Parte 10. Geometria dello spazio I

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Lo spazio vettoriale V_O^3

1.1 Vettori dello spazio

Definizione *Un vettore è una coppia ordinata* (A, B) *di punti dello spazio, che si denota con* $\overrightarrow{AB}$.

A è detto *punto di applicazione* e B è detto *vertice* del vettore. Si estendono ai vettori dello spazio le definizioni già introdotte per i vettori del piano: direzione, verso e modulo.

Due vettori dello spazio si dicono *equipollenti* se hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo.

Possiamo traslare vettori nel modo usuale:

- dati un vettore $\overrightarrow{AB}$ e un punto A', esiste un unico punto B' tale che $\overrightarrow{A'B'}$ è equipollente ad $\overrightarrow{AB}$. Il vettore $\overrightarrow{A'B'}$ si dice *traslato di* $\overrightarrow{AB}$ *in* A'.

1.2 Lo spazio vettoriale V_O^3

Fissiamo un punto dello spazio O, detto *origine,* e consideriamo l'insieme dei vettori applicati in O. Tale insieme si denota con V_O^3. Quindi

$$V_O^3 = \{\overrightarrow{OP} : P \text{ è un punto dello spazio}\}.$$

Esattamente come nel caso dei vettori del piano, possiamo definire:

- la somma di due vettori (con la regola del parallelogramma),
- il prodotto di un vettore per uno scalare.

Risulta allora che tali operazioni verificano gli assiomi di spazio vettoriale. In conclusione,

Proposizione *V_O^3, con le operazioni appena introdotte, è uno spazio vettoriale.*

2 Dipendenza e indipendenza lineare in V_O^3

In questa sezione daremo un'interpretazione geometrica della dipendenza e indipendenza lineare di vettori di V_O^3, e dimostreremo che V_O^3 ha dimensione 3. Richiamiamo in primo luogo alcuni fatti ben noti.

2.1 Alcuni fatti elementari

I concetti di *retta* e *piano* sono dati a priori.

- Diremo che i punti $P_1, \dots, P_n$ sono *allineati* se appartengono ad una stessa retta.
- Diremo che i punti $P_1, \dots, P_n$ sono *complanari* se appartengono ad uno stesso piano.

Abbiamo le seguenti proprietà.

a) Per due punti distinti passa una e una sola retta.
b) Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.

In particolare:

c) due punti sono sempre allineati,
d) tre punti sono sempre complanari.

Inoltre:

e) per un punto dello spazio passano infinite rette,
f) per due punti dello spazio passano infiniti piani.

Infine

g) se un piano contiene due punti distinti, allora contiene l'intera retta per i due punti.

È chiaro che tre (o più) punti possono essere allineati oppure no, e quattro (o più) punti possono essere complanari oppure no.

2.2 Vettori allineati, vettori complanari

Analogamente al caso del piano, diremo che i vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sono *allineati* (o paralleli) se i punti O, A, B sono allineati.

Proposizione a) *Due vettori $\vec{v}, \vec{w}$ di V_O^3 sono linearmente dipendenti se e solo se sono allineati.*

b) *Se i vettori $\vec{v}, \vec{w}$ non sono allineati, allora esiste un unico piano π contenente sia $\vec{v}$ che $\vec{w}$.*

Dimostrazione. a) è immediata dalla definizione di prodotto per uno scalare.

b) Se $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ non sono allineati allora i punti O, A, B non sono allineati : quindi esiste un unico piano π_0 passante per O, A, B. È evidente che π_0 contiene sia $\vec{v}$ che $\vec{w}$. $\square$

Proposizione *Supponiamo che π sia un piano dello spazio contenente l'origine, e consideriamo l'insieme di tutti i vettori applicati in O, con vertice in un punto di π:*

$$E = \{\overrightarrow{OP} : P \in \pi\}.$$

Allora E è un sottospazio di V_O^3 di dimensione 2, che si identifica con V_O^2.

Dimostrazione. La proposizione è più o meno ovvia: comunque, verifichiamo le proprietà di chiusura. È chiaro che il vettore nullo appartiene a E. Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ appartengono a E allora per ipotesi $P, Q \in \pi$. Il vettore somma si scrive $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OR}$ dove R è il vertice del parallelogramma sui lati OP, OQ. Poiché $O, P, Q \in \pi$, anche $R \in \pi$. Dunque $\vec{v} + \vec{w} \in E$ ed E è chiuso rispetto alla somma. La chiusura rispetto al prodotto per uno scalare è ovvia. Dunque E è un sottospazio. Da quanto detto è evidente che E si identifica con lo spazio vettoriale V_O^2: quindi E ha dimensione 2. $\square$

Diremo che i vettori $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \vec{w} = \overrightarrow{OC}$ sono *complanari* se i punti $0, A, B, C$ sono complanari. In tal caso i vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono tutti contenuti in uno stesso piano.

