

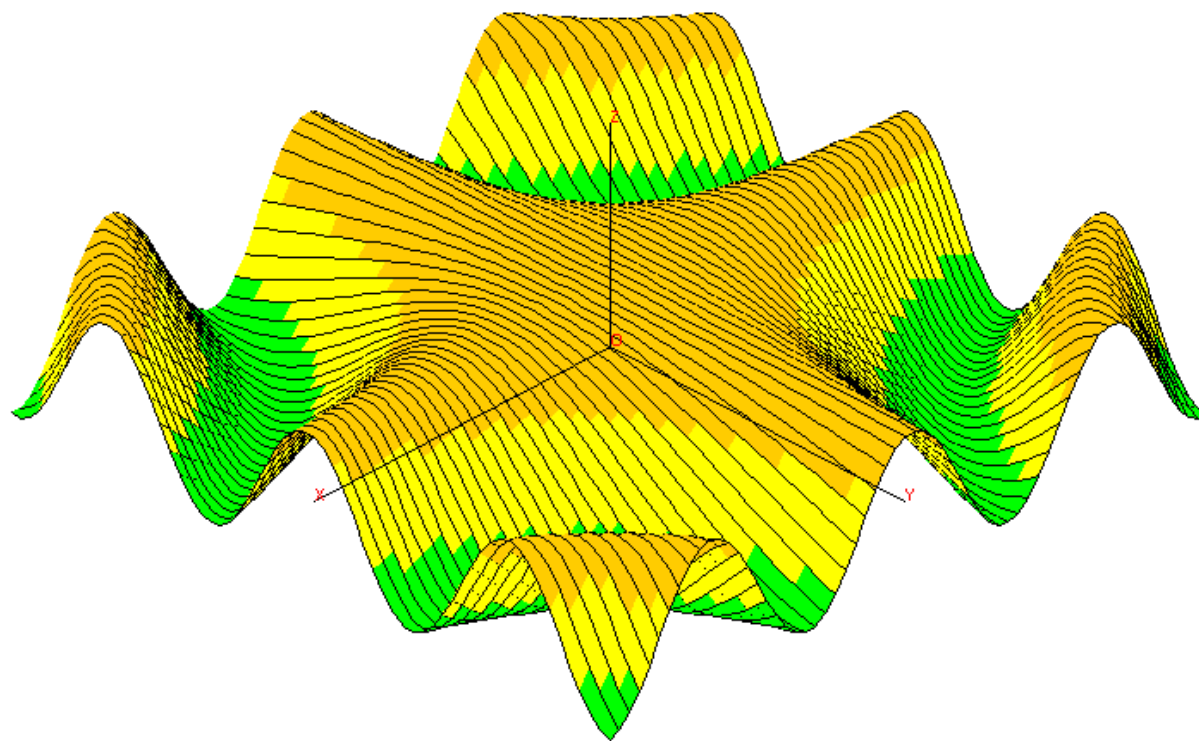


FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI

Prof. Roberto Capone

A.A. 2019/20

Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale



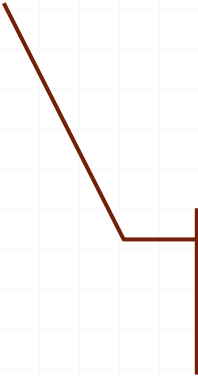
Valori di Massimo e di Minimo

L'ottimizzazione, cioè la ricerca del valore massimo (o minimo) di una funzione di più variabili, è un problema centrale delle applicazioni del calcolo differenziale in diversi ambiti: dai campi più teorici, la geometria e la fisica, a quelli più strettamente applicativi come l'economia, la finanza, i sistemi industriali, e così via.

Definizione.

Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ è un *punto di massimo locale* per f se il suo valore $f(P_0)$ è massimo fra tutti quelli assunti in un disco aperto centrato in P_0 .

P_0 è invece un *punto di minimo locale* per f se il suo valore $f(P_0)$ è minimo fra tutti quelli assunti in un disco aperto centrato in (P_0) . Il corrispondente valore $f(P_0)$ è detto rispettivamente *massimo* o *minimo* (locale).



