GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/20
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Introduzione alla geometria analitica dello spazio

Anche lo spazio, come il piano, può essere riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, procedendo come segue: si considerano tre rette a due a due ortogonali, dette asse x, asse y e asse z, tutte e tre passanti per un punto O, origine del sistema di riferimento; si orientano i tre assi e si considera su di essi una unità di misura; se l'orientamento è come in fig. 11.1 il sistema di riferimento si dice destro, mentre se è come in fig. 11.2 si dice sinistro

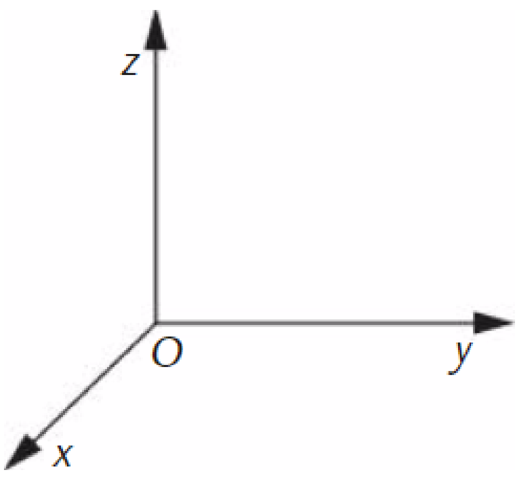


Figura 11.1

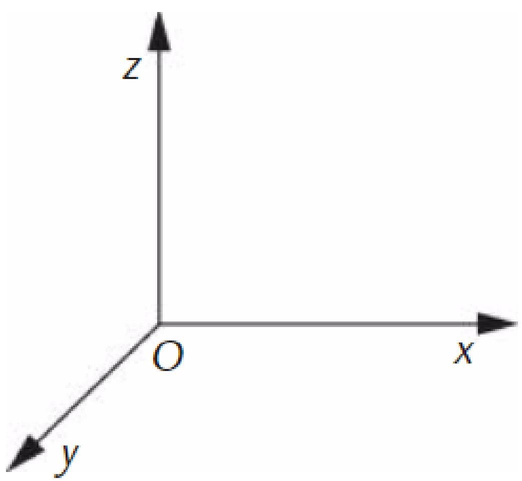


Figura 11.2

Introduzione alla geometria analitica dello spazio

Il piano che contiene gli assi x e y è detto piano xy; analogamente il piano che contiene gli assi x e z è detto piano xz e il piano che contiene gli assi y e z è detto piano yz (fig. 11.3). I tre piani xy, yz e xz, detti piani coordinati, dividono lo spazio in otto parti, detti ottanti(gli analoghi dei quadranti nel piano). A ogni punto P dello spazio è possibile associare una terna ordinata di numeri reali (x,y,z, che costituiscono le coordinate del punto P(fig. 11.4)

