GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/20
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Rappresentazione di un piano nello spazio

Dato un piano π e un vattore $u(l,m,n)$ dello spazio cartesiano , il vettore è parallelo a π se può essere rappresentato con un segmento orientato giacente su π

Un piano π è individuato da un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$e da due vettori non nulli $u(l,m,n)$ e $u' = (l',m',n')$ paralleli a π e non paralleli tra loro

Se $P(x,y,z)$ appartiene a π se e solo se i vettori $P-P_0,u,u'$ sono complanari

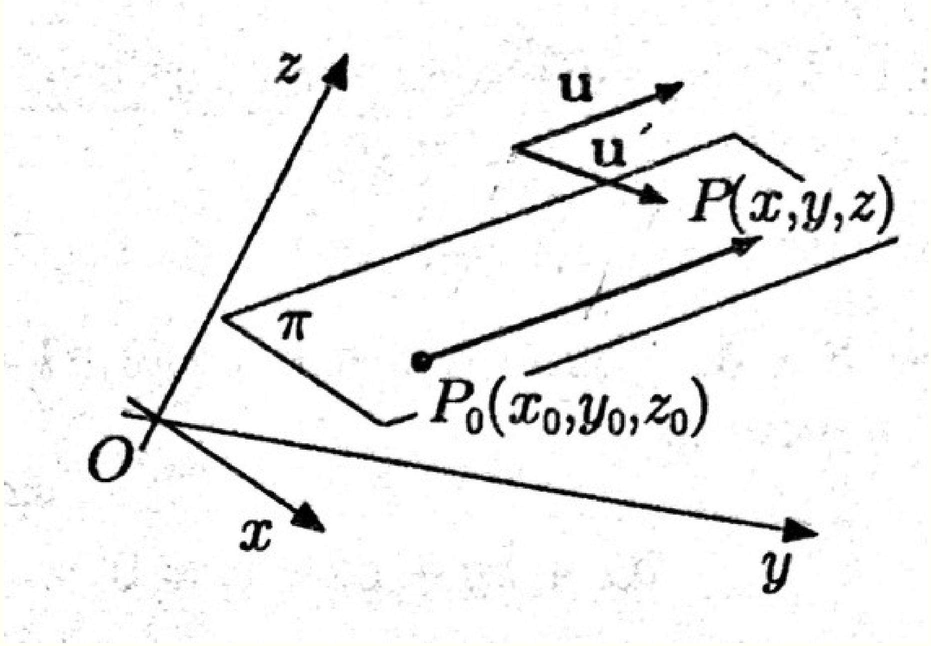
Questa condizione può essere espressa nel seguente modo:
Esistono due numeri reali s e t tali che:

$$P - P_0 = us + u't$$

In forma scalare si ha:

$$\begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ z = z_0 + ns + n't \end{cases}$$

Rappresentazione di un piano nello spazio



Possiamo vedere come al variare dei parametri s e t, otteniamo le coordinate x, y, z di tutti i punti del piano π, passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallelo ai vettori $u(l, m, n)$ e $u' = (l', m', n')$

Rappresentazione di un piano nello spazio

Riprendendo queste equazioni, dette equazioni parametriche del piano

$$\begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ z = z_0 + ns + n't \end{cases}$$

Poiché il vettore $u(l, m, n)$ dello spazio cartesiano è non nullo da una delle equazioni possiamo ricavare s. Analogamente poiché il vettore $u' = (l', m', n')$ è non nullo possiamo ricavare t.
Sostituendo nella restante equazione, si ottiene:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Dove

$$a = mn' - m'n$$
$$b = l'n - ln'$$
$$c = lm' - l'm$$

ESERCIZIO guidato

Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(0, 0, 3)$.

- L'equazione generale del piano $ax + by + cz + d = 0$ dipende apparentemente da quattro parametri, a, b, c e d, ma in realtà i parametri essenziali sono solo tre. In questo caso, per esempio, certamente $d \neq 0$ (perché il piano dato non può passare per l'origine); dividendo i due membri dell'equazione per d, otteniamo l'equazione:

  $$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$$

  ossia, ponendo $\frac{a}{d} = p$, $\frac{b}{d} = q$, $\frac{c}{d} = r$ si ottiene:

  $$px + qy + rz + 1 = 0$$

  Per determinare l'equazione del piano è sufficiente perciò determinare i tre parametri p, q ed r.

- Imponendo che i punti A, B e C appartengono al piano di equazione $px + qy + rz + 1 = 0$ si ottiene il sistema:

  $$\begin{cases} p + 2r + 1 = 0 \\ q + 3r + 1 = 0 \\ 3r + 1 = 0 \end{cases}$$

  da cui $p = -\frac{1}{3}$, $q = 0$, $r = -\frac{1}{3}$. Ora puoi facilmente concludere. $[x + z - 3 = 0]$

ESERCIZIO guidato

Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(3, 1, 3)$, perpendicolare e incidente alla retta r di equazioni $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$**.**

- Considera sulla retta r un generico punto $Q(5 + 2t, 1 - t, 6 + 3t)$, con $t \in \mathbb{R}$, e imponi che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare al vettore direzione della retta r.
- Risolvi l'equazione in t che ne scaturisce e determina il punto Q corrispondente al valore di t trovato.
- La retta cercata è quella che passa per i due punti P e Q.

$$\left[x = 3 + \frac{1}{7}k,\ y = 1 + \frac{13}{14}k,\ z = 3 + \frac{3}{14}k\right]$$

ESERCIZIO guidato

Verifica che le due rette di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ **e** $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = -k \end{cases}$ **sono sghembe.**

- Per verificare che le due rette sono sghembe devi verificare che non sono parallele e che non hanno punti d'intersezione.
- Per verificare che non sono parallele è sufficiente verificare che non sono paralleli i loro vettori direzione.
- Per verificare che non hanno punti in comune, devi verificare che il sistema seguente è impossibile:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + k \\ 1 - t = 2k \\ t = -k \end{cases} \qquad [*]$$

A tale scopo puoi ricavare t e k da *due* delle tre equazioni del sistema [*] e poi verificare che i valori di t e k trovati **non** soddisfano l'equazione rimanente.