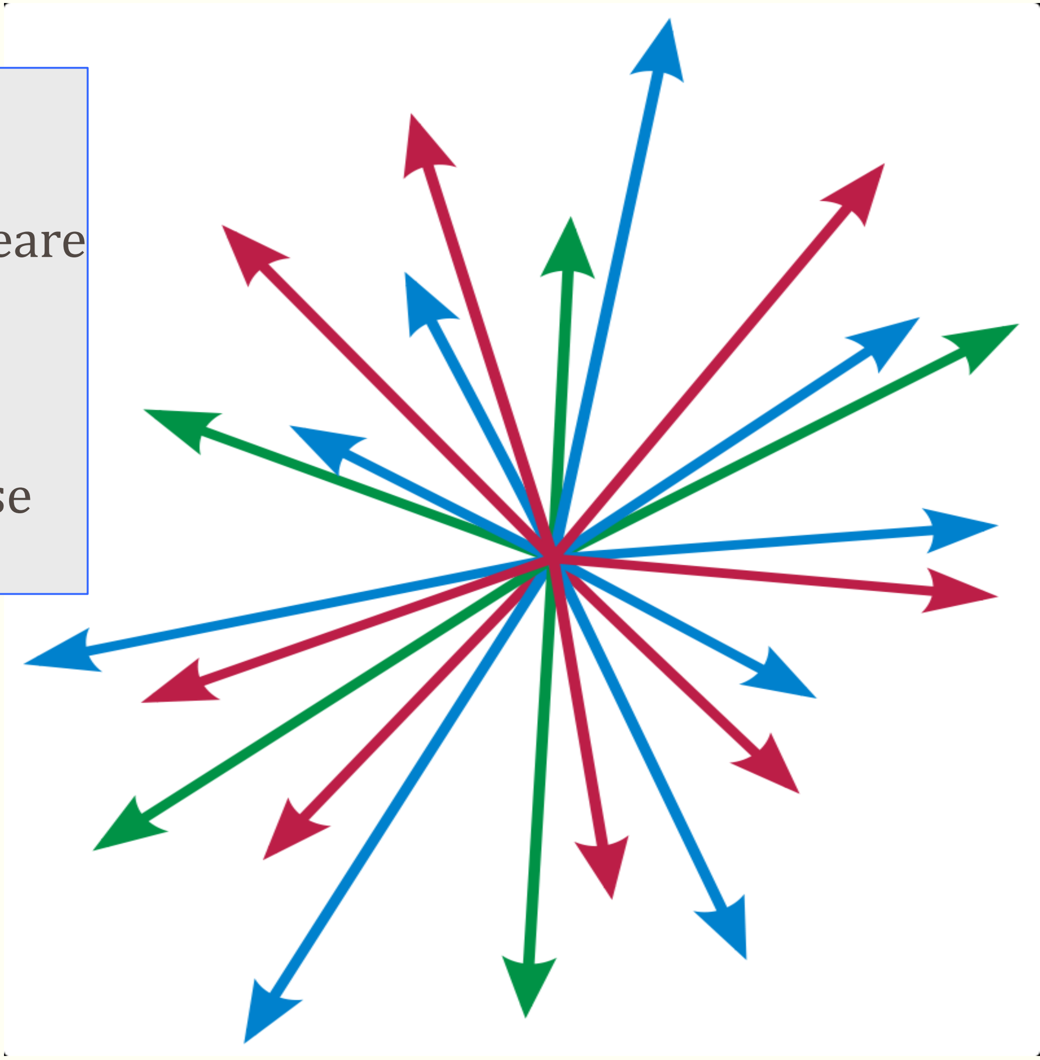
SPAZI VETTORIALI

Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/2020
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Indice delle sezioni

- Spazi vettoriali
- Prime proprietà
- Dipendenza e indipendenza lineare
- Generatori
- Basi
- Sottospazi
- Teorema di esistenza di una base
- Dimensione



Spazi vettoriali

Definizione
Sia V un insieme non vuoto, i cui elementi saranno chiamati vettori, dotato di due operazioni:
a. la somma, che associa a due vettori $u;\ v \in V$ un terzo vettore $u + v \ \in V$,
b. il prodotto di un vettore per uno scalare, che associa al vettore $v \in V$ e allo scalare $k \in R$ un altro vettore denotato kv.