Teorema *Tre vettori di V_O^3 sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ siano linearmente dipendenti. Allora uno di essi è combinazione lineare degli altri, e possiamo supporre che

$$\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2.$$

Ora, se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono allineati, allora anche $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono allineati, e sono in particolare complanari. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ non sono allineati, allora esiste un unico piano π contenente entrambi i vettori. Dunque $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$, dove $E = \{\overrightarrow{OP} : P \in \pi\}$. Poiché E è un sottospazio di V^3_O, esso contiene tutte le combinazioni lineari di $\vec{v}_1, \vec{v}_2$: quindi contiene anche v_3, e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ appartengono tutti al piano π.

Viceversa, supponiamo che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ siano complanari, tutti contenuti in un piano π. Allora $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in E$, dove E è il sottospazio di V^3_O formato dai vettori con vertice sul piano π. Per la proposizione, E ha dimensione 2 dunque $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti. □

Dimostreremo ora che V^3_O ha dimensione 3. Osserviamo innanzitutto che nello spazio esiste sempre una terna di vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, tutti di modulo unitario, e a due a due ortogonali (diremo allora che la terna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ è *ortonormale*). Infatti, fissiamo un piano π per l'origine, e consideriamo una base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ di π. Prendiamo ora un vettore $\vec{e}_3$ di modulo unitario sulla retta per l'origine perpendicolare a π: è evidente che la terna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ è ortonormale.

Proposizione a) *Lo spazio vettoriale V^3_O ha dimensione* 3.

b) *Una terna di vettori di V^3_O è una base se e solo se i vettori che la compongono non sono complanari.*

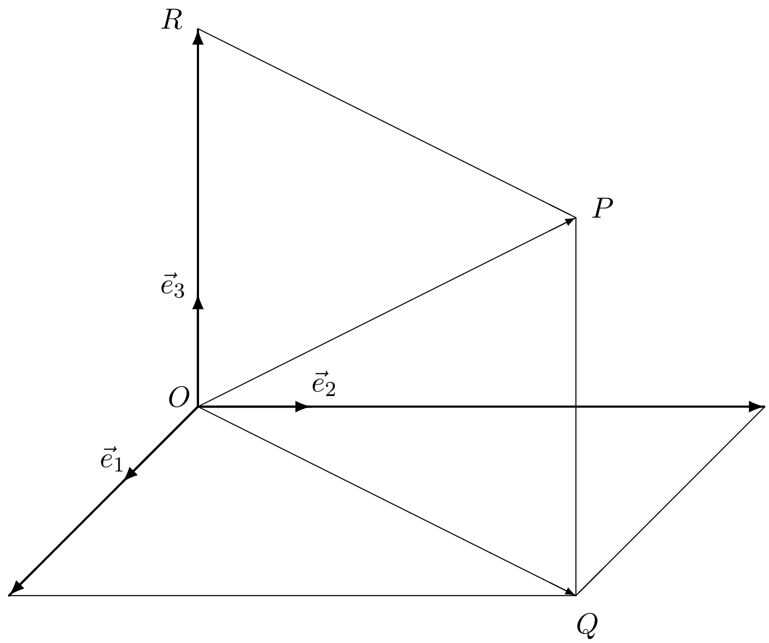
Dimostrazione. a) Per dimostrare che la dimensione di V^3_O è tre basta trovare una base formata da tre vettori. Fissiamo una terna ortonormale $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. È chiaro che questi vettori non sono complanari, dunque sono linearmente indipendenti. Dimostriamo che $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ formano una base: per fare ciò, basta dimostrare che essi generano V^3_O.

Dato un vettore $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, consideriamo il punto Q, piede della perpendicolare condotta da P al piano π contenente $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ (vedi Figura 1). Se $\overrightarrow{OR}$ è il traslato di $\overrightarrow{QP}$ nell'origine, allora, per la regola del parallelogramma:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

inoltre $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ sono ortogonali fra loro. Ora è chiaro che $\overrightarrow{OQ}$ sta sul piano contenente $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, dunque è combinazione lineare $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, e $\overrightarrow{OR}$ sta sulla retta contenente $\vec{e_3}$, dunque è un multiplo di $\vec{e_3}$. Di conseguenza, $\overrightarrow{OP}$ sara' combinazione lineare di $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

b) Dalle proprietà generali degli spazi vettoriali, e dalla parte a), sappiamo che tre vettori di V^3_O formano una base se e solo se sono linearmente indipendenti, quindi, per il teorema, se e solo se non sono complanari. □



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3\end{aligned}$$

Figura 1: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una base di V_O^3

3 Sistema di riferimento cartesiano

Un *sistema di riferimento cartesiano* nello spazio consiste nella scelta di un punto O, detto *origine,* e di una *base ortonormale* di V_O^3. Dato un punto P, possiamo scrivere in modo unico