Ovvero se esiste un raggio $\delta > 0$ per cui $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D \cap B_\delta(x_0, y_0)$. Se invece vale $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, il punto è un minimo locale

Massimi e minimi locali

I punti di massimo e minimo locale si dicono *punti di estremo locale*, o estremali, e analogamente le loro immagini si dicono valori estremi. Il termine *locale* (a volte sostituito da *relativo*) è contrapposto a *globale* (o *assoluto*), che si riferisce ad estremi che sono tali su tutto il dominio.

Teorema di Fermat (condizione necessaria del I ordine)

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2$ con A aperto. Se $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ è di massimo o di minimo locale per f e se f è derivabile in (x_0, y_0) , allora:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad \text{ovvero} \quad \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Dimostrazione

Sia $g_1(x) = f(x, y_0)$. Poiché $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e A è aperto esiste un disco centrato in P_0 e di raggio $\delta > 0$ completamente contenuto in D :

la funzione g_1 risulta così definita nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ed è derivabile in x_0 .

Poiché f ha un punto di massimo in P_0 anche g_1 ha un massimo in x_0 , dunque in base al Teorema di Fermat $g_1'(x_0) = 0$.

Ma, per definizione, $g_1'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ e dunque $f_x(x_0, y_0) = 0$.

Analogamente, definendo $g_2(y) = f(x_0, y)$ si mostra che $g_2'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Funzioni con gradiente nullo

Teorema

Se una funzione f ammette gradiente nullo in tutti i punti di un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^2$, allora f è costante su A

Dimostrazione

Essendo per ipotesi entrambe le derivate parziali di f nulle in A , però continue, f è differenziabile in A . Fissato $(x_1, y_1) \in A$, definiamo l'insieme $A_1 = \{(x, y) \in A: f(x, y) = f(x_1, y_1)\}$

Evidentemente $A = A_1 \cup A_2$, dove

$$A_2 = \{(x, y) \in A: f(x, y) \neq f(x_1, y_1)\}$$

Essendo differenziabile, f è anche continua in A ; pertanto l'insieme A_2 è aperto. Dimostriamo che anche A_1 è aperto.

Sia I_δ un intorno circolare di centro (x_1, y_1) e raggio δ contenuto in A ; mostriamo che $I_\delta \subseteq A_1$, cioè $f(x, y) = f(x_1, y_1), \forall (x, y) \in I_\delta$.

Se $f(x, y) \neq f(x_1, y_1)$, si consideri la funzione ausiliaria $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(x - x_1), y_1 + t(y - y_1))$$



Funzioni con gradiente nullo



La derivata di φ , calcolata per mezzo della formula di derivazione delle funzioni composte, vale

$$\varphi'(t) = f_x(x - x_1) + f_y(y - y_1) = 0$$

La funzione $\varphi: [0,1] \rightarrow R$ ha derivata nulla in $[0,1]$ ed è pertanto costante in tale intervallo.

Risulta in particolare $\varphi(0) = \varphi(1)$; cioè $f(x, y) = f(x_1, y_1)$

Perciò anche A_1 è un insieme aperto.

Risulta quindi

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$


con A_1, A_2 aperti di R^2 con $A_1 \neq \emptyset$

Dato che, per ipotesi, A è un aperto connesso di R^2 ne segue che $A_2 = \emptyset$ e quindi $A_1 = A$, cioè

$$f(x, y) = f(x_1, y_1)$$

I punti critici di una funzione

Definizione. Un punto in cui entrambe le derivate parziali di f si annullano si dice *punto critico* (o *punto stazionario*) di f .



Per la definizione data, i punti critici sono punti in cui la funzione è derivabile. Nel caso in cui sia anche differenziabile (come nella gran parte dei casi che studieremo) in tali punti il piano tangente è orizzontale.

Osserviamo inoltre che gli estremi di una funzione possono trovarsi in punti in cui la funzione non è derivabile: tali punti vanno analizzati separatamente.