V si dice uno spazio vettoriale reale se le suddette operazioni verificano le seguenti proprietà:

1. $(u + v) + w = u + (v + w) \forall\, u; v; w \in V$.
2. $u + v = v + u \,\forall\, u;\ v \in V$.
3. Esiste un vettore $O \in V$, detto vettore nullo, tale che $v + O = v$, $\forall\, v \in V$
4. Per ogni vettore $v \in V$ esiste un unico vettore $-v$, detto opposto di v, tale che $v + (-v) = -v + v = O$.
5. Si ha $1v = v, \forall\, v \in V$.
6. $h(kv) = (hk)v, \forall h;\ k \in R\ e \,\forall\, v \in V$
7. $(h + k)v = hv + kv, \forall h;\ k \in R\ e \,\forall\, v \in V$.
8. $h(u + v) = hu + hv, \forall\, h \in R\ e\, \forall u;\ v \in V$.

Spazi vettoriali: prime proprietà

Vogliamo osservare alcune proprietà comuni a tutti gli spazi vettoriali. Per dimostrare queste proprietà, dobbiamo usare solamente gli assiomi 1)-8) che definiscono uno spazio vettoriale.
Iniziamo dalla cosiddetta legge di cancellazione della somma.

Proposizione
Siano u, v, w vettori dello spazio vettoriale V . Allora si ha

$$u + v = u + w \; se \; e \; solo \; se \; v = w:$$

In particolare $u + v = u$ se e solo se $v = O$.

Dimostrazione.
Supponiamo che $u + v = u + w$. Dobbiamo dimostrare che $v = w$.
Sommando ad ambo i membri l'opposto di u otteniamo:

$$-u + (u + v) = -u + (u + w)$$

Dalla proprietà associativa segue
$(-u + u) + v = (-u + u) + w$ e quindi $O + v = O + w$.
Dalla proprietà che definisce il vettore nullo concludiamo che

$$v = w$$

Spazi vettoriali: prime proprietà

Proposizione
In uno spazio vettoriale V valgono le seguenti proprietà:
a) Per ogni $v \in V$ si ha $0v = O$.
b) Per ogni $h \in R$ si ha $hO = O$.
c) Per ogni $v \in V$ si ha $(-1)v = -v$.

Proposizione
Siano $h \in R$ e $v \in V$. Se $hv = O$ allora $h = 0$ oppure $v = O$.

Dimostrazione:
Supponiamo
$$hv = 0$$
Se h=0 abbiamo finito. Se h è diverso da zero, moltiplicando ambo i membri per h^{-1} otteniamo
$$h^{-1}(hv) = h^{-1}0 = 0$$
Ma per le proprietà 5) e 6) si ha
$$h^{-1}(hv) = (h^{-1}h)v = 1v = v$$
Dunque v=0

Dipendenza e indipendenza lineare

Dati k vettori $v_{1,} \dots \dots, v_k$ di uno spazio vettoriale V e k scalari $a_{1,\dots\dots,}a_k \in$ R il vettore:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k$$

e detto combinazione lineare di $v_{1,} \dots \dots, v_k$ a coefficienti $a_{1,\dots\dots,}a_k$

ESEMPIO

Nello spazio vettoriale dei polinomi R[x], siano $p_1(x) = 1 - x + 3x^3$ e $p_2(x) = 4x + x^2$

Allora

$$4p_1(x) - 3p_2(x) = 4 - 16x - 3x^2 + 12x^3$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione

a) I vettori $v_{1,}\ldots\ldots, v_k$ di uno spazio vettoriale V si dicono linearmente dipendenti se esiste una relazione di dipendenza lineare tra di essi; se cioè esiste una combinazione lineare:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k$$