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

e le coordinate del punto P saranno, per definizione, le coordinate di $\overrightarrow{OP}$. Scriveremo semplicemente

$$P = (x, y, z).$$

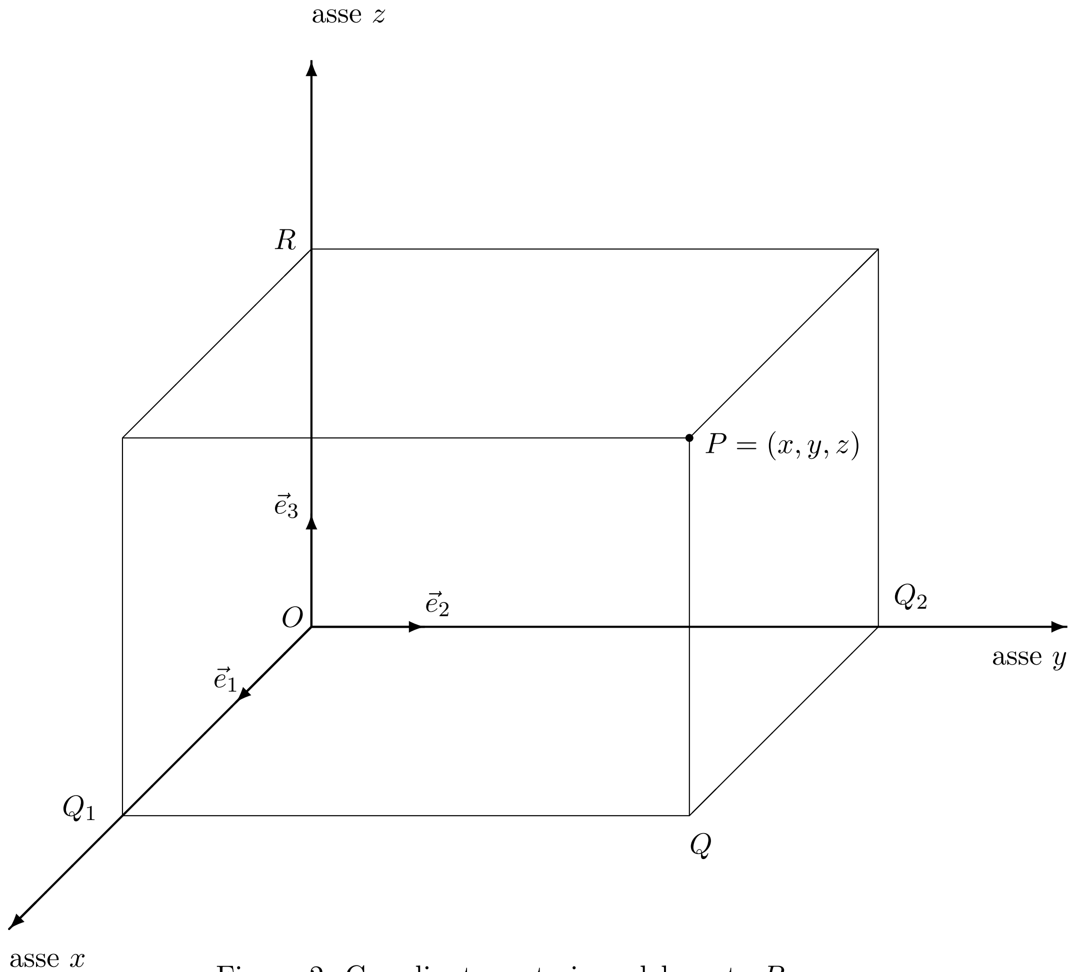


Figura 2: Coordinate cartesiane del punto P

Quindi ogni punto dello spazio si rappresenta con una terna di numeri. L'origine ha coordinate $(0, 0, 0)$. Dalla figura abbiamo che

$$\begin{aligned} x &= \textit{ascissa} \text{ di } P = d(Q_1, O) \\ y &= \textit{ordinata} \text{ di } P = d(Q_2, O) \\ z &= \textit{quota} \text{ di } P = d(R, O) \end{aligned}$$

con l'avvertenza che le distanze sono prese con il segno + o −, a seconda che il punto Q_1, Q_2, R segua (rispettivamente, preceda) l'origine rispetto al verso dell'asse corrispondente. (Il punto P nella figura ha tutte le coordinate positive).
Abbiamo tre *piani coordinati* :

- il piano xy, descritto dall' equazione $z = 0$,
- il piano xz, descritto dall' equazione $y = 0$,
- il piano yz, descritto dall' equazione $x = 0$.

Ovviamente gli assi coordinati sono:

- l'asse x, descritto dalle equazioni $y = z = 0$,
- l'asse y, descritto dalle equazioni $x = z = 0$,
- l'asse z, descritto dalle equazioni $x = y = 0$.

Ad esempio, il punto $(2, 0, -1)$ appartiene al piano xz, mentre $(0, 3, 0)$ appartiene all'asse y. Vedremo poi che ogni piano dello spazio si rappresenta con un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$.

3.1 Coordinate di un vettore applicato in un punto qualunque

D'ora in poi supporremo di aver fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano con origine O e base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ogni vettore applicato nell'origine è quindi individuato dalla terna delle sue coordinate.

Come nel caso del piano, vogliamo ora attribuire coordinate ad un vettore applicato in un punto qualunque dello spazio.

