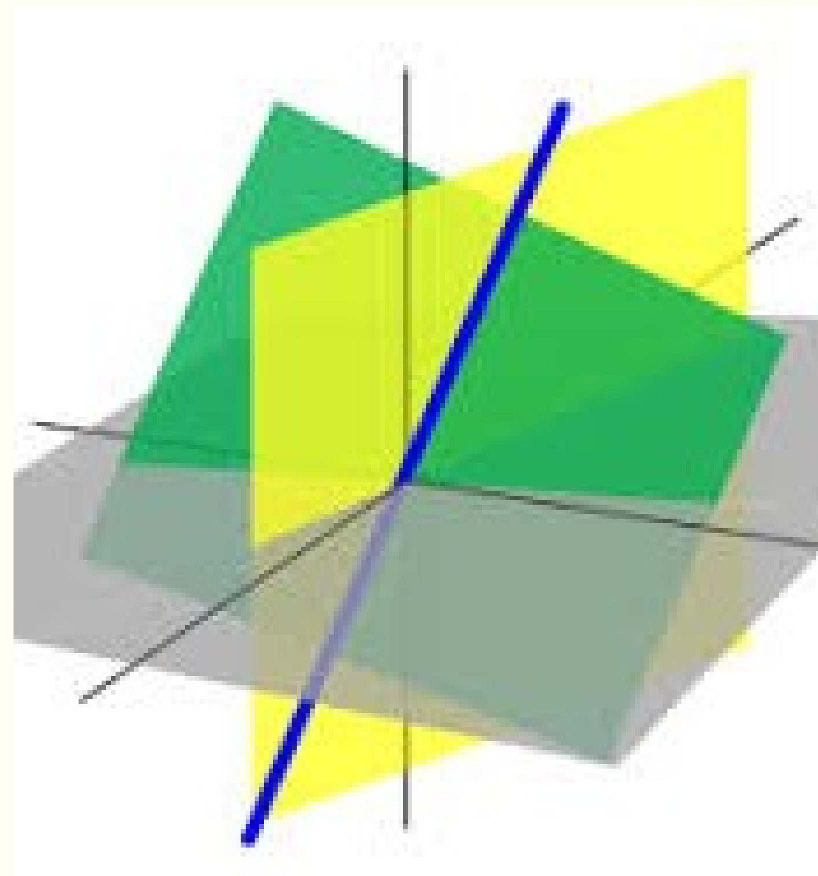
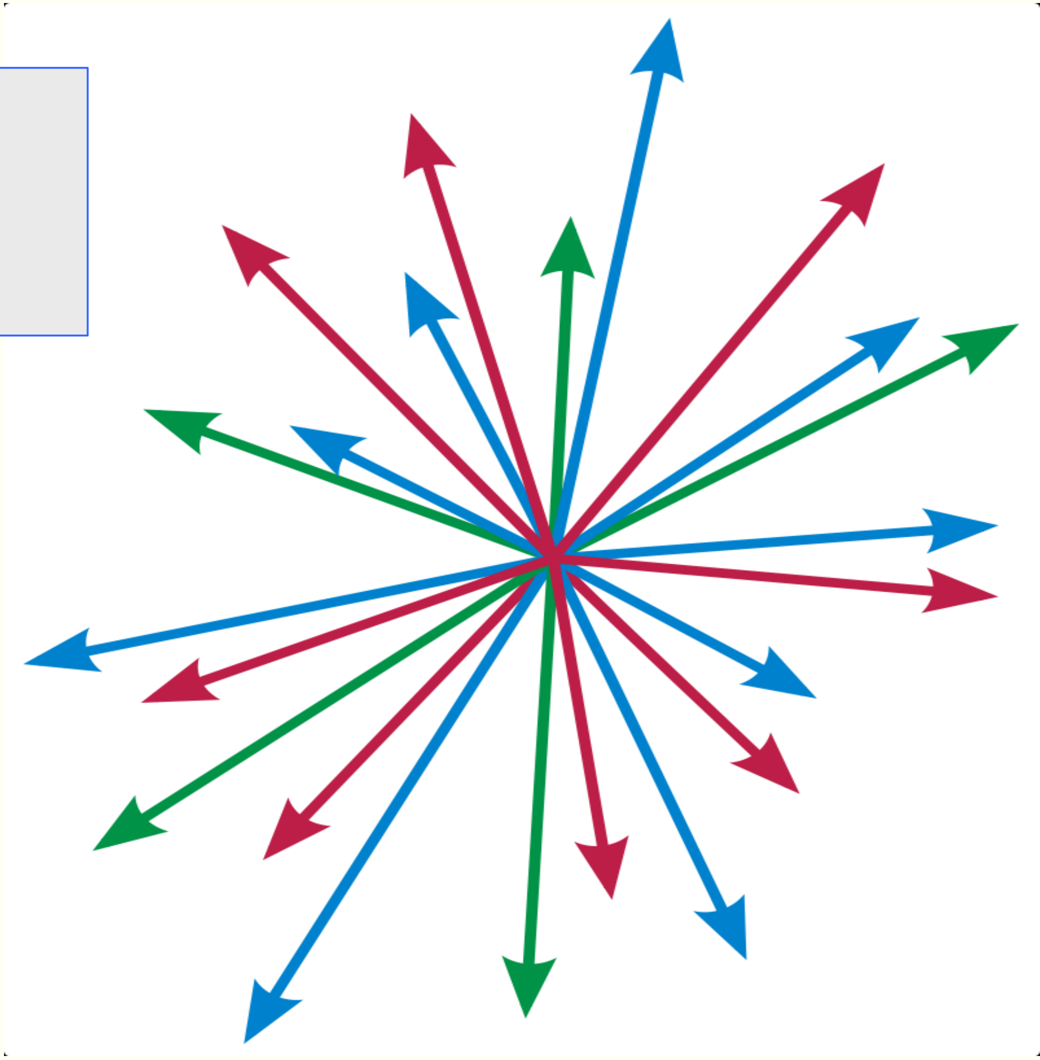
SPAZI VETTORIALI
(II PARTE)



Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/2020
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Indice delle sezioni



Sottospazi di R^n

Proposizione
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n ed E un suo sottospazio.
Allora: $dimE \leq n$:
Inoltre $dimE = n$ se e solo se $E = V$.

Dimostrazione

Sia $v_1, \ldots \ldots, v_k$ una base di E, cosicché dimE = k. I k vettori della base di E sono linearmente indipendenti dunque k n (perché n e il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di V). Supponiamo che dimE = n = dimV : allora esiste una base di E con n vettori. Essendo tali vettori linearmente indipendenti, e in numero pari alla dimensione di V , essi formano una base anche di V . In conclusione, V ed E hanno in comune una base, dunque coincidono.

Quindi, l'unico sottospazio di V che ha dimensione massima (cioè pari a quella di V) è tutto lo spazio. Ricordiamo anche il sottospazio nullo $E = \{0\}$ composto dal solo vettore nullo, che per convenzione ha dimensione zero.

Dimensione e rango

Veniamo ora al seguente problema: dato un sottospazio E di R^n, descritto con un insieme di generatori, calcolare la sua dimensione e trovare una base.

Lemma

I vettori colonna $v_1, \ldots\ldots, v_k$ di una matrice A sono linearmente indipendenti se e solo se $rkA = k$.

b) Sia A una matrice, e sia A' la matrice ottenuta da A aggiungendo la colonna v_{k+1}.

Allora: v_{k+1} è combinazione lineare delle colonne precedenti se e solo se $rkA' = rkA$.

Quindi, aggiungendo via via colonne che sono combinazioni lineari delle precedenti, il rango non cambia. Il teorema che segue da una ulteriore caratterizzazione del rango di una matrice.

Dimensione e rango

Teorema
Sia A una matrice m n, con vettori colonna $v_{1,} \dots\dots, v_n \in R^m$. Allora:

$$rkA \ = \ dimL[v_{1,} \dots\dots, v_n]:$$

Cioè, il rango di A uguaglia la dimensione del sottospazio di Rm generato dalle colonne di A. Inoltre, una base di $L[v_{1,} \dots\dots, v_n]$è data dalle colonne corrispondenti ad un minore di ordine massimo di A con determinante non nullo.