Dato un punto critico, ci poniamo il problema di stabilirne la natura locale, cioè se sia un massimo, un minimo, oppure un punto di sella. Sappiamo che, per le funzioni di una variabile, è il segno della derivata seconda a determinare la natura locale del punto critico: se essa è positiva siamo in presenza di un minimo locale mentre se è negativa si tratta di un massimo locale. Ci aspettiamo che valga un criterio analogo anche per le funzioni di due variabili.

La matrice hessiana

Definiamo la matrice hessiana di una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A insieme aperto e $f \in C^2(A)$ la seguente matrice simmetrica:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Essendo $f \in C^2(A)$, per il teorema di Schwarz, $\forall (x, y) \in A$, si ha:

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

Chiamiamo hessiano il determinante della matrice hessiana. Tale determinante è utile per la determinazione dei punti estremi.

Test dell'Hessiana

Teorema (condizione necessaria del secondo ordine)

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A insieme aperto e $f \in C^2(A)$ e $P_0(x_0, y_0) \in A$ in cui si ha

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

allora, si possono verificare le seguenti eventualità

| | | |
|-------------------|--|---------------------------|
| $H(x_0, y_0) > 0$ | $f_x(x_0, y_0) > 0$ | Si ha un minimo relativo |
| | $f_x(x_0, y_0) < 0$ | Si ha un massimo relativo |
| $H(x_0, y_0) < 0$ | Si ha un punto di sella | |
| $H(x_0, y_0) = 0$ | Nulla è possibile dire con questo metodo | |

Massimi e minimi su domini chiusi

I risultati principali della teoria dell'ottimizzazione, il Teorema di Fermat in due variabili e il Test dell'hessiana, si applicano esclusivamente ai punti estremi di una funzione definita su un *dominio aperto*. Essi valgono anche quando il dominio non è un aperto, ma il punto in questione è comunque un *punto interno al dominio*, in quanto si possono applicare alla restrizione della funzione all'insieme dei soli punti interni al dominio. In molte applicazioni interessanti, invece, siamo condotti alla ricerca di valori estremi di una funzione definita su un insieme chiuso

Rispetto a quella sui domini aperti, l'ottimizzazione sui domini chiusi presenta qualche difficoltà supplementare: occorre infatti una trattazione separata dei punti interni e di quelli di frontiera. Dall'altra parte vi è un indubbio vantaggio: è molto più probabile che il minimo (o massimo) esista. Il primo passo, nel processo di ottimizzazione, infatti, deve consistere nel provare che il valore estremo è assunto



Esempi:

Qual è il rettangolo di area massima tra quelli che hanno perimetro assegnato p ?

Avendo a disposizione 12 m^2 di cartone, qual è il volume massimo di una scatola rettangolare (priva di coperchio) che si può costruire?

Teorema di Weierstrass

I Teorema di Weierstrass

Ogni funzione continua su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato è limitata ed assume i valori massimo e minimo, ovvero esistono $(x_m, y_m) \in D, (x_M, y_M) \in D$ tali che:

$$f(x_m, y_m) \leq f(x, y) \leq f(x_M, y_M) \quad \forall (x, y) \in D$$

II Teorema di Weierstrass (modificato)

Una funzione continua $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

assume il suo minimo.

Analogamente, se il limite è $-\infty$ allora la funzione assume il suo massimo.

Il Teorema di Weierstrass (dimostrazione)

Fissiamo un raggio R sufficientemente grande perché si abbia

$$x^2 + y^2 > R \implies f(x, y) > f(0, 0)$$

e minimizziamo la funzione nel disco chiuso centrato nell'origine e di raggio R .