- Dato il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ applicato nel punto A, le coordinate di $\vec{v}$ sono poste per definizione uguali alle coordinate del vettore $\vec{v}_0$, traslato di $\vec{v}$ nell'origine.

Poiché $\vec{v}_0 = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ le coordinate di $\vec{v}$ sono date dalla differenza $B - A$. In altre parole

- Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ allora le coordinate del vettore $\overrightarrow{AB}$ sono

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Dalla definizione è chiaro che

- due vettori sono equipollenti se e solo se hanno coordinate uguali,
- due vettori sono paralleli se e solo se hanno coordinate proporzionali.

Un vettore è identificato dal suo punto di applicazione e dalle sue coordinate. La scrittura

$$\overrightarrow{AB} = (l, m, n)$$

indica l'unico vettore di coordinate (l, m, n) applicato in A: esso unisce il punto di applicazione $A = (x_0, y_0, z_0)$ con il punto $B = (x_0 + l, y_0 + m, z_0 + n)$.

4 Equazioni parametriche di una retta

Vogliamo descrivere una retta con delle equazioni. Una retta dello spazio è determinata da

- un suo punto
- una direzione.

La direzione è specificata da un qualunque vettore parallelo alla retta, che chiameremo *vettore direttore* di r. Le coordinate di un vettore direttore sono dette *parametri direttori* di r.

Procedendo come nel caso del piano, otteniamo equazioni parametriche di una retta.

Proposizione *Una retta del piano si rappresenta con equazioni, dette* parametriche, *del tipo:*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

dove t è il parametro, (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate di un punto della retta, e (l, m, n) sono i parametri direttori della retta.

Esempio La retta di equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ passa per il punto $P_0 = (0, 1, 2)$ e ha parametri direttori $(3, -1, 2)$, dunque è parallela al vettore $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.
$\square$

Rette parallele hanno vettori direttori paralleli; d'altra parte, vettori paralleli hanno coordinate proporzionali. Otteniamo immediatamente:

Proposizione *Due rette sono parallele se e solo se hanno parametri direttori proporzionali.*

Esempio Scrivere equazioni parametriche della retta r' passante per $(1, 2, -1)$ e parallela alla retta $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Soluzione. Basta prendere i parametri direttori di r' uguali a quelli di r, e imporre che per $t = 0$ la retta passi per $(1, 2, -1)$. Otteniamo le equazioni parametriche

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}.$$

$\square$

4.1 Retta per due punti

Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ due punti distinti. Vogliamo scrivere equazioni parametriche della retta per P_1, P_2. Ora il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è parallelo alla retta, dunque i parametri direttori della retta cercata saranno proporzionali alle coordinate del vettore, cioè alla terna $P_2 - P_1$. Esplicitamente:

Proposizione *I parametri direttori della retta per $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sono proporzionali alla terna:*

$$\begin{cases} l = x_2 - x_1 \\ m = y_2 - y_1 \\ n = z_2 - z_1 \end{cases}.$$

Esempio Scriviamo equazioni parametriche della retta passante per i punti $P_1 = (1, 2, 4)$ e $P_2 = (2, 1, 0)$. Possiamo prendere come parametri direttori $l = 1, m = -1, n = -4$; poiché r passa per $(1, 2, 4)$ otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 4t \end{cases}.$$

4.2 Condizione di allineamento di tre punti

Proposizione *I punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ sono allineati se e solo se*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Dimostrazione. Come nel caso del piano, basta osservare che i punti sono allineati se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$, applicati in P_1, sono allineati, dunque linearmente dipendenti. Prendendo le rispettive coordinate, si ha l'asserto. □

Esempio Stabilire se i punti $P_1 = (0, 1, 1), P_2 = (2, 0, 2), P_3 = (4, -1, 3)$ sono allineati.

Soluzione. Si ha

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

dunque i tre punti sono allineati. Trovare le equazioni parametriche della retta che li contiene.

4.3 Intersezione di due rette

Illustriamo il problema con due esempi.

Esempio Stabilire se le rette $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ e $r' = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ si intersecano, e determinare le coordinate dell'eventuale punto d'intersezione.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che i parametri che descrivono le due rette sono fra loro indipendenti, dunque per determinare l'intersezione dobbiamo adottare parametri diversi, diciamo t e s:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + 3t \end{cases}, \quad r' = \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 3 - s \end{cases}.$$

A questo punto uguagliamo le due espressioni per ottenere:

$$\begin{cases} 1 + 2t = s \\ 1 = s \\ 2 + 3t = 3 - s \end{cases}$$

cha ammette l'unica soluzione $s = 1, t = 0$. Dunque le rette si incontrano nel punto $(1, 1, 2)$ ottenuto per $t = 0$ dalle equazioni di r e per $s = 1$ da quelle di s. $\square$

Esempio Stabilire se le rette $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e $r' = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ si intersecano, e determinare le coordinate dell'eventuale punto d'intersezione.