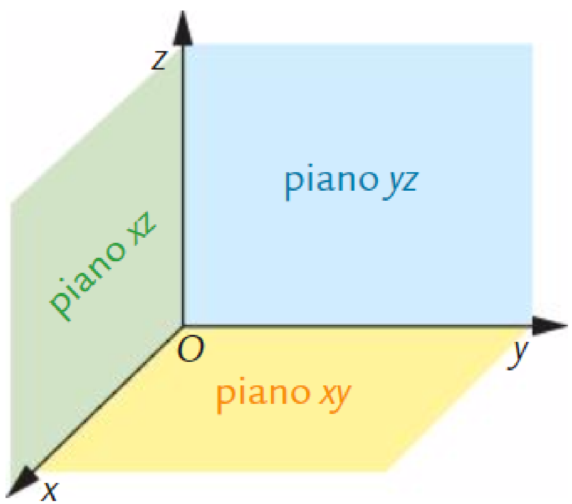


Figura 11.3

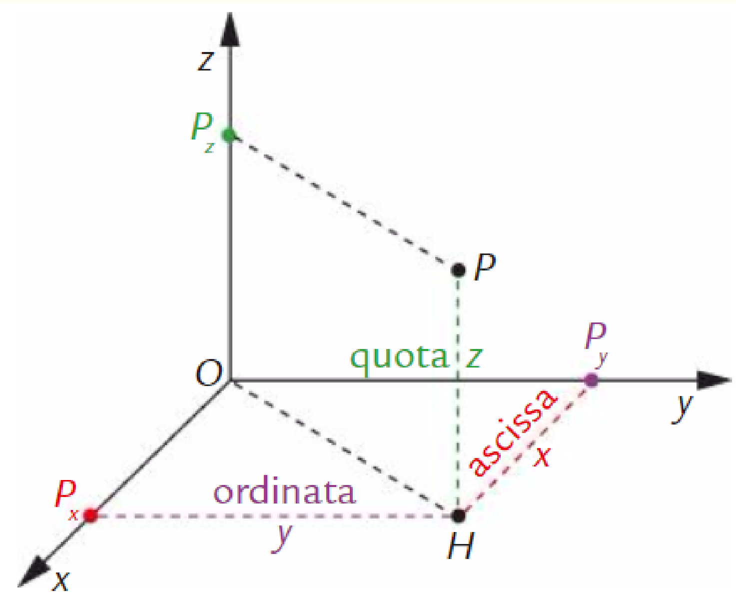
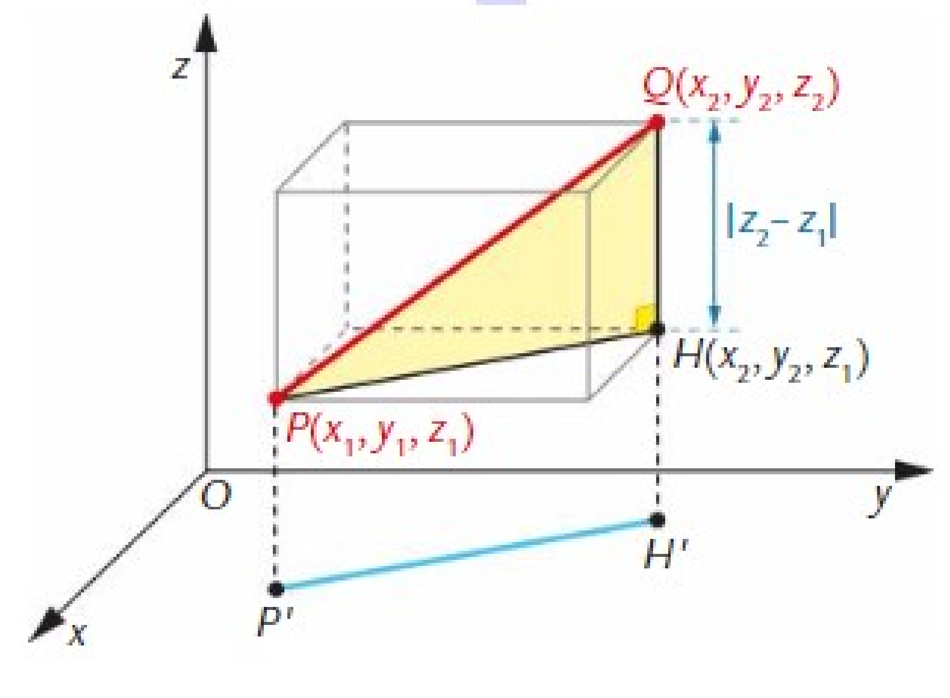


Figura 11.4

Distanza tra due punti



Distanza tra due punti nello spazio

Nello spazio, la distanza d tra due punti di coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), è espressa dalla formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