Il Teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un punto di minimo $m(x_m, y_m)$: si avrà quindi $f(x_m, y_m) \leq f(x, y)$ per tutti i punti del disco e quindi, in particolare, nel centro dello stesso. Si avrà quindi

$$f(x_m, y_m) \leq f(0, 0)$$

D'altra parte, al di fuori del disco di raggio R abbiamo

$$f(x, y) > f(0, 0) \geq f(x_m, y_m)$$

Da qui si può concludere che il valore minimo di f su tutto R^2 è $f(x_m, y_m)$

Metodo dei moltiplicatori

Capita spesso di voler determinare gli estremi di una funzione $f(x, y)$ quando il punto (x, y) verifica una condizione aggiuntiva, della forma $g(x, y) = k$. Si parla allora di *massimi e minimi vincolati*, e l'insieme di livello $g(x, y) = k$ prende il nome di vincolo

In concreto, i punti di massimo (e di minimo) della funzione $f(x, y)$ con il vincolo $g(x, y) = k$, sono *punti critici per la funzione* di tre variabili

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k]$$

La variabile λ prende il nome di *moltiplicatore di Lagrange*, così come si chiama *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* la ricerca degli estremi di f con il vincolo $g = k$ attraverso la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0 \\ g_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Moltiplicatori di Lagrange

Per la determinazione della natura di tali punti si ricorre al determinante hessiano relativo alla funzione $L(x, y, \lambda)$

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che se $P(x_0, y_0, \lambda)$ è un punto stazionario per la funzione di Lagrange, allora in tale punto si ha:

Un minimo vincolato se $H(x_0, y_0, \lambda) < 0$

Un massimo vincolato se $H(x_0, y_0, \lambda) > 0$

Esempio

Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = xy$ con il vincolo $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$.

Come prima cosa scriviamo il vincolo nella forma $g(x, y) = 0$ con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; osserviamo che f e g sono di classe C^1 e che la condizione $\nabla g(x, y) \neq 0$ è verificata in tutti i punti del vincolo.

Si ha:

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo basta ricavare $\lambda = \frac{y}{2x}$ dalla prima equazione e sostituire nella seconda ottenendo $x^2 + y^2 = 0$, ricavando $x = \pm y$

Esempio

Si ottengono così due sistemi ognuno con due soluzioni

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Abbiamo trovato quattro candidati possibili: quali tra questi sono punti di massimo vincolato per f ? Per scoprirlo basta calcolare i valori di f in tali punti e selezionare quello (o quelli) che si trovano alla quota più alta.

Si ha

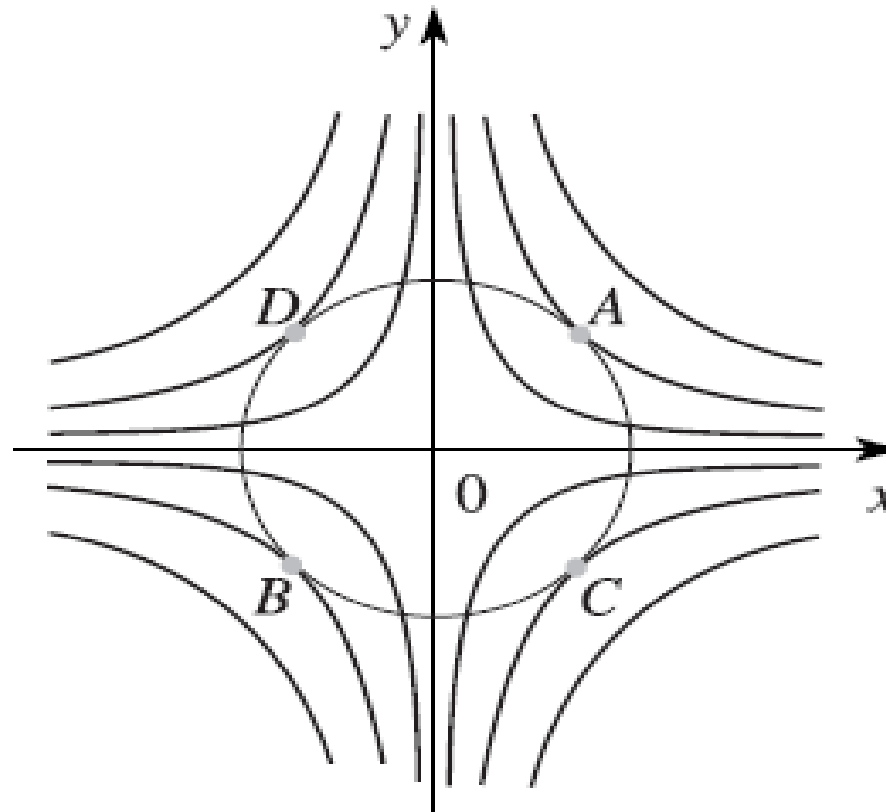
$$f(A) = f(B) = \frac{1}{2}, \quad f(C) = f(D) = -\frac{1}{2}$$