Soluzione. Cambiamo il nome dei parametri: $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, r' : \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 3 \end{cases}$. Uguagliando le coordinate otteniamo però un sistema incompatibile $(z = 0, z = 3)$ dunque r e r' non si intersecano. $\square$

Osservazione Nel piano due rette distinte o sono parallele oppure si incontrano in un punto. Nello spazio questo non è più vero, come è dimostrato da quest'ultimo esempio: infatti, le rette r e r' sono ovviamente distinte, ma non sono né incidenti né parallele (i parametri direttori sono proporzionali, rispettivamente, alle terne $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$).

In effetti, le due rette non possono essere contenute in uno stesso piano, sono cioè *sghembe.* Diremo che due rette dello spazio sono:

- *complanari,* se sono contenute in uno stesso piano,
- *sghembe,* se non sono complanari.

Esercizio Dimostrare che due rette incidenti sono contenute in un unico piano (dunque sono complanari).

Soluzione. Siano r, r' le due rette. Se le rette coincidono, l'asserzione è ovvia. Se non coincidono, le rette si incontrano in un unico punto P. Prendiamo ora un punto $A \neq P$ sulla retta r e un punto $B \neq P$ sulla retta r'. I punti A, B, P non sono allineati, dunque individuano un unico piano π. Ora π contiene due punti distinti di r (cioè P e A), dunque contiene tutta la retta r. Per un motivo analogo π contiene anche r' e si ha dunque la tesi. $\square$

D'altra parte, osserviamo che due rette dello spazio sono parallele se e solo se coincidono, oppure *sono complanari* e non hanno punti comuni.

In conclusione abbiamo la seguente

Proposizione *Due rette sono complanari se e solo se sono incidenti oppure sono parallele.*

Per contrapposizione:

Proposizione *Due rette sono sghembe se e solo se non sono nè incidenti nè parallele.*

5 Equazione cartesiana di un piano

5.1 Condizione di complanarità di quattro punti

Sappiamo che quattro punti del piano possono essere complanari oppure no. Dati $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3), P_4 = (x_4, y_4, z_4)$ essi sono complanari se e solo se i tre vettori (applicati nel punto P_1):

$$\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$$

sono complanari, cioè linearmente dipendenti. Questo avverra' se e solo se le coordinate dei tre vettori, cioè le terne $P_2 - P_1, P_3 - P_1, P_4 - P_1$, sono vettori linearmente dipendenti di $\mathbf{R}^3$. Dunque abbiamo:

Proposizione *I punti* $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3), P_4 = (x_4, y_4, z_4)$ *sono complanari se e solo se*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

5.2 Equazione cartesiana di un piano

Proposizione a) *Un piano* π *dello spazio si rappresenta con un'equazione del tipo:*

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \textit{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

detta equazione cartesiana *di* π.
b) *L'equazione cartesiana del piano per i tre punti* non allineati $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ *è data da:*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima la parte b). Sia $P = (x, y, z)$ il punto generico dello spazio. Allora $P \in \pi$ se e solo se i quattro punti P_1, P_2, P_3, P sono complanari; dalla condizione di complanarita' otteniamo (riordinando le righe) l'annullarsi del determinante in b). Ora per ipotesi si ha:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 2,$$

poiche' P_1, P_2, P_3 non sono allineati. Dunque almeno uno dei minori di ordine due della matrice è non nullo. Sviluppando il determinante lungo la prima riga, l'equazione diventa:

$$ax + by + cz + d = 0$$

con almeno uno fra a, b, c non nullo. Questo dimostra la parte a). □

- Si puo' dimostrare anche il viceversa: le soluzioni di un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c non tutti nulli, individuano un unico piano dello spazio.

Esempio Sono dati i punti $P_1 = (1, 2, 1), P_2 = (0, 1, 3), P_3 = (1, -1, 2)$. Verificare che i tre punti non sono allineati, e trovare l'equazione cartesiana dell'unico piano che li contiene.

Soluzione. Le coordinate di $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono $(-1,-1,2)$ mentre quelle di $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono $(0,-3,1)$. Ora

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix} = 2,$$

dunque i punti non sono allineati. L'equazione del piano è dunque:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1\\ -1 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix} = 0,$$

che diventa $5x + y + 3z - 10 = 0$. $\square$

Esempio Abbiamo visto che le rette $r: \begin{cases} x = 1+2t\\ y = 1\\ z = 2+3t\end{cases}$ e $r' = \begin{cases} x = t\\ y = t\\ z = 3-t\end{cases}$ si intersecano nel punto $P_0 = (1,1,2)$: quindi sono complanari, contenute in un unico piano π.

Vogliamo determinare l'equazione del piano π.