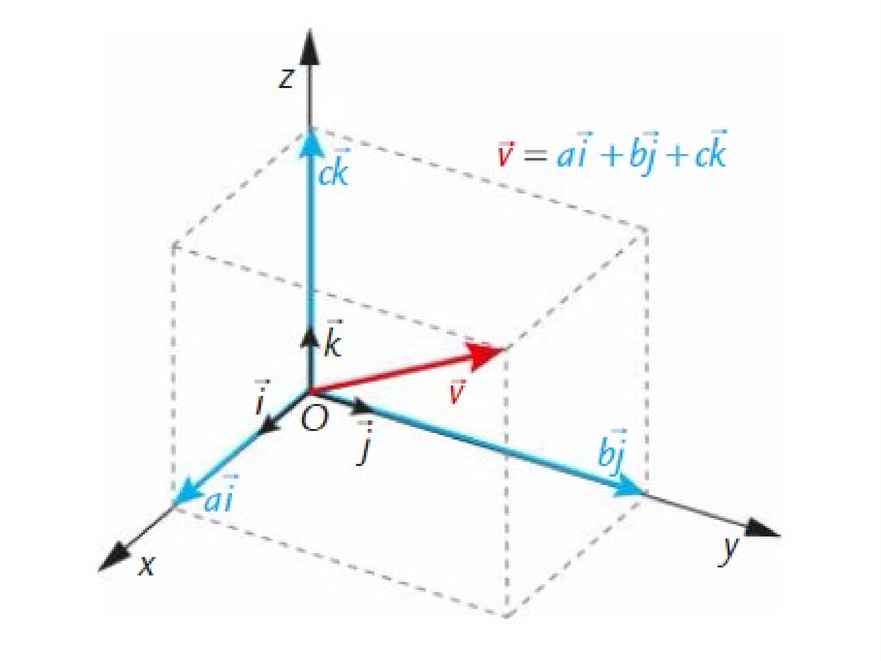
Punto medio di un segmento

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO NELLO SPAZIO

Il **punto medio** di un segmento i cui estremi hanno coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), ha coordinate:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Vettori nello spazio



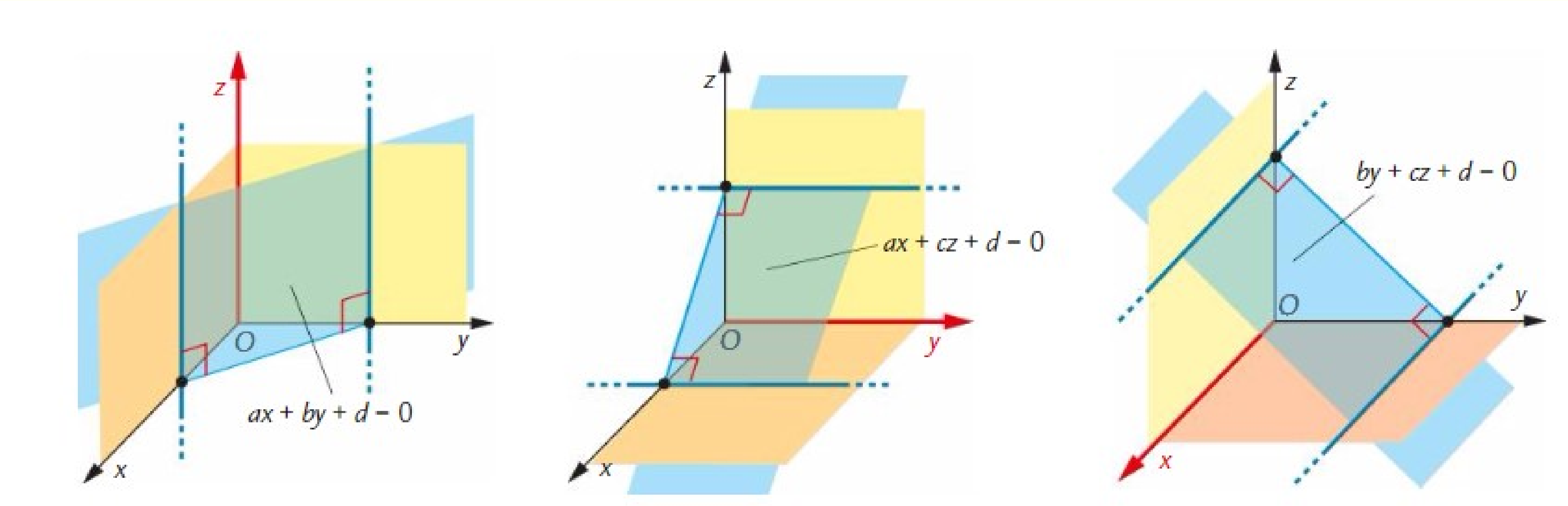
$$ax + by + cz + d = 0$$

Equazione del piano passante per un punto, di dato vettore normale

Il piano passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e di vettore normale $\vec{n}(a, b, c)$ ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad [11.2]$$