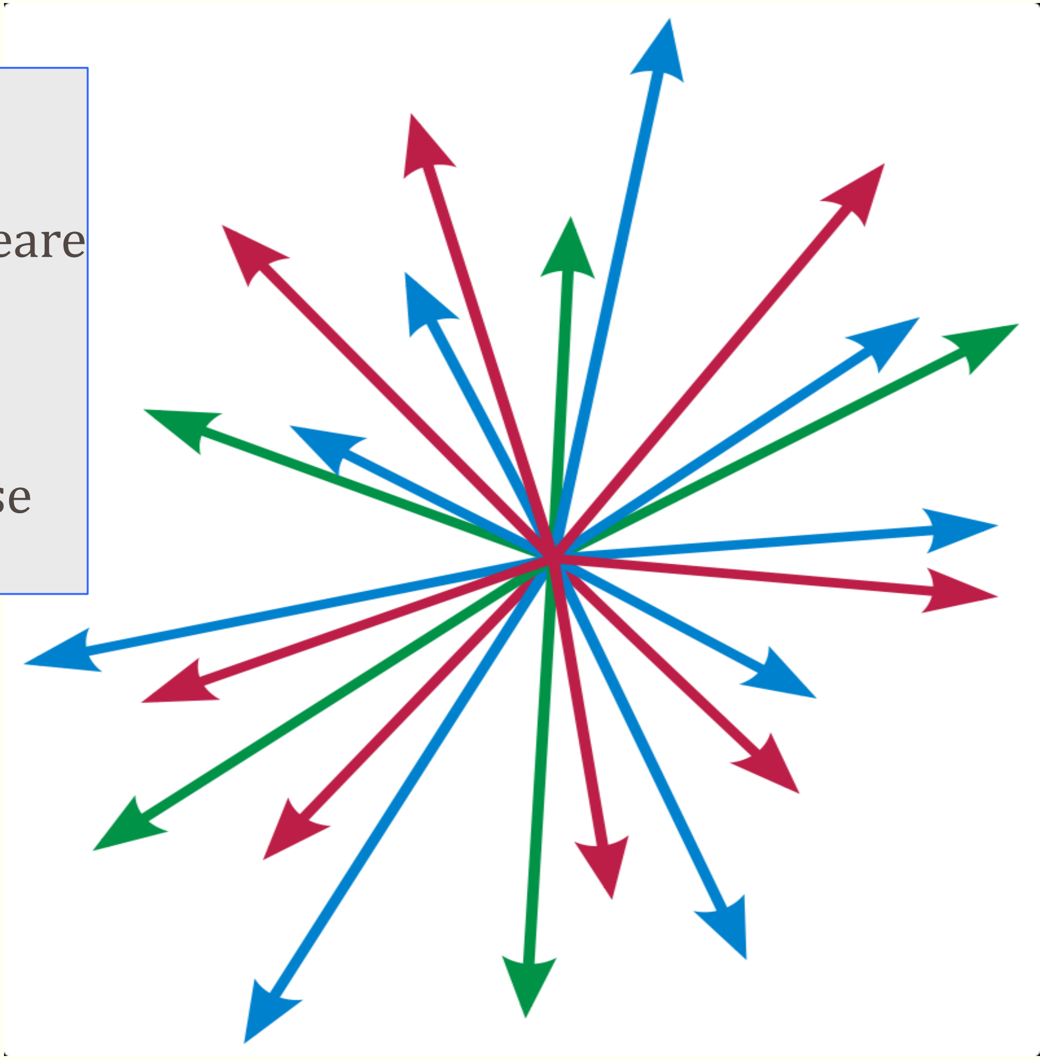
con almeno un coefficiente non nullo.

b) I vettori $v_{1,}\ldots\ldots, v_k$ si dicono linearmente indipendenti se non c'è alcuna relazione di dipendenza lineare tra di essi, se cioè l'uguaglianza

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k = 0$$

è verificata solo quando tutti i coefficienti sono nulli.