Per fare ciò, è sufficiente trovare un punto $P \neq P_0$ sulla retta r, e un punto $Q \neq P_0$ sulla retta r': il piano π sarà quello passante per P_0, P e Q. Il punto P si può ottenere ponendo $t = 1$ nelle equazioni parametriche di r:

$$P = (3,1,5).$$

Il punto Q si può ottenere ponendo ad esempio $t = 0$ nelle equazioni parametriche di r:

$$Q = (0,0,3).$$

L'equazione del piano π sarà dunque

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$\pi : 3x - 5y - 2z + 6 = 0.$$

In effetti, si verifica che π contiene il punto generico di r, che ha coordinate $(1+2t, 1, 2+3t)$ con $t \in \mathbf{R}$, e contiene anche il punto generico della retta r', che ha coordinate $(t, t, 3-t)$ con $t \in \mathbf{R}$. $\square$

5.3 Forme particolari

Abbiamo già osservato che i tre *piani coordinati* sono definiti dalle equazioni: $x = 0$ (piano yz), $y = 0$ (piano xz), $z = 0$ (piano xy).
Abbiamo immediatamente che

- se $d = 0$ il piano passa per l'origine.

Esempio Il piano $\pi : x - y + 2z = 0$ passa per l'origine.

Esempio L'equazione $2y - z = 0$ non contiene la variabile x, ed è soddisfatta da tutte le terne del tipo $(x, 0, 0)$: dunque il piano $\pi : 2y - z = 0$ contiene tutti i punti dell'asse x. Più in generale:

- se $a = d = 0$ il piano contiene l'asse x. Discutere i casi analoghi ($b = d = 0$ etc.)

6 Intersezione e parallelismo di due piani

I piani π e π' si dicono *paralleli* se coincidono oppure non hanno punti in comune.

Teorema *Dati i piani* $\pi : ax + by + cz + d = 0$ *e* $\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$*, consideriamo la matrice:* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$*. Allora*

a) *I piani* π, π' *sono paralleli se e solo se* $\mathrm{rk}A = 1$.

b) *I piani* π, π' *si incontrano in una retta se e solo se* $\mathrm{rk}A = 2$.

Dimostrazione. I punti comuni a π, π' si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti e A' la matrice completa. Se $\mathrm{rk}A = 2$ allora anche $\mathrm{rk}A' = 2$: il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni. È allora evidente che in tal caso l'intersezione è una retta.
Supponiamo ora $\mathrm{rk}A = 1$. Se $\mathrm{rk}A' = 1$ allora il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni: i piani sono coincidenti. Se invece $\mathrm{rk}A' = 2$ allora il sistema è incompatibile, e i piani sono paralleli e distinti. $\square$

In conclusione, i due piani sono paralleli se e solo se i rispettivi coefficienti sono proporzionali (o uguali):

$$(a', b', c') = k(a, b, c)$$

per qualche $k \neq 0$.

Esempio I piani $\pi : x - y + 2z + 2 = 0$ e $\pi' : 2x - 2y + 4z + 1 = 0$ sono paralleli.

Notiamo che possiamo riscrivere $\pi' : x - y + 2z + \frac{1}{2} = 0$ e dunque π e π' differiscono solo per il termine noto. Questo è sempre vero:

- Le equazioni cartesiane di due piani paralleli possono ridursi a differire solo per il termine noto.

Esempio Il piano generico parallelo a $\pi : x-y+2z+2 = 0$ ha equazione $x-y+2z+k = 0$, dove $k \in \mathbf{R}$, detta *equazione del fascio di piani paralleli a* π.

In generale, fissato un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, il fascio di piani paralleli a π ha equazione:

$$ax + by + cz + k = 0,$$

dove $k \in \mathbf{R}$. Otteniamo cosi' ∞^1 piani, tutti paralleli fra loro.

Esempio Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $(1, -1, 2)$ e parallelo al piano $\pi : x + 3y - z + 5 = 0$.

Soluzione. Scriviamo l'equazione del fascio di piani paralleli a π:

$$x + 3y - z + k = 0.$$

Imponiamo ora il passaggio per il punto $(1, -1, 2)$ e otteniamo $-4 + k = 0$ cioè $k = 4$. Dunque il piano cercato ha equazione $x + 3y - z + 4 = 0$. $\square$

7 Equazioni cartesiane di una retta

Abbiamo visto che due piani non paralleli si incontrano in una retta. Viceversa, una retta è sempre intersezione di due piani non paralleli (in infiniti modi). Abbiamo quindi la seguente

Proposizione *Una retta si può rappresentare come intersezione di due piani non paralleli:*

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

dove $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$. *Le equazioni di tale rappresentazione sono dette* equazioni cartesiane *della retta* r.

Dunque abbiamo due modi per rappresentare una retta:

- con equazioni parametriche,
- con equazioni cartesiane.

Per passare dalle equazioni parametriche alle equazioni cartesiane si elimina il parametro; mentre per passare dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche si risolve il sistema.

Esempio È data la retta $r : \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$.

a) Scrivere le equazioni parametriche di r e calcolare i suoi parametri direttori.

b) Trovare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta r' parallela a r e passante per l'origine.