Il piano nello spazio euclideo

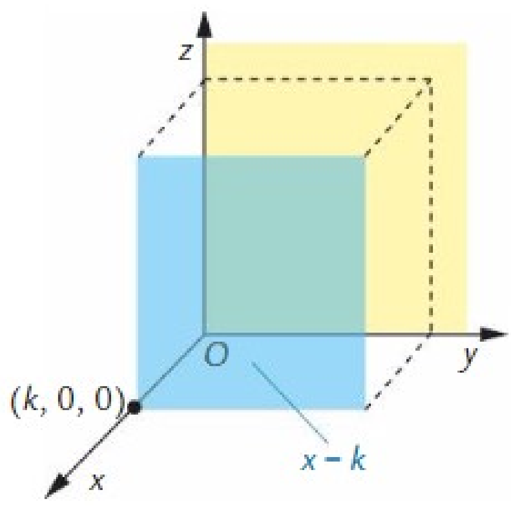


a. Piano parallelo all'asse *z* (deve perciò intersecare i piani *xz* e *yz* lungo rette parallele all'asse *z*). Tale piano è anche perpendicolare al piano *xy*.

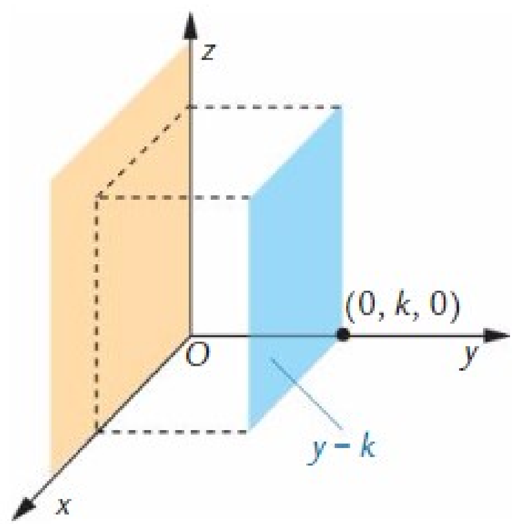
b. Piano parallelo all'asse *y* (deve perciò intersecare i piani *yz* e *xy* lungo rette parallele all'asse *y*). Tale piano è anche perpendicolare al piano *xz*.

c. Piano parallelo all'asse *x* (deve perciò intersecare i piani *xy* e *xz* lungo rette parallele all'asse *x*). Tale piano è anche perpendicolare al piano *yz*.

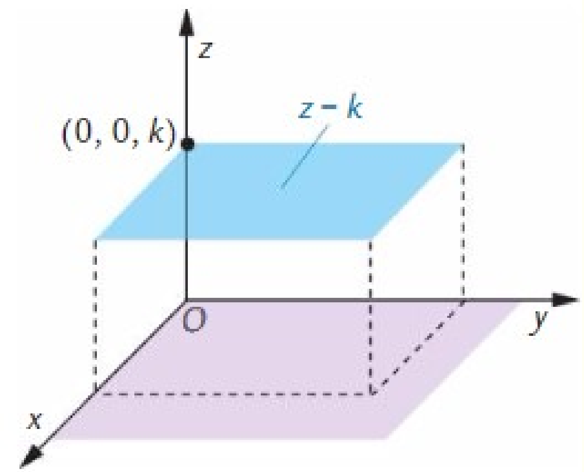
Il piano nello spazio euclideo



a. Piano parallelo al piano *yz*.



b. Piano parallelo al piano *xz*.

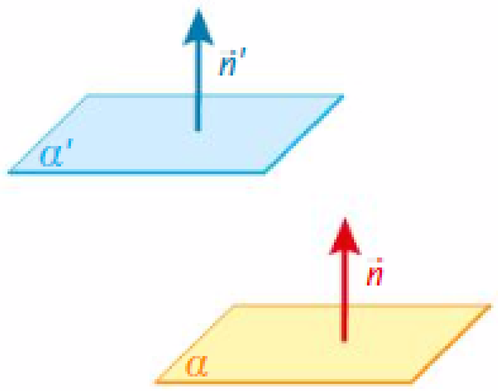


c. Piano parallelo al piano *yz*.

