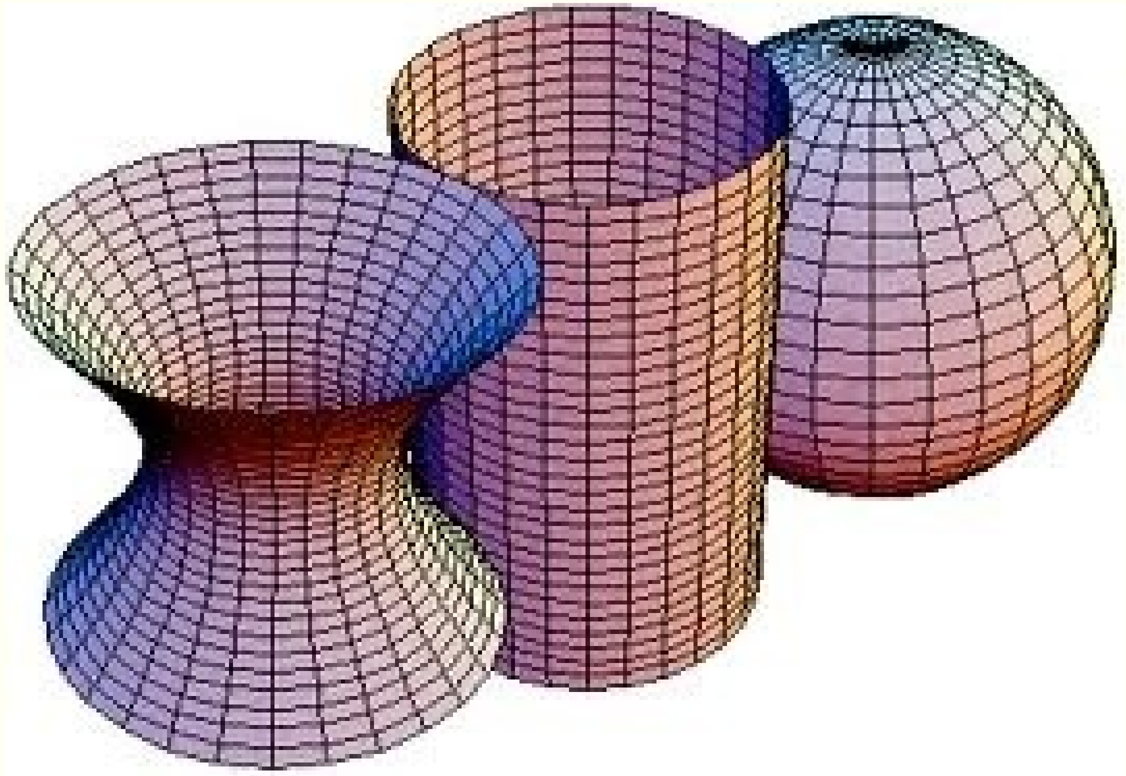
FORME DIFFERENZIALI



Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/2020
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Forme differenziali lineari

Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \rightarrow R$ funzioni continue in Ω. Si definisce forma differenziale ω in Ω l'espressione

$$\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

Data la curva orientata semplice e regolare γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si chiama integrale della forma differenziale lineare (o anche integrale curvilineo di seconda specie), lungo la curva γ, il numero

$$\int_a^b (A\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + B\,\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + C\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t))dt$$

Tale espressione viene anche indicata:

$$\int_\gamma A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

o, anche

$$\int_\gamma \omega$$

Forme differenziali lineari

Con queste operazione, l'insieme delle forme differenziali lineari, definite in un insieme Ω di R, è uno spazio vettoriale.

Per una forma differenziale si possono definire le seguenti operazioni:
I – Dato un vettore $r(r_1, r_2)$ e un punto $(x, y) \in \Omega$, il prodotto scalare tra ω ed r è: $\omega \cdot r = A(x,y)r_1 + B(x,y)r_2$
II – dato uno scalare $c \in R$ ed una funzione definita in Ω e a valori in R, si definisce la moltiplicazione della forma differenziale c per f nel modo seguente: $c \cdot \omega = cXdx + cYdy$ e $f \cdot \omega = (fX)dx + (fY)dy$;
III – date due forme differenziali ω_1 e ω_2 si definisce addizione di ω_1 e ω_2 la seguente forma:

$$\omega_1 + \omega_2 = (X_1dx + Y_1dy) + (X_2dx + Y_2dy) = (X_1 + X_2)dx + (Y_1 + Y_2)dy$$

Osservazione
Consideriamo, ora, il differenziale di una funzione $f(x, y)$. Si ha $df = f_x dx + f_y dy$. Quindi il differenziale di una funzione f si può vedere come una forma differenziale lineare.
Non vale, ovviamente, il viceversa: data una forma lineare, non è detto che ci sia una funzione f il cui differenziale coincida con la forma lineare stessa.

Indipendenza dalla parametrizzazione

***Teorema** - La formula*

$$\int_a^b \left(A\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + B\,\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + C\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\right)dt$$

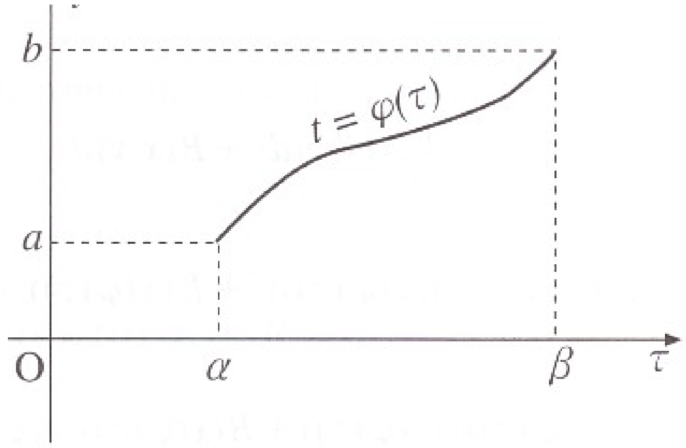
non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Dimostrazione

Si riporta, nelle slides successive, la scannerizzazione del testo Anichini-Conti «Analisi Matematica 2»

Indipendenza dalla parametrizzazione

Facciamo vedere ora che le formule che abbiamo presentato non dipendono dalla parametrizzazione della curva orientata, semplice e regolare γ, ma dipendono solo dall'orientazione della curva stessa.



$$\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b.$$

Indipendenza dalla parametrizzazione

Se $\varphi'(\tau) < 0$, per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$, si ha (si veda la Figura 6.2):

$$\varphi(\alpha) = b, \qquad \varphi(\beta) = a.$$

Indipendenza dalla parametrizzazione

$=$

Indipendenza dalla parametrizzazione

Forme differenziali su curve generalmente regolari

Nel caso di una curve orientata, semplice regolare γ, poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati. Vale, infatti, il seguente teorema:

Teorema
Data una forma differenziale ω e una curva regolare γ si ha:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{+\gamma} \omega$$

Teorema fondamentale per gli integrali curvilinei

Assegnata una funzione $f(x,y)$, si consideri la forma differenziale data dal suo differenziale:

$$\omega = df = f_x dx + f_y dy.$$

Data una curva regolare $+\gamma$ espressa mediante rappresentazione parametrica da $\big(x(t);\ y(t)\big)$(o mediante la funzione vettoriale r), si ha

$$\int_{+\gamma} df = f\big(x(b), y(b)\big) - f(x(a), y(a))$$

o, equivalentemente

$$\int_{+\gamma} \nabla f \cdot dr = f\big(x(b), y(b)\big) - f(x(a), y(a))$$

Su molti testi, l'integrale curvilineo delle forme differenziali viene denominato integrale curvilineo di seconda specie.

Forme differenziali esatte

Definizione
Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ si dice esatta se è il differenziale di qualche funzione, in altre parole, se esiste una funzione detta primitiva della forma ω:

$$f : A \to R$$

di classe C^1 tale che:

$$\omega = df$$

o più esplicitamente se $\forall x \in A$:

$$a_k(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \qquad \forall k = 1,2,\dots,n$$

Formula fondamentale per gli integrali curvilinei di forme esatte
Sia ω una forma differenziale, definita in A ed esatta e sia f una sua primitiva.
Allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(P_2) - f(P_1)$$

dove P_1 e P_2 sono rispettivamente il primo e il secondo estremo della curva γ

Forme differenziali esatte

Formula fondamentale per gli integrali curvilinei di forme esatte
Sia ω una forma differenziale, definita in A ed esatta e sia f una sua primitiva.
Allora
$$\int_\gamma \omega = f(P_2) - f(P_1)$$
dove P_1e P_2 sono rispettivamente il primo e il secondo estremo della cuva γ

Dimostrazione
Sia $f: A \to R$ una primitiva della forma differenziale e siano $x = x(t), y = y(t)$ con $t \in [a, b]$, le equazioni parametriche della curva γ. Ricordando la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha:
$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma a(x,y)dx + b(x,y)dy = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right]dt =$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))] = f\big(x(b), y(b)\big) - f\big(x(a), y(a)\big) = f(P_2) - f(P_1)$$

Forme differenziali chiuse

Definizione
Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ e di classe $C^1(A)$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Osservazione
Se una forma differenziale di classe C^1 è esatta, allora è chiusa; in generale non vale il viceversa. La condizione di essere chiusa, senza opportune ipotesi sul dominio della forma differenziale, non assicura che la forma sia esatta.

Un particolare tipo di insieme ci permette di stabilire alcune importanti proprietà per le forme differenziali, se definite su questi insiemi. Si tratta degli **insiemi semplicemente connessi.**

Domini connessi

Definizione
Un insieme aperto $A \subset R^2$ si dice connesso se, qualunque siano i punti P e Q presi in A, esiste una linea poligonale che è contenuta tutta in A e che ha P e Q come estremi.

Lemma 1
Sia f una funzione di classe C^1 definita in un insieme aperto e connesso A di R^2. Se, $\forall(x, y) \in A$ risulta $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, allora f è una funzione costante in A.

Lemma 2
Se F e G sono primitive, di classe C^1, definite in un insieme aperto e connesso, della stessa forma differenziale lineare ω, allora differiscono per una costante.

Lemma 3
Data $\omega = Xdx + Ydy$ una forma differenziale lineare, di classe C^0 e definita in un insieme aperto e connesso, se F è una sua primitiva, allora ogni primitiva di ω è del tipo $F + cost$.

Forme differenziali esatte: caratterizzazione

Dato un aperto connesso $A \subset R^2$ e data una forma differenziale lineare ω di classe C^0in A, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

I - ω è esatta;

II – se γ è una qualunque curva generalmente regolare, chiusa e contenuta in A, allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

III – Se P_0 e P sono due punti qualunque in A e γ_1 e γ_2 sono due curve generalmente regolari orientate contenute in A, che hanno entrambe come primo estremo P_0 e come secondo estremo P, allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

vale a dire che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi e non dal cammino percorso;

Si veda dimostrazione sul testo Fusco-Marcellini-Sbordone Analisi Matematica due pp. 356-357-358

Insiemi stellati

I criteri di esattezza per le forme differenziali danno delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma differenziale risulti esatta ma sono piuttosto difficili da applicare.
Esistono altre condizioni sufficienti di maggiore utilità pratica ma occorre che tali forme siano definite in particolari aperti di R^n

Definizione
Un insieme A si dice stellato (rispetto a un suo punto x_0) se $\forall x \in A$ il segmento di estremi x_0 e x è tutto contenuto in A:

Ogni insieme convesso è un insieme stellato, mentre non è valido il viceversa.

Un insieme è convesso se e solo se è un insieme stellato rispetto a tutti i punti dell'insieme.

Chiusura ed esattezza

Teorema:
Data $\omega = Xdx + Ydy$ una forma differenziale lineare di classe C^1 in un insieme aperto A di R^2.

$$\omega \text{ esatta} \Longrightarrow \omega \text{ chiusa}$$

Dimostrazione
Se ω è esatta, vuol dire che esiste una primitiva F tale che $F_x = X$ e $F_y = Y$.
Per ipotesi ω è di classe C^1, cioè le derivate parziali di X e Y sono continue. Di conseguenza F è di classe C^2 (poiché le sue derivate parziali del secondo ordine coincidono con le derivate parziali prime di X e Y). Inoltre si ha

$$\frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Per il teorema di Schwartz, le derivate parziali miste di F coincidono, quindi risulta