Soluzione. a) Si verifica che i piani che definiscono r non sono paralleli. Risolvendo il sistema otteniamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

con parametro $t \in \mathbf{R}$, che dànno le equazioni parametriche cercate. I parametri direttori di r sono proporzionali a $(l, m, n) = (-1, -2, 1)$ o anche a $(1, 2, -1)$.

b) Le equazioni parametriche di r' sono date da $r' : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$. Eliminiamo il parametro t per ottenere le equazioni cartesiane:

$$r' : \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}.$$

7.1 Parametri direttori di una retta assegnata con equazioni cartesiane

Sia r una retta descritta con equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Proposizione *I parametri direttori di r sono proporzionali alla terna dei minori di ordine* *due (presi a segni alterni) della matrice dei coefficienti* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, *precisamente:*

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la retta r_0, parallela a r e passante per l'origine, ha equazioni cartesiane:

$$r_0 : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$$

Se Q è un punto di r_0 diverso dall'origine, allora un vettore direttore di r sarà $\overrightarrow{OQ}$, e possiamo prendere come parametri direttori proprio le coordinate di Q. A questo punto basta osservare che in effetti la terna $Q = (l, m, n)$ definita in (1) è una soluzione non nulla del sistema che definisce r_0. $\square$

Esempio Scrivere equazioni parametriche della retta r' passante per $P_0 = (1, -1, 2)$ e parallela alla retta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}.$$

Soluzione. I parametri direttori di r si ottengono dai minori della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sono proporzionali a $(-1, 3, 4)$. La retta cercata ha equazioni parametriche

$$r' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}.$$

8 Parallelismo di una retta e un piano

Data una retta r e un piano π abbiamo tre possibilità:

- r e π si incontrano in un punto: diremo allora che sono *incidenti.*
- r e π non hanno intersezione.
- r è interamente contenuta in π.

Negli ultimi due casi, diremo che la retta r è *parallela* al piano π.

È chiaro che, se r è parallela a π e se π contiene un punto di r allora π contiene l'intera retta r.

Proposizione *Il piano $\pi : ax+by+cz+d=0$ e la retta r di parametri direttori (l,m,n) sono paralleli se e solo se:*

$$al + bm + cn = 0.$$

- Nell'equazione di un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ la terna (a, b, c) è detta la terna dei *parametri di giacitura* del piano. Dunque la proposizione puo' essere riformulata come segue.

Proposizione *Un piano di parametri di giacitura (a, b, c) e una retta di parametri direttori (l, m, n) sono paralleli se e solo se*

$$al + bm + cn = 0.$$

Dimostrazione. Sia r_0 la retta parallela a r passante per l'origine, e sia π_0 il piano parallelo a π passante per l'origine. Allora r è parallela a π se e solo se r_0 è contenuta in π_0. Dalla definizione di parametri direttori, sappiamo che il punto (l, m, n) appartiene a r_0; d'altra parte, l'equazione del piano π_0 è data da $ax + by + cz = 0$. Dunque $r_0 \subseteq \pi_0$ se e solo se $(l, m, n) \in \pi$, cioè se e solo se $al + bm + cn = 0$. $\square$

Esempio Stabilire se la retta $r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - 3y + z = 0$ sono paralleli o incidenti.

Soluzione. I parametri direttori di r sono $(1, 1, 0)$ mentre i parametri di giacitura di π sono $(1, -3, 1)$. La condizione di parallelismo $al + bm + cn = 0$ non è verificata dunque retta e piano si incontrano in un punto. Per trovare il punto, basta sostituire le equazioni parametriche della retta nell'equazione del piano e si osserva che la retta incontra il piano per il valore $t = -\frac{5}{2}$. Dunque il punto d'intersezione ha coordinate $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. $\square$

8.1 Fascio di piani di asse una retta

Data una retta in equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

il piano generico contenente r ha equazione:

$$\pi : h(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

con h, k parametri reali, non entrambi nulli. L'espressione è anche detta *fascio di piani di asse r.*

Osservazione *Data una retta r e un punto P non appartenente a r, esiste uno ed un solo piano contenente r e P.*

Infatti, siano A e B due punti distinti di r. Siccome A, B e P non sono allineati, esiste uno ed un solo piano passante per A, B, P. Tale piano contiene sia r che P.

Esempio Determinare l'equazione cartesiana dell'unico piano passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e contenente la retta $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$.

Soluzione. L'equazione del fascio di piani di asse r è: $h(x + y - 1) + k(3x + y - z) = 0$. Imponiamo il passaggio per $P = (1, 1, 1)$ e otteniamo la condizione:

$$h + 3k = 0.$$

Possiamo dunque prendere $k = 1$ e di conseguenza $h = -3$. Il piano cercato è dunque:

$$2y + z - 3 = 0.$$

Sembrerebbe che il problema ammetta piu' di una soluzione. In realta' non e' cosi', poiche' prendendo un'altra soluzione $h = -3k$ con $k \neq 0$ avremmo ottenuto il piano $2ky + kz - 3k = 0$ che coincide con il piano trovato in precedenza (basta dividere per k ambo i membri).