Parallelismo tra due piani

Condizione di parallelismo tra i due piani

$ax + by + cz + d = 0$
e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$



I due piani sono *paralleli* se e solo se lo sono i due vettori normali:

$\vec{n}(a, b, c)$ e $\vec{n'}(a', b', c')$

Ciò si verifica se e solo se esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che:

$a = ka', b = kb', c = kc'$

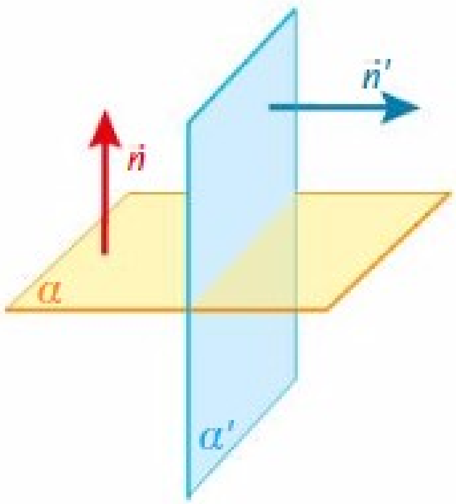
ovvero, se $a', b', c' \neq 0$, quando:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Perpendicolarità tra due piani

Condizione di perpendicolarità tra i due piani

$ax + by + cz + d = 0$
e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$



I due piani sono *perpendicolari* se e solo se lo sono i due vettori normali:

$\vec{n}(a, b, c)$ e $\vec{n'}(a', b', c')$

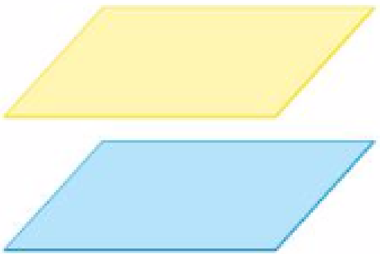
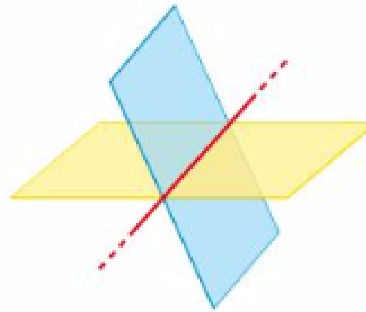
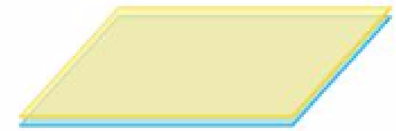
Ciò si verifica se e solo se risulta:

$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

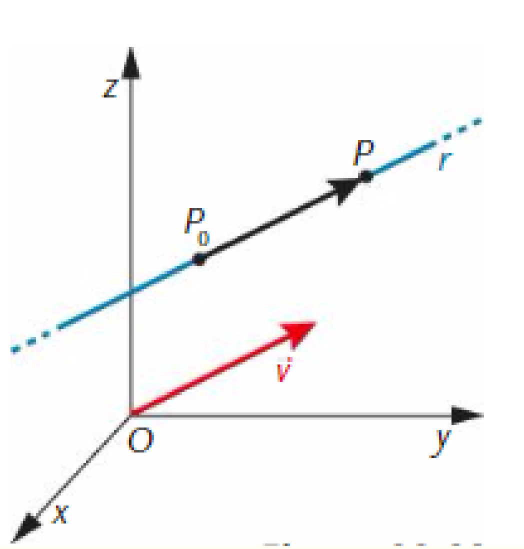
da cui la condizione:

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Posizione reciproca tra due piani

Piani paralleli distinti	**Piani secanti**	**Piani paralleli coincidenti**
		
Il sistema $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ **non** ammette soluzioni.	Il sistema $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ ammette *infinite* soluzioni, tutte appartenenti a una medesima *retta*.	Il sistema $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ è verificato da ogni terna ordinata (x, y, z) che soddisfa la prima equazione (o la seconda).

Equazione della retta nello spazio



$$\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{v} \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \qquad \text{e} \qquad t \cdot \vec{v} = (ta, tb, tc)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA NELLO SPAZIO

La retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e di vettore direzione $\vec{v}(a, b, c)$ ha **equazioni parametriche:**

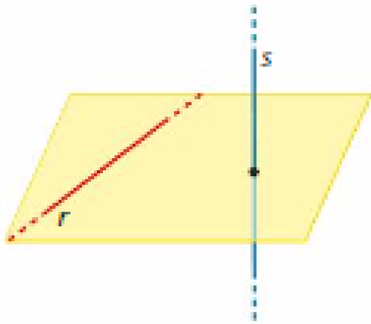
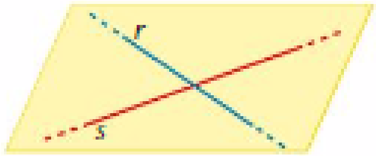
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad [11.5]$$

