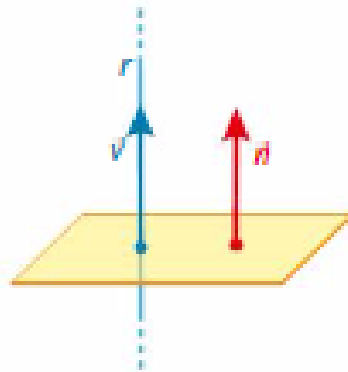
Condizione di perpendicolarità tra:

- un piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

- una retta di vettore direzione

$$\vec{v}(l, m, n)$$



La retta è perpendicolare al piano se e solo se il vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ della retta è parallelo al vettore $\vec{n}(a, b, c)$ normale al piano. Ciò si verifica se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che:

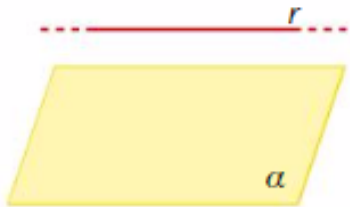
$$l = ka, m = kb, n = kc$$

ovvero, se $a, b, c \neq 0$, quando:

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

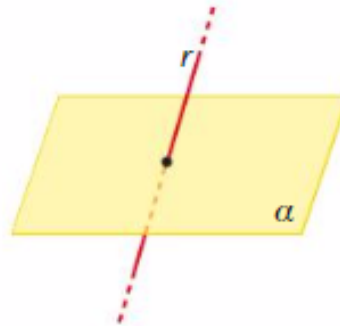
Posizione reciproca tra retta e piano

Retta parallela al piano



Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e inoltre piano e retta non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).

Retta incidente il piano



Il vettore normale al piano **non** è perpendicolare al vettore direzione della retta.

Retta che giace sul piano



Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e tutti i punti della retta appartengono al piano (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato).

Distanza di un punto da un piano

Distanza di un punto da un piano

Dato il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, la **distanza** del punto dal piano (fig. 11.12) è uguale a:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

[11.7]

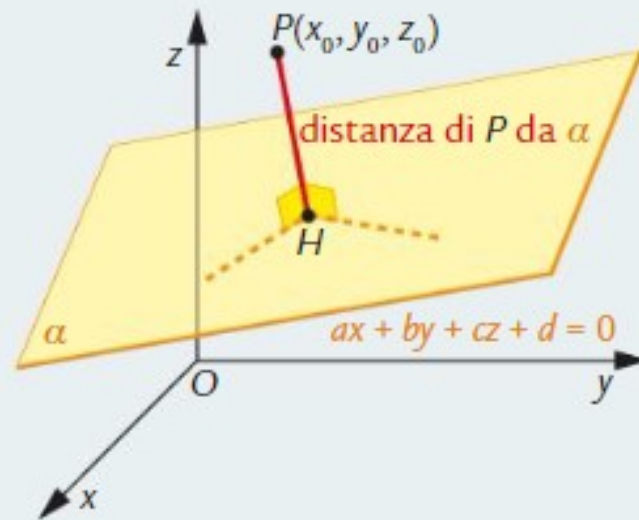
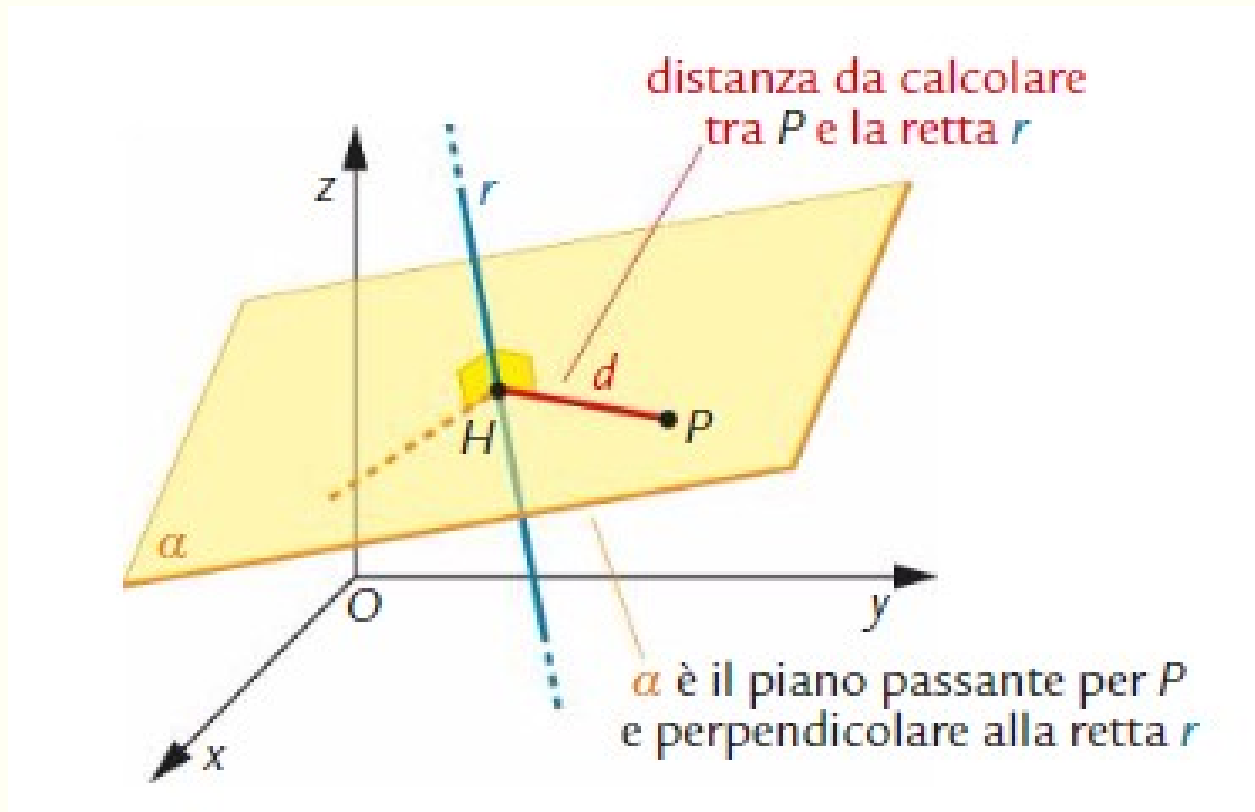