Il sottospazio E $= L[v_1, \dots\dots, v_n]$: ha generatori $v_1, \dots\dots, v_n$ per ipotesi. Sappiamo che ogni insieme di generatori contiene una base, ottenuta scartando (eventualmente) i generatori inutili. Riordinando, possiamo supporre che una base di E sia formata dalle prime k colonne $v_1, \dots\dots, v_k$. Quindi tutte le colonne successive saranno combinazione lineare di $v_1, \dots\dots, v_k$ e aggiungendole via via, il rango rimarrà costante, per la parte b) del lemma. Dunque, abbiamo:

$$dimE \ = \ k \ = \ rango\ della\ matrice\ \mathrm{Mat}(v_1, \dots\dots, v_k\ )=$$
$$rango\ della\ matrice\ \mathrm{Mat}(v_1, \dots\dots, v_{k+1}) =$$
$$rango\ della\ matrice\ Mat(v_1, \dots\dots, v_n\ ) \ = \ rkA$$

Questo dimostra la prima parte del teorema. Sia ora M un minore di ordine massimo di A con determinante non nullo. Le colonne di A corrispondenti a quelle di M sono evidentemente linearmente indipendenti, e formano quindi una base del sottospazio E.

Dimensione e rango

Il rango di una matrice A uguaglia la dimensione del sottospazio generato dalle righe di A.

Esempio

Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione del sottospazio E di R^4 generato da v_1, v_2, v_3.

Soluzione

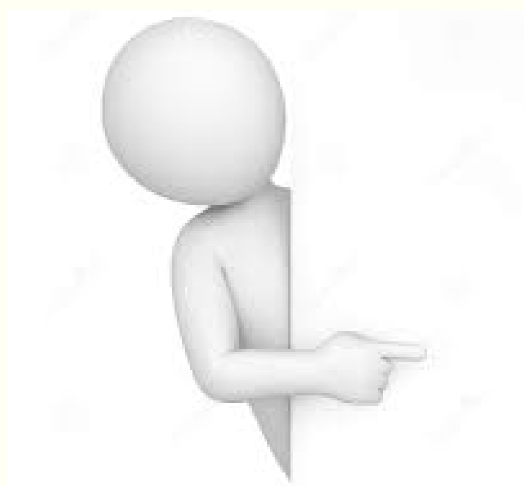
Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ vale 2, dunque dimE=2. Una base può essere formata dai primi due vettori v_1, v_2 corrispondenti al minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In effetti $v_3 = 2v_1 - 5v_2$.

Sottospazio intersezione

Consideriamo due sottospazi E, F di uno spazio vettoriale V . Si verifica facilmente che l'intersezione $E \cap F$ è un sottospazio di V . Inoltre $E \cap F$ è un sottospazio sia di E che di F, dunque: $\dim(E \cap F) \leq min\{dimE;\ \dim F\}$