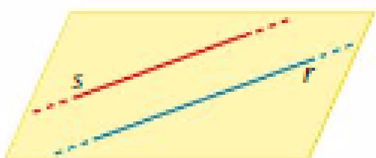
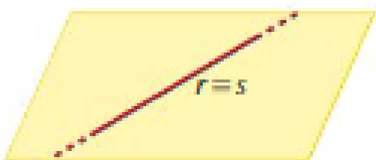
Equazione della retta nello spazio

Se i numeri a, b, c sono diversi da zero, possiamo eliminare il parametro t e ottenere le equazioni cartesiane della retta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Posizione reciproca di due rette nello spazio

Rette sghembe	Rette incidenti
	
I due vettori direzione di r ed s **non** sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).	I due vettori direzione di r ed s **non** sono paralleli e le due rette hanno un solo punto in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni ha una e una sola soluzione).

Rette parallele distinte	Rette parallele coincidenti
	
I due vettori direzione di r ed s sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).	I due vettori direzione di r ed s sono paralleli e ciascun punto di r appartiene a s, ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato.

Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

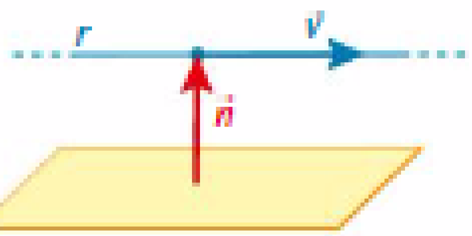
Condizione di parallelismo tra:

- un piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

- una retta di vettore direzione

$\vec{v}(l, m, n)$



La retta è parallela al piano se e solo se il vettore $\vec{n}(a, b, c)$ normale al piano è perpendicolare al vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ della retta.
Ne segue la condizione:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

da cui:

$$la + mb + nc = 0$$

Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

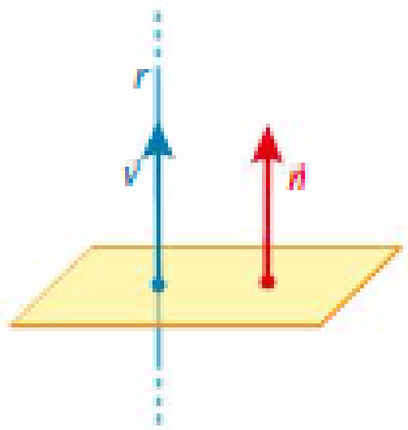
Condizione di perpendicolarità tra:

- un piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

- una retta di vettore direzione

$\vec{v}(l, m, n)$



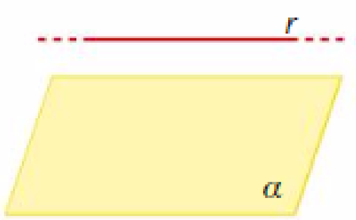
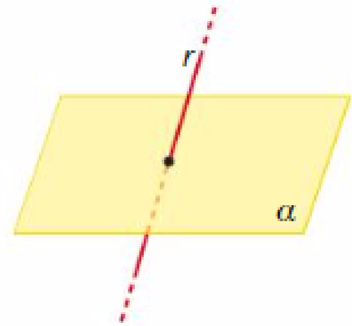
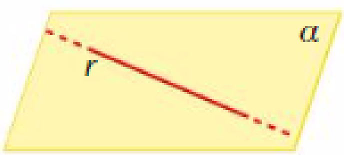
La retta è perpendicolare al piano se e solo se il vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ della retta è parallelo al vettore $\vec{n}(a, b, c)$ normale al piano. Ciò si verifica se e solo se esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che:

$$l = ka,\ m = kb,\ n = kc$$

ovvero, se $a, b, c \neq 0$, quando:

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Posizione reciproca tra retta e piano

Retta parallela al piano	Retta incidente il piano	Retta che giace sul piano
		
Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e inoltre piano e retta non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).	Il vettore normale al piano **non** è perpendicolare al vettore direzione della retta.	Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e tutti i punti della retta appartengono al piano (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato).