Figura 11.12

Distanza di un punto da una retta



La distanza di P dalla retta r è uguale alla distanza tra P e H , essendo H il punto d'intersezione della retta r con il piano passante per P e perpendicolare a r .

ESERCIZIO Guidato

Determiniamo la distanza del punto $P(2, -1, 5)$ dalla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

- **Scriviamo l'equazione del piano α per P perpendicolare alla retta r**

La retta r ha come vettore direzione $\vec{v}(3, -2, 4)$.

Il piano passante per P e perpendicolare alla retta r deve avere come vettore normale \vec{v} , dunque la sua equazione è:

$$3(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z - 5) = 0$$

ossia:

$$3x - 2y + 4z - 28 = 0$$

ESERCIZIO guidato

- **Determiniamo il punto d'intersezione H della retta r con il piano**

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \\ 3x - 2y + 4z - 28 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione del piano le espressioni di x , y e z fornite dalle equazioni parametriche della retta, otteniamo l'equazione risolvente nell'incognita t :

$$3(-3 + 3t) - 2(-2t) + 4(2 + 4t) - 28 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Sostituendo infine nelle equazioni parametriche della retta il valore $t = 1$, otteniamo le coordinate di H :

$$\begin{cases} x = -3 + 3 \cdot 1 \\ y = -2 \cdot 1 \\ z = 2 + 4 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow H(0, -2, 6)$$

ESERCIZIO guidato

Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(0, 0, 3)$.

- L'equazione generale del piano $ax + by + cz + d = 0$ dipende apparentemente da quattro parametri, a , b , c e d , ma in realtà i parametri essenziali sono solo tre. In questo caso, per esempio, certamente $d \neq 0$ (perché il piano dato non può passare per l'origine); dividendo i due membri dell'equazione per d , otteniamo l'equazione:

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$$

ossia, ponendo $\frac{a}{d} = p$, $\frac{b}{d} = q$, $\frac{c}{d} = r$ si ottiene:

$$px + qy + rz + 1 = 0$$

Per determinare l'equazione del piano è sufficiente perciò determinare i tre parametri p , q ed r .

- Imponendo che i punti A , B e C appartengono al piano di equazione $px + qy + rz + 1 = 0$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} p + 2r + 1 = 0 \\ q + 3r + 1 = 0 \\ 3r + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $p = -\frac{1}{3}$, $q = 0$, $r = -\frac{1}{3}$. Ora puoi facilmente concludere.

$$[x + z - 3 = 0]$$

ESERCIZIO guidato

Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(3, 1, 3)$, perpendicolare e incidente alla retta r

di equazioni
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases} .$$

- Considera sulla retta r un generico punto $Q(5 + 2t, 1 - t, 6 + 3t)$, con $t \in \mathbf{R}$, e imponi che il vettore \overrightarrow{PQ} sia perpendicolare al vettore direzione della retta r .
- Risolvi l'equazione in t che ne scaturisce e determina il punto Q corrispondente al valore di t trovato.
- La retta cercata è quella che passa per i due punti P e Q .

$$\left[x = 3 + \frac{1}{7}k, y = 1 + \frac{13}{14}k, z = 3 + \frac{3}{14}k \right]$$

ESERCIZIO guidato

Verifica che le due rette di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = -k \end{cases}$ sono sghembe.

- Per verificare che le due rette sono sghembe devi verificare che non sono parallele e che non hanno punti d'intersezione.
- Per verificare che non sono parallele è sufficiente verificare che non sono paralleli i loro vettori direzione.
- Per verificare che non hanno punti in comune, devi verificare che il sistema seguente è impossibile:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + k \\ 1 - t = 2k \\ t = -k \end{cases} \quad [*]$$

A tale scopo puoi ricavare t e k da *due* delle tre equazioni del sistema [*] e poi verificare che i valori di t e k trovati **non** soddisfano l'equazione rimanente.