Dunque i punti A e B rappresentano punti di massimo vincolato, mentre C e D sono punti di minimo di f

Significato geometrico del Teorema di Lagrange

Graficamente, se si considera la curva di livello costituita dall'iperbole di equazione $xy = 1/2$, essa risulta essere tangente alla curva $x^2 + y^2 = 1$ nei punti A e B.

Analogamente se considero la curva di livello $xy = -1/2$

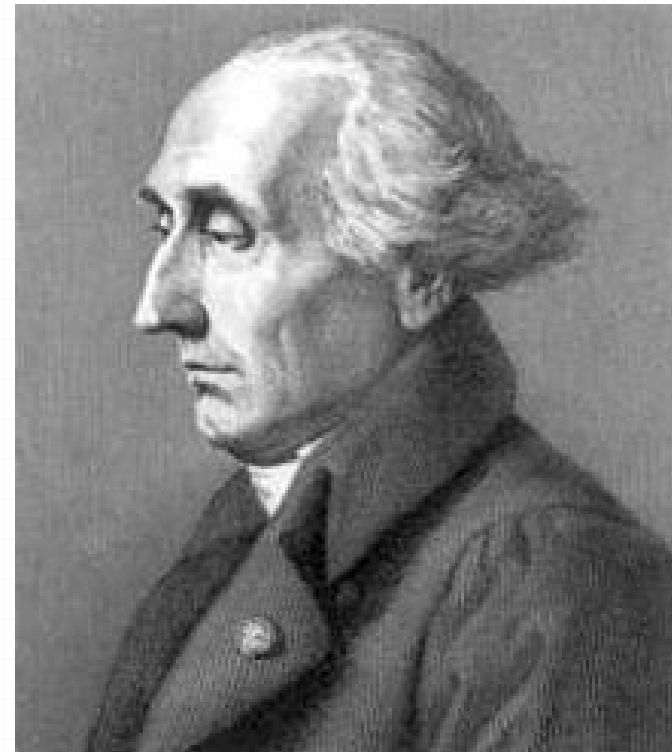


L'esempio appena visto mette in luce il *significato geometrico del metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:
I valori estremi di f con il vincolo $g = k$ corrispondono a curve di livello di f che sono tangenti al vincolo.

Lagrange in pratica

Per trovare gli estremi di f con il vincolo $g(x, y) = c$ con il metodo dei moltiplicatori (assumendo che massimo e minimo assoluti esistano) occorre:

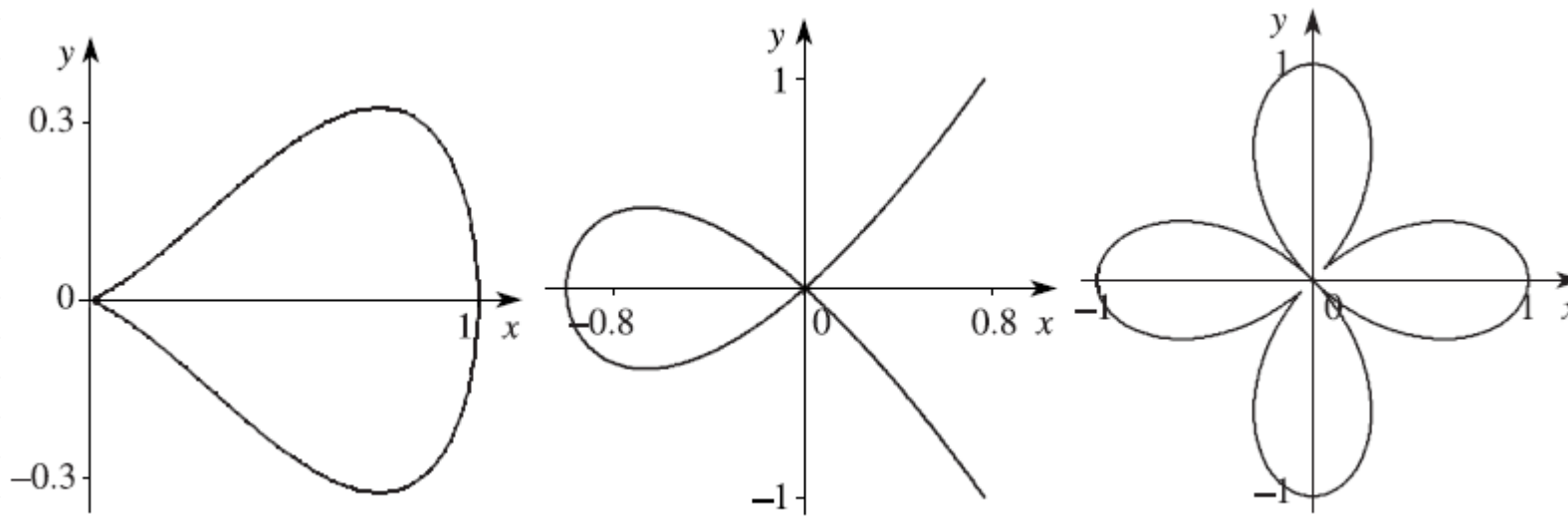
- trovare i valori di x , y e λ tali che $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, $g(x, y) = c$
- trovare i punti del vincolo $g(x, y) = c$ in cui f o g non sono derivabili, oppure il gradiente di g è nullo;
- calcolare il valore della funzione f in tutti i punti trovati. Il più grande di questi valori è il massimo di f , il più piccolo è il valore minimo di f .



Punti di regolarità

Un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in E_k$ in cui $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ si dice *punto regolare*, si dice invece *punto singolare* se il gradiente è il vettore nullo.

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto singolare per g , allora l'aspetto dell'insieme di livello contenente $P_0 = (x_0, y_0)$ può essere molto vario, come si vede in Figura : l'origine è un punto singolare per ciascuna delle funzioni g considerate.



Baricentro e Momento d'inerzia

È dato un sistema di n punti del piano $P_i = (x_i, y_i)$ di masse m_i . Il *momento di inerzia rispetto a un punto* $P = (x, y)$ è definito come

$$I(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \|\overrightarrow{PP_i}\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$$

Dimostrare che il *baricentro* del sistema è il punto del piano rispetto al quale il momento di inerzia è minimo.

Detta $M = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema, la funzione I si può scrivere come

$$I(x, y) = M|x^2 + y^2| - 2 \sum_{i=1}^n m_i [xx_i + yy_i] + \sum_{i=1}^n m_i [x_i^2 + y_i^2]$$

Trattandosi di una funzione di classe C^1 possiamo cercare il minimo tra i punti critici:

$$I_x(x, y) = 2Mx + 2 \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0, \quad I_y(x, y) = 2My + 2 \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0$$

Ne deduciamo che la funzione ha un solo punto critico, cioè il baricentro di coordinate:

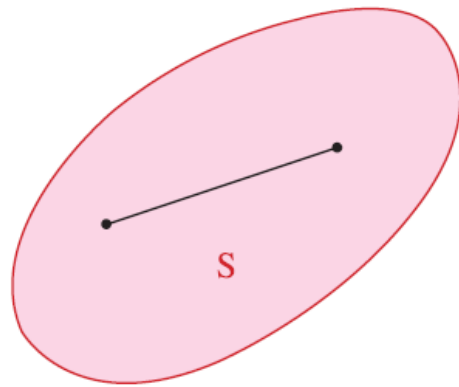
$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

Funzioni convesse e concave

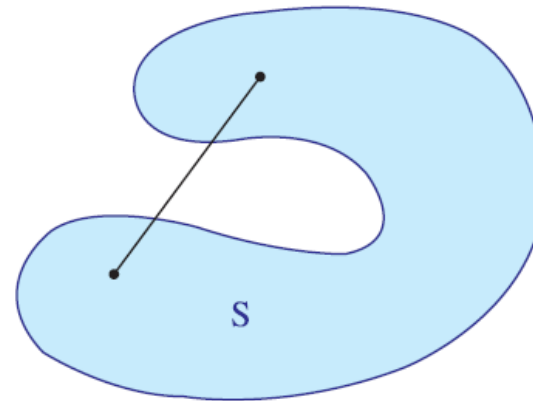
Per il caso di funzioni di una variabile, l'identificazione di massimi e minimi locali nei problemi di ottimizzazione è normalmente solo un passo del percorso per trovare massimi e minimi *globali*.

Tuttavia, nel caso di una funzione *concava*, un massimo locale è automaticamente un massimo globale. Analogamente, nel caso di funzione *convessa*, un minimo locale è automaticamente un minimo globale.

Questa osservazione è importante in quanto le funzioni concave e convesse appaiono frequentemente nelle applicazioni



Insieme convesso di \mathbb{R}^2

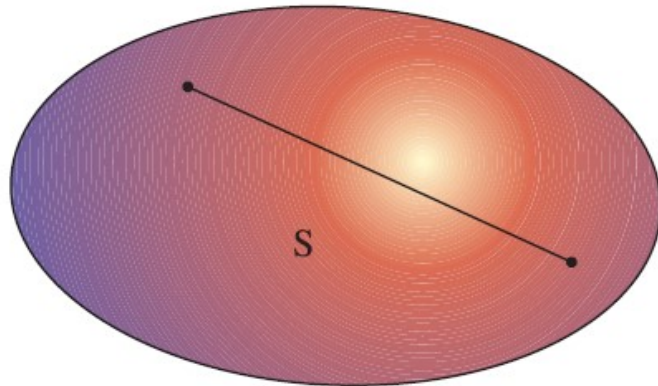


Insieme non convesso di \mathbb{R}^2

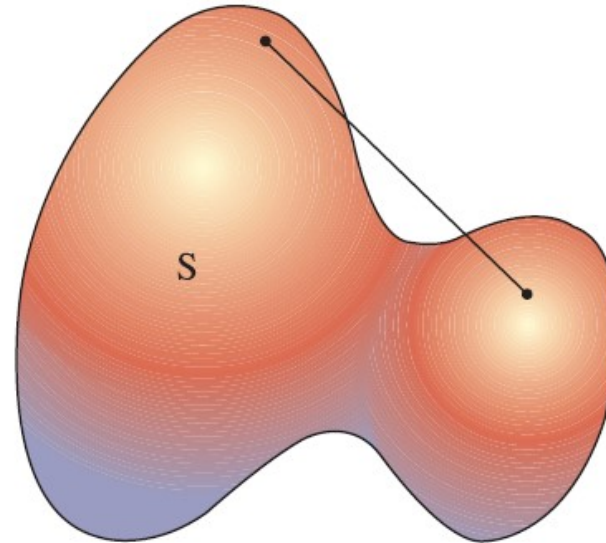
Funzioni convesse e concave

Una **funzione convessa** $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con la proprietà che l'insieme di punti di \mathbb{R}^{n+1} che stanno *sopra* il grafico di $y = f(\mathbf{x})$ è convesso. Ciò si accorda con il concetto di convesso valido per una funzione di una variabile.

Una **funzione concava** $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con la proprietà che l'insieme di punti che stanno *sotto* il grafico di $y = f(\mathbf{x})$ è convesso.

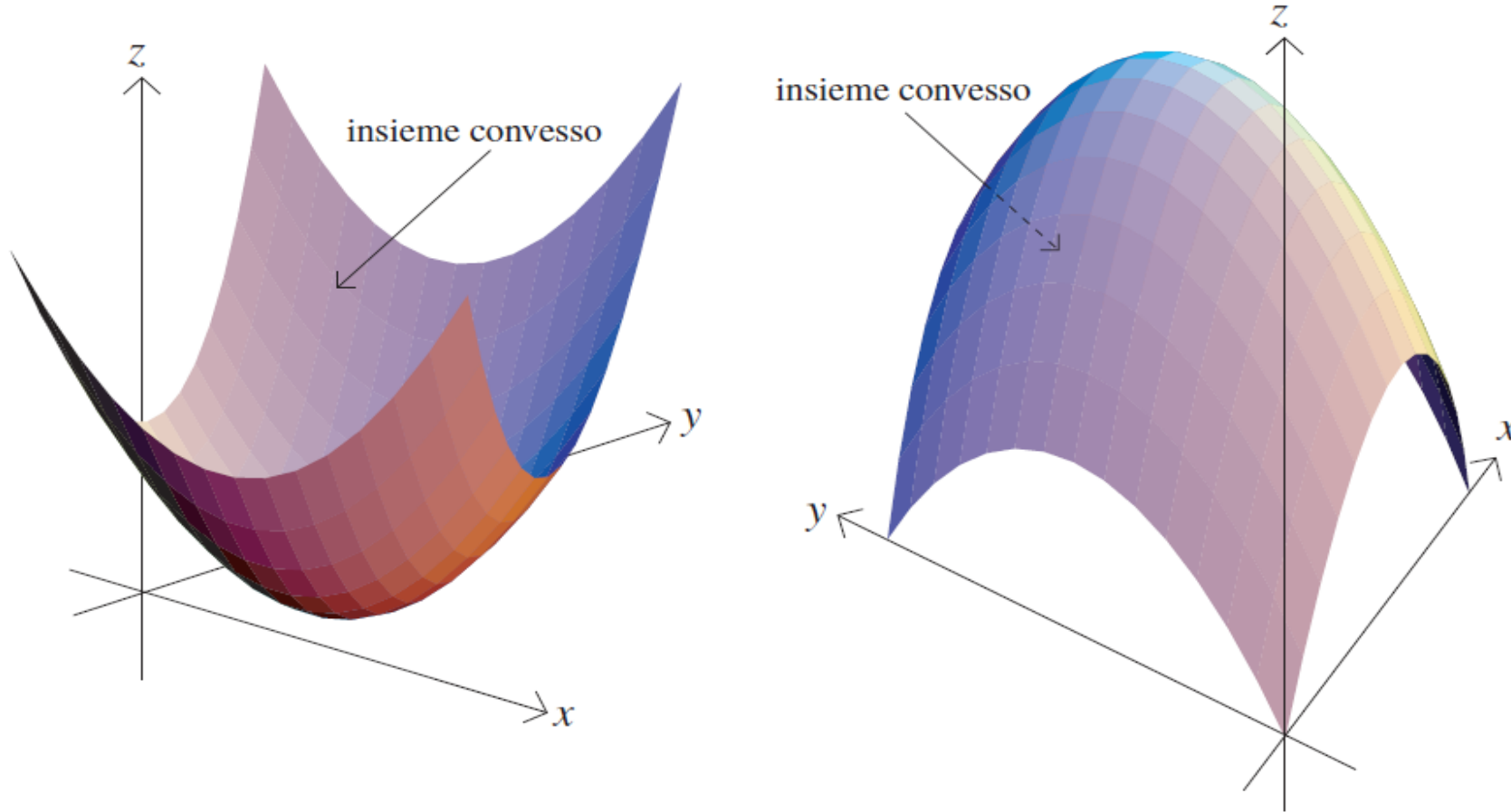


Insieme convesso di \mathbb{R}^3



\mathbb{R}^3

Funzioni convesse e concave



I disegni precedenti chiariscono perché un minimo locale di una funzione convessa è necessariamente un minimo globale e perché un massimo locale di una funzione concava è necessariamente un massimo globale.

Se una funzione $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è differenziabile due volte, è possibile determinare se risulta essere convessa o concava o meno esaminando la derivata seconda.