Distanza di un punto da un piano

Distanza di un punto da un piano

Dato il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, la **distanza** del punto dal piano (fig. 11.12) è uguale a:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad [11.7]$$

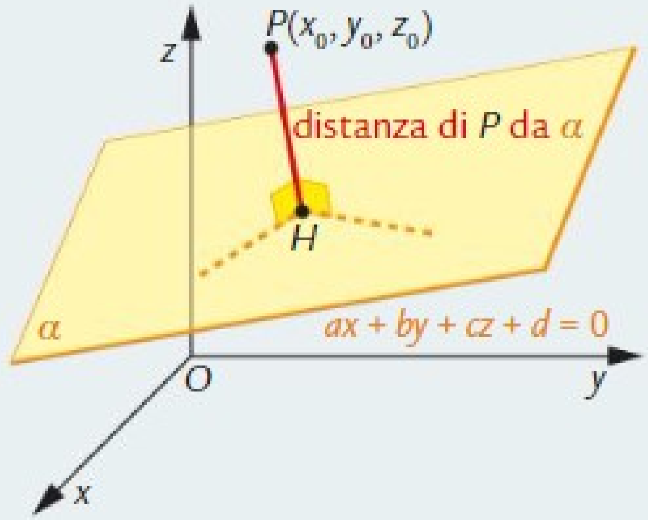
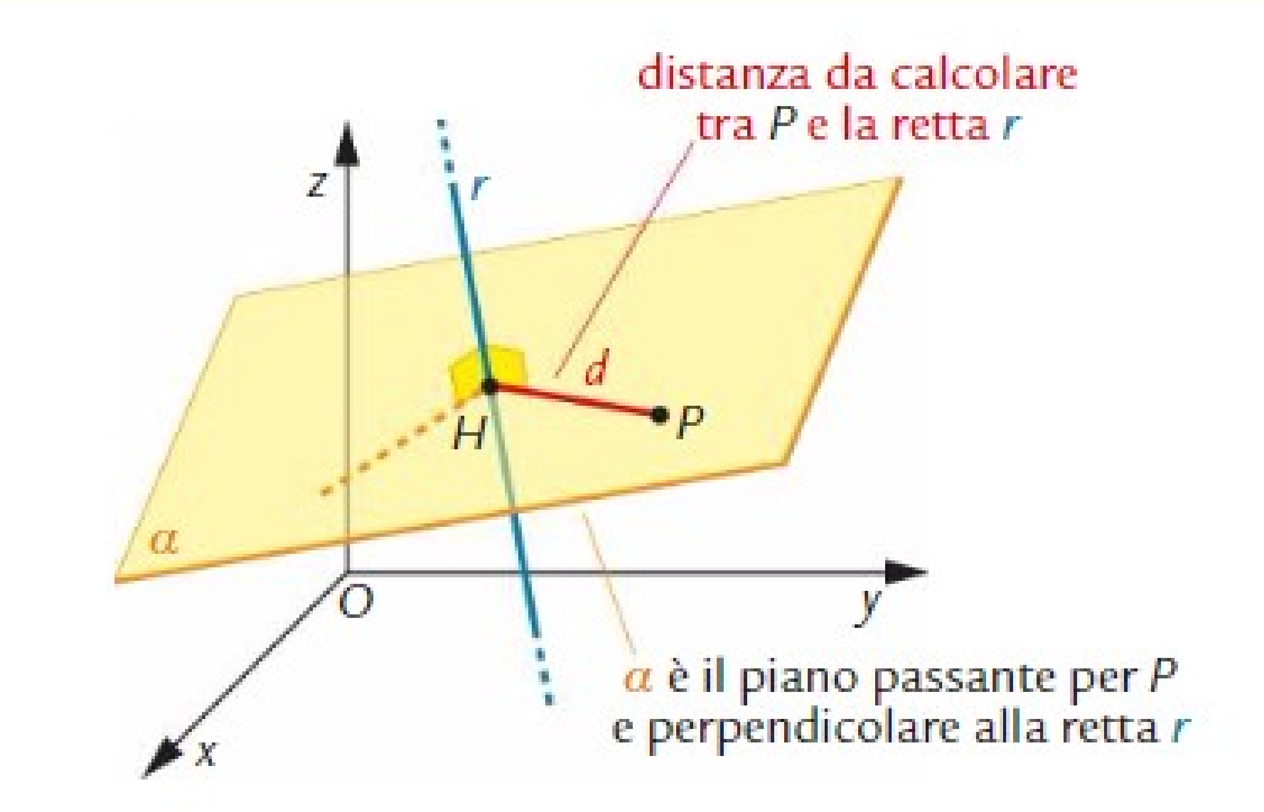


Figura 11.12

Distanza di un punto da una retta



La distanza di P dalla retta r è uguale alla distanza tra P e H, essendo H il punto d'intersezione della retta r con il piano passante per P e perpendicolare a r.

ESERCIZIO Guidato

Determiniamo la distanza del punto $P(2, -1, 5)$ dalla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

- **Scriviamo l'equazione del piano α per P perpendicolare alla retta r**

  La retta r ha come vettore direzione $\vec{v}(3, -2, 4)$.
  Il piano passante per P e perpendicolare alla retta r deve avere come vettore normale $\vec{v}$, dunque la sua equazione è:

  $$3(x-2) - 2(y+1) + 4(z-5) = 0$$

  ossia:

  $$3x - 2y + 4z - 28 = 0$$

ESERCIZIO guidato

- **Determiniamo il punto d'intersezione *H* della retta *r* con il piano**

  Dobbiamo risolvere il sistema:

  $$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \\ 3x - 2y + 4z - 28 = 0 \end{cases}$$

  Sostituendo nell'equazione del piano le espressioni di x, y e z fornite dalle equazioni parametriche della retta, otteniamo l'equazione risolvente nell'incognita t:

  $$3(-3 + 3t) - 2(-2t) + 4(2 + 4t) - 28 = 0 \Rightarrow t = 1$$

  Sostituendo infine nelle equazioni parametriche della retta il valore $t = 1$, otteniamo le coordinate di H:

$$\begin{cases} x = -3 + 3 \cdot 1 \\ y = -2 \cdot 1 \\ z = 2 + 4 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow H(0,\ -2,\ 6)$$

ESERCIZIO guidato

Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(0, 0, 3)$.

- L'equazione generale del piano $ax + by + cz + d = 0$ dipende apparentemente da quattro parametri, a, b, c e d, ma in realtà i parametri essenziali sono solo tre. In questo caso, per esempio, certamente $d \neq 0$ (perché il piano dato non può passare per l'origine); dividendo i due membri dell'equazione per d, otteniamo l'equazione:

  $$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$$

  ossia, ponendo $\frac{a}{d} = p$, $\frac{b}{d} = q$, $\frac{c}{d} = r$ si ottiene:

  $$px + qy + rz + 1 = 0$$

  Per determinare l'equazione del piano è sufficiente perciò determinare i tre parametri p, q ed r.

- Imponendo che i punti A, B e C appartengono al piano di equazione $px + qy + rz + 1 = 0$ si ottiene il sistema:

  $$\begin{cases} p + 2r + 1 = 0 \\ q + 3r + 1 = 0 \\ 3r + 1 = 0 \end{cases}$$

  da cui $p = -\frac{1}{3}$, $q = 0$, $r = -\frac{1}{3}$. Ora puoi facilmente concludere. $[x + z - 3 = 0]$

ESERCIZIO guidato

Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(3, 1, 3)$, perpendicolare e incidente alla retta r di equazioni $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$.

- Considera sulla retta r un generico punto $Q(5 + 2t, 1 - t, 6 + 3t)$, con $t \in \mathbb{R}$, e imponi che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare al vettore direzione della retta r.
- Risolvi l'equazione in t che ne scaturisce e determina il punto Q corrispondente al valore di t trovato.
- La retta cercata è quella che passa per i due punti P e Q.

$\left[x = 3 + \frac{1}{7}k, y = 1 + \frac{13}{14}k, z = 3 + \frac{3}{14}k\right]$

ESERCIZIO guidato

Verifica che le due rette di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ **e** $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = -k \end{cases}$ **sono sghembe.**

- Per verificare che le due rette sono sghembe devi verificare che non sono parallele e che non hanno punti d'intersezione.
- Per verificare che non sono parallele è sufficiente verificare che non sono paralleli i loro vettori direzione.
- Per verificare che non hanno punti in comune, devi verificare che il sistema seguente è impossibile:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + k \\ 1 - t = 2k \\ t = -k \end{cases} \qquad [*]$$

A tale scopo puoi ricavare t e k da *due* delle tre equazioni del sistema [*] e poi verificare che i valori di t e k trovati **non** soddisfano l'equazione rimanente.