Indice delle sezioni



Dipendenza e indipendenza lineare

Proposizione
I vettori $v_1, \dots\dots, v_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione
Supponiamo in primo luogo che $v_1, \dots\dots, v_k$ siano linearmente dipendenti: dunque esiste una relazione

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k = 0$$

con almeno uno dei coefficienti, diciamo a_i, diverso da zero. Possiamo risolvere rispetto a v_i, dividendo per a_i e portando tutto il resto a secondo membro:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_1} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_1} v_{i+1} - \cdots - \frac{a_k}{a_1} v_k$$

Dunque v_i risulta combinazione lineare dei rimanenti vettori.

Viceversa, supponiamo che uno dei vettori, ad esempio il primo, sia combinazione lineare degli altri:

$$v_1 = b_2 v_2 + \cdots + b_k v_k$$

Ma allora otteniamo la relazione di dipendenza lineare

$$v_1 - b_2 v_2 - \cdots - b_k v_k = 0$$

(si noti che il coefficiente di v1 e 1, dunque non nullo) e quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

Dipendenza e indipendenza lineare

Generatori

Definizione
Diremo che i vettori $v_{1,}\dots\dots, v_k$ di uno spazio vettoriale V generano V se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di $v_{1,}\dots\dots, v_k$.
Diremo anche che $\{v_1, \dots\dots, v_k\}$ è un insieme di generatori di V .

Definizione
Lo spazio vettoriale V si dice finitamente generato se ammette un insieme finito di generatori.

Proposizione
Aggiungendo vettori ad un insieme di generatori, otteniamo ancora un insieme di generatori.

Basi

Definizione
Un insieme finito di vettori $\{v_1, \dots \dots, v_k\}$ si dice una base di V se:
a) è un insieme di generatori,
b) è un insieme linearmente indipendente.

In altre parole, una base è un insieme di generatori formato da vettori linearmente indipendenti.

Basi

Teorema
I vettori $v_{1,} \ldots \ldots, v_k$ formano una base di V se e solo se ogni vettore di V si scrive, in modo unico, come combinazione lineare di $v_{1,} \ldots \ldots, v_k$.

Dimostrazione. Prima parte.
Supponiamo che $v_1, \ldots \ldots, v_k$ formino una base di V . Poiché i vettori generano V per ipotesi, potremo scrivere ogni vettore $v \in V$ nella forma:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k$$

con $a_{1, \ldots \ldots,} a_k \in R$
Dimostriamo che i coefficienti $a_{1, \ldots \ldots,} a_k$ di tale combinazione lineare sono unici. Supponiamo infatti che v si possa esprimere in altro modo, diciamo:

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \quad + b_k v_k$$

Uguagliando le due espressioni otterremo

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \quad + b_k v_k$$

Dunque:

$$(a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \quad + (a_k - b_k) v_k = 0$$

Poiche i vettori $v_1, \ldots \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, dobbiamo avere necessariamente $(a_i - b_i) = 0, \forall i$ e dunque $a_i = b_i$

Basi

Dimostrazione. Seconda parte.

Supponiamo ora che ogni vettore di V si scriva, in modo unico, come combinazione lineare di $v_1, \dots\dots, v_k$. Dimostriamo che tali vettori formano una base. Ora, è immediato che essi generano V ; occorre solo dimostrare che essi sono linearmente indipendenti. Supponiamo allora che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_k v_k = 0$$