Esempio Dati i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

consideriamo i sottospazi

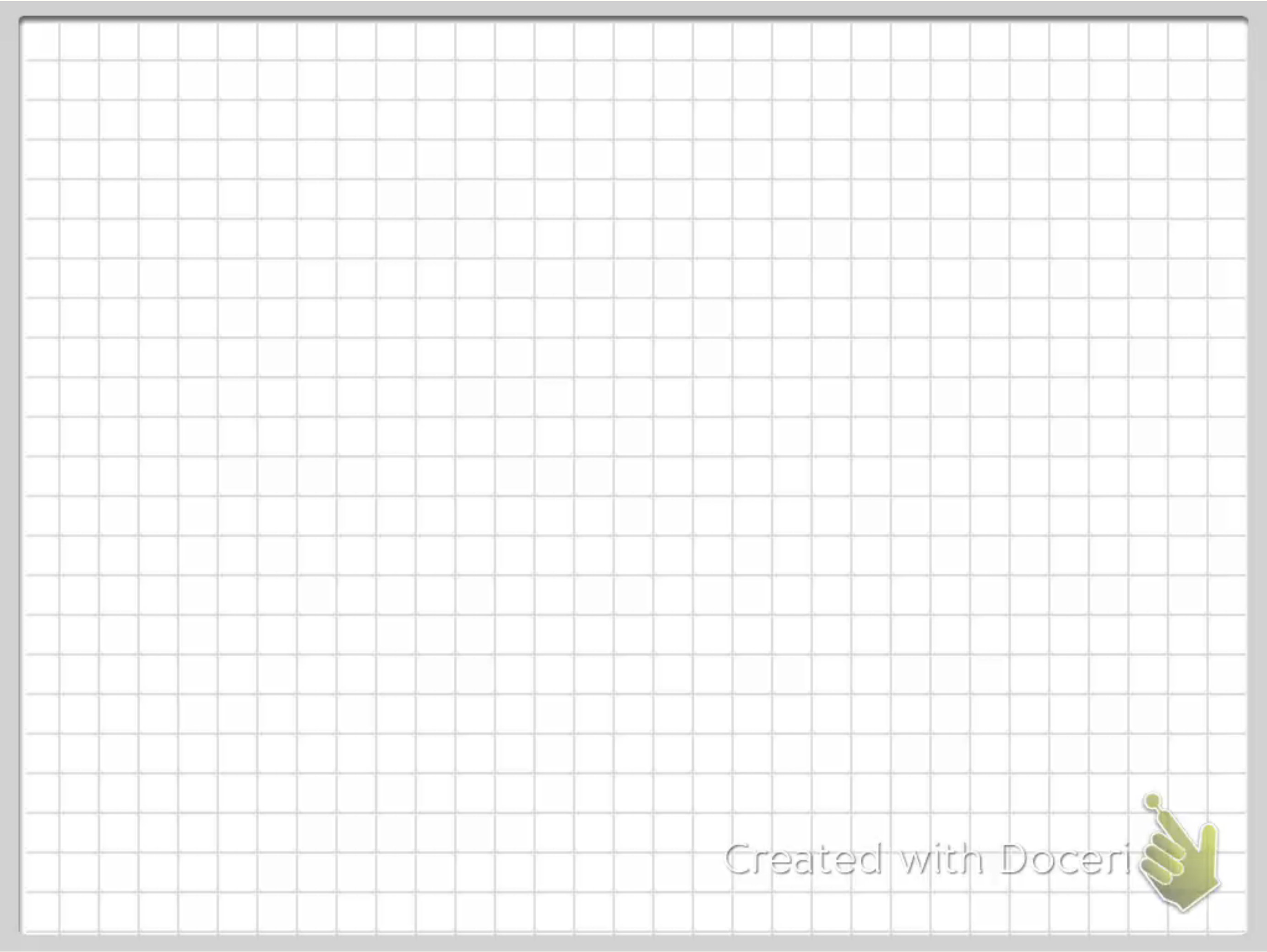
$$E = L[v_1, v_2, v_3],\ F = L[v_4, v_5].$$

Calcolare:

a) La dimensione e una base di E e di F;

b) Una base di $E \cap F$.

Sottospazio intersezione



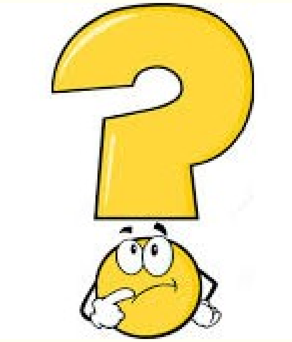
Sottospazio somma

L'unione di due sottospazi E ed F non è in generale un sottospazio.

Definizione
Possiamo però definire il sottospazio somma E + F, semplicemente sommando, in tutti i modi possibili, un vettore di E è un vettore di F:

$$E + F = \{u + v \in V : u \in E; v \in F\}$$

Proposizione
$E + F$ è un sottospazio di V



È evidente che E+F contiene E. Infatti se $v \in E$ possiamo scrivere $v = v + O$ e sappiamo e $O \in F$, poiché F è un sottospazio. Analogamente, E + F contiene anche F. Dunque:

$$\dim(E + F) \geq \max\{dimE; \dim F\}:$$

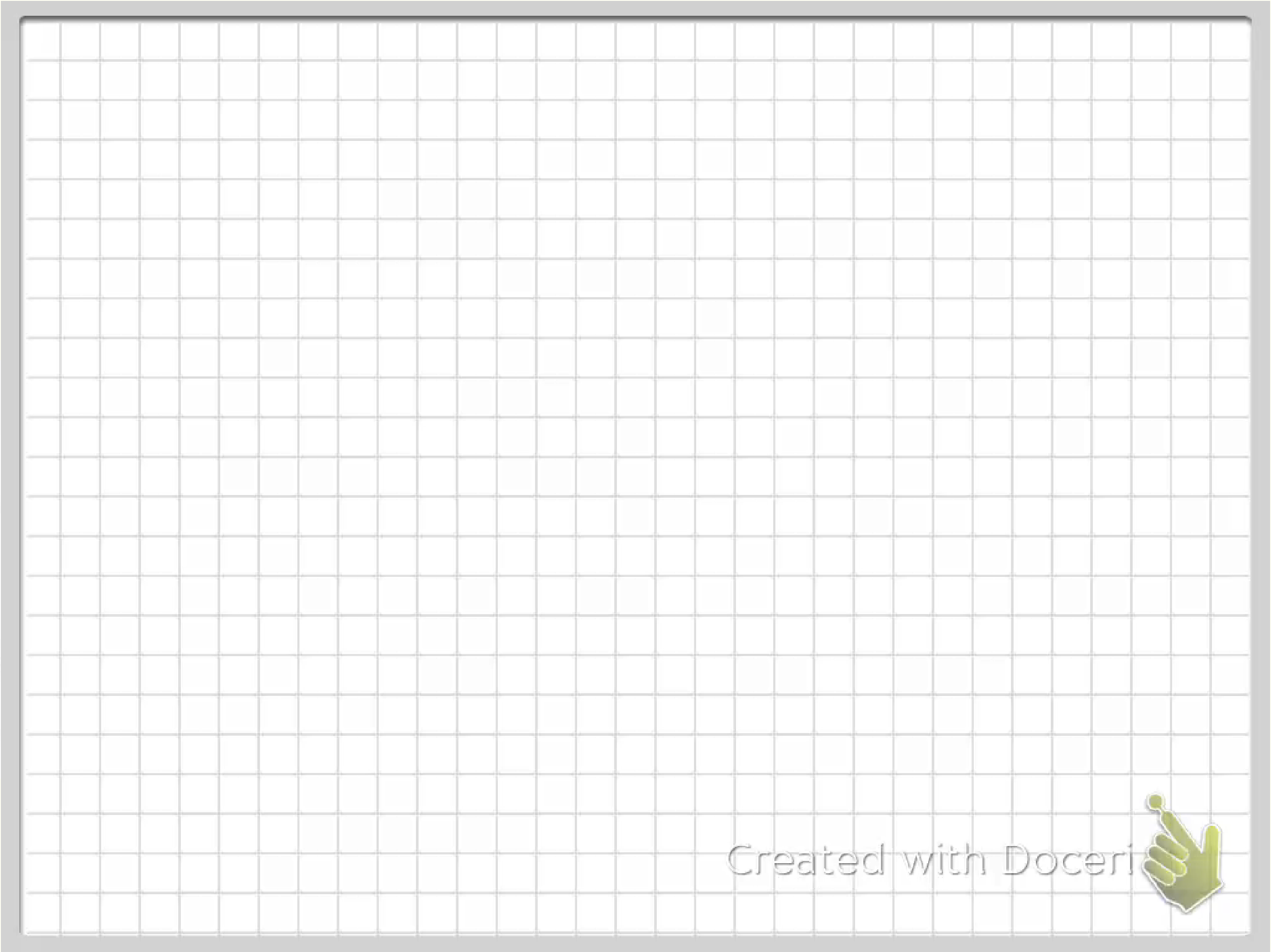
Se conosciamo i generatori di E e di F, allora e facile trovare dei generatori della somma.

Sottospazio somma

Proposizione
Se E è generato dai vettori $u_1, \dots\dots, u_k$ ed F e generato dai vettori $w_1, \dots\dots, w_h$ allora E + F e generato da$u_1, \dots\dots, u_k, w_1, \dots\dots, w_h$

Dimostrazione.
Un vettore della somma E + F e sempre somma di un vettore u di E e di un vettore w di F. Il primo e combinazione lineare di $u_1, \dots\dots, u_k$, e il secondo e combinazione lineare di $w_1, \dots\dots, w_h$. Dunque la loro somma sarà combinazione lineare di $u_1, \dots\dots, u_k, w_1, \dots\dots, w_h$

Sottospazio somma



Formula di Grassmann

C'e una relazione fra le dimensioni dei sottospazi $E;\ F; E\ +\ F; E\ \cap\ F$, detta formula di Grassmann.

Teorema

Siano E; F sottospazi di uno spazio vettoriale V . Allora si ha:

$$\dim(E + F) = dimE + dimF - \dim(E\ \cap\ F)$$

Formula di Grassmann