In effetti, potevamo scrivere il fascio di piani di asse r nella *forma ridotta* :

$$x + y - 1 + k(3x + y - z) = 0,$$

che ha il vantaggio di dipendere dal solo parametro k. L'unico problema è che nel fascio ridotto manca un piano, precisamente $3x + y - z = 0$: infatti tale piano non si ottiene per alcun valore di $k \in \mathbf{R}$.
Quindi si poteva procedere anche nel modo seguente: si cerca la soluzione fra i piani del fascio ridotto; se non la troviamo, significa che il piano cercato è quello che manca.

Infine, per risolvere il problema si poteva procedere anche nel modo seguente. Scegliamo due punti su r, ad esempio $A = (1, 0, 3), B = (0, 1, 1)$. Il piano cercato è l'unico contenente A, B, P, e ha equazione $2y + z - 3 = 0$.

Esempio Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente la retta $r_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ e parallelo alla retta $r_2 : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ z + 4 = 0 \end{cases}$

Soluzione. Primo metodo. Scriviamo l'equazione del fascio ridotto di piani di asse r_1, cioè $x + y - 1 + k(3x + y - z) = 0$. L'equazione si scrive anche cosi':

$$\pi : (1 + 3k)x + (1 + k)y - kz - 1 = 0.$$

Si trova facilmente che i parametri direttori di r_2 sono proporzionali a $(-1, -1, 0)$ ovvero a $(l, m, n) = (1, 1, 0)$. Dobbiamo ora imporre che il piano del fascio π sia parallelo a r_2:

$$1 + 3k + 1 + k = 0,$$

da cui $k = -\frac{1}{2}$. Sostituendo, troviamo che il piano cercato è

$$x - y - z + 2 = 0.$$

Secondo metodo. Partiamo dall'equazione generica di un piano $ax + by + cz + d = 0$, e determiniamo i coefficienti a, b, c e il termine noto d.

1. Prendiamo due punti di r_1, ad esempio $A = (1, 0, 3)$ e $B = (0, 1, 1)$.
2. Imponiamo che A appartenga al piano: $a + 3c + d = 0$
2. Imponiamo che B appartenga al piano: $b + c + d = 0$
3. Imponiamo che il piano sia parallelo a r_2 (di parametri direttori $(1, 1, 0)$): $a + b = 0$.

Dunque a, b, c, d sono soluzione del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} a + 3c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette ∞^1 soluzioni, tutte proporzionali alla soluzione

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases}$$

e il piano cercato è $x - y - z + 2 = 0$. $\square$

8.2 Stella di piani di centro un punto

L'insieme di tutti i piani passanti per un punto P_0 è detto *la stella di piani di centro* P_0. Si vede subito che un piano di tale insieme ha equazione del tipo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$. In particolare, ci sono ∞^2 piani passanti per un punto dato (la terna (a, b, c) può essere alterata per un fattore di proporzionalità non nullo).

8.3 Piano parallelo a due direzioni

Supponiamo ora di fissare due rette dello spazio r, r', e un punto P_0.

Osservazione *Se le rette r, r' non sono parallele, allora esiste un unico piano parallelo a entrambe le rette e passante per P_0.*

Infatti, siano r_0 e r'_0 le rette per l'origine parallele, rispettivamente, a r e r'. Allora r_0, r'_0 sono incidenti nell'origine, e definiscono un piano π_0 che le contiene entrambe. Ora il piano π parallelo a π_0 e passante per P_0 soddisfa chiaramente i requisiti.

Proposizione *Siano date le rette r, r' non parallele, di parametri direttori $(l, m, n), (l', m', n')$, rispettivamente. Allora il piano per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ parallelo a r e r' ha equazione*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostrazione. I vettori $\vec{v}, \vec{w}$ di coordinate (l, m, n) e (l', m', n'), applicati in P_0, sono entrambi contenuti in π. Se $P = (x, y, z)$ è un punto di π anche il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è contenuto in π. I tre vettori $\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{P_0P}$ sono dunque complanari, e di conseguenza linearmente dipendenti. Le coordinate di tali vettori dovranno essere linearmente dipendenti, e quindi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

□

Esempio Trovare l'equazione del piano passante per $P_0 = (1, 0, 0)$ e parallelo a entrambe le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ e $r' = \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Soluzione. I parametri direttori di r si ottengono immediatamente: $(l, m, n) = (1, 1, 2)$. Quelli di r' sono $(2, 0, 1)$ dunque l'equazione del piano cercato è:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè $x + 3y - 2z - 1 = 0$.

Metodo alternativo. Partiamo dal piano generico $ax + by + cz + d = 0$.

1. Imponiamo il passaggio per $P_0 : a + d = 0$.
2. Imponiamo il parallelismo alla retta $r : a + b + 2c = 0$.
3. Imponiamo il parallelismo alla retta $r' : 2a + c = 0$.

Il piano si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$ che ha ∞^1 soluzioni $a = -t, b = -3t, c = 2t, d = t$, con $t \in \mathbf{R}$, tutte proporzionali alla soluzione $a = 1, b = 3, c = -2, d = -1$ dunque il piano cercato è

$$x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

$\square$