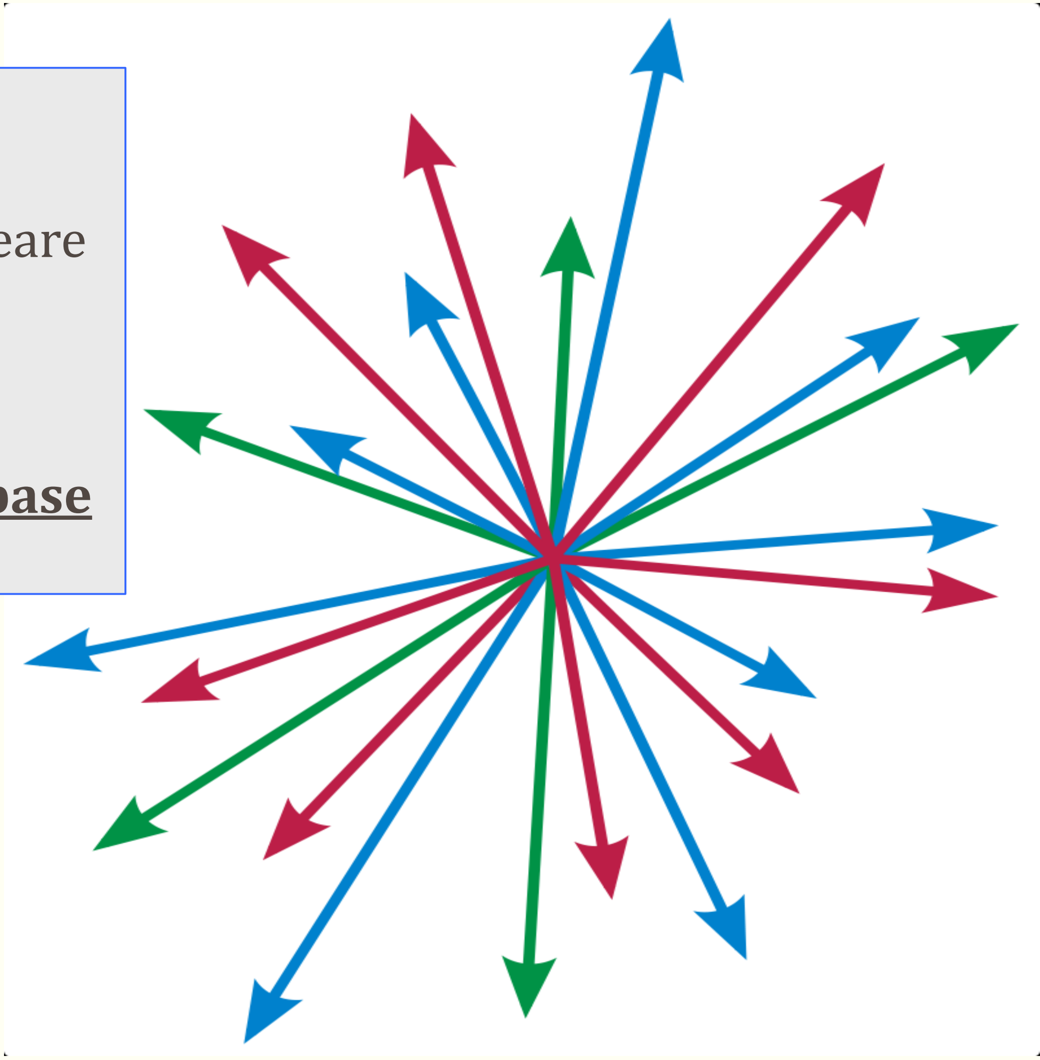
Si ha anche, banalmente:

$$0v_1 + 0v_2 + \quad + 0v_k = 0$$

e quindi, dalla proprieta di unicita, otteniamo $a_1, \dots\dots, a_k = 0$.

Dunque i vettori $v_1, \dots\dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Indice delle sezioni



Basi

Esempio

Dato il sistema

$$\boldsymbol{S}\colon \begin{cases} \boldsymbol{x - y + z + 2t = 0} \\ \boldsymbol{2x - 2y - z - 2t = 0} \end{cases}$$

Trovare una base di $\boldsymbol{E = Sol(S)}$

Soluzione

Notiamo che E è un sottospazio di R^4

Risolvendo il sistema otteniamo ∞^2 soluzioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + z = y - 2t} \\ \boldsymbol{2x - z = 2y + 2t} \end{cases}$$

Da cui

$$x = -y, z = -2t$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : y, t \in R \right\}$$

Il vettore generico di E si scrive:

Basi

Soluzione

Il vettore generico di E si scrive:

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque i due vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generano E. Essi sono anche linearmente indipendenti e dunque formano una base di E.

Sottospazi

Definizione

Un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V si dice un sottospazio di V se verifica le seguenti proprietà:

a) Il vettore nullo appartiene a E.

b) Se $u, v \in E$ allora $(u + v) \in E$.

c) Se $u \in E$ e $k \in R$ allora $ku \in E$.

Le proprietà b) e c) si esprimono dicendo anche che un sottospazio e chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare.

Sottospazi

Sottospazio generato da un insieme di vettori

Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots\dots, v_k$ vettori assegnati di V.
Consideriamo l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots\dots, v_k$:

$$L[v_1, \dots\dots, v_k]=\{a_1v_1 + a_2v_2 + \quad +a_kv_k : a_{1, \dots\dots,} a_k \in R\}$$

Si verifica facilmente che $L[v_1, \dots\dots, v_k]$ è un sottospazio di V, detto sottospazio generato da $v_1, \dots\dots, v_k$.

Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

1) I vettori $v_1, \dots\dots, v_k$ generano V
2) $V = L[v_1, \dots\dots, v_k]$

È evidente che se $V = L[v_1, \dots\dots, v_k]$ e se i generatori $v_1, \dots\dots, v_k$ sono anche linearmente indipendenti, allora essi formano una base di V.

Teorema di esistenza di una base

Teorema
Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora V ammette almeno una base.

Dimostrazione.
Per ipotesi V è generato da un certo numero (finito) di vettori:

$$V = \mathrm{L}[v_1, \dots\dots, v_k]$$

Se i generatori sono linearmente indipendenti, allora essi formano una base e abbiamo finito.
Altrimenti, almeno uno di essi e una combinazione lineare degli altri: supponiamo che tale vettore sia v_k (questo non lede la generalità).
Possiamo dunque eliminarlo dalla lista, e $V = \mathrm{L}[v_1, \dots\dots, v_{k\pm1}]$
Se $v_1, \dots\dots, v_{k\pm1}$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base.
Altrimenti, possiamo scartare qualche altro generatore, e così via.
Ora non possiamo scartare tutti i generatori, perché per ipotesi V contiene almeno un vettore non nullo. Dunque prima o poi ci dobbiamo fermare, e ci fermiamo esattamente quando i generatori rimasti sono linearmente indipendenti. Tali generatori formano la base cercata.

Dimensione

Uno spazio vettoriale ammette infinite basi diverse. In questa sezione dimostreremo che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori, ciò che ci permetterà di definire la dimensione di V come il numero di vettori di una sua base qualunque.

Lemma
Supponiamo che i vettori $v_1, \ldots\ldots, v_m$ siano linearmente indipendenti, e che i vettori $w_1, \ldots\ldots, w_n$ generino V . Allora si ha necessariamente $m \leq n$.

Proposizione
Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori.

Dimostrazione.
Siano $B = \{v_1, \ldots\ldots, v_m\}$ e $B' = \{w_1, \ldots\ldots, w_n\}$ due basi di V . Vogliamo dimostrare che $m = n$:
Per ipotesi, i vettori $v_1, \ldots\ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti e i vettori $w_1, \ldots\ldots, w_n$ generano V : dal lemma otteniamo $m \leq n$. D'altra parte è anche vero che i vettori $v_1, \ldots\ldots, v_m$ generano V , e i vettori $w_1, \ldots\ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti, dunque sempre grazie al lemma otteniamo $m \geq n$. La conclusione e che $m = n$.

Dimensione

Definizione
Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Definiamo dimensione di V il numero di vettori di una qualunque base di V (tale numero e sempre lo stesso).

Per calcolare la dimensione di uno spazio vettoriale, basta quindi:

- trovare una base di V ,
- contare i vettori che la compongono.

Teorema
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Allora:
a) Non esistono più di n vettori linearmente indipendenti.
b) Dati comunque k vettori, con $k < n$, essi non possono generare V .
c) n vettori linearmente indipendenti sono anche generatori (quindi formano una base).
d) n vettori generatori sono anche linearmente indipendenti (quindi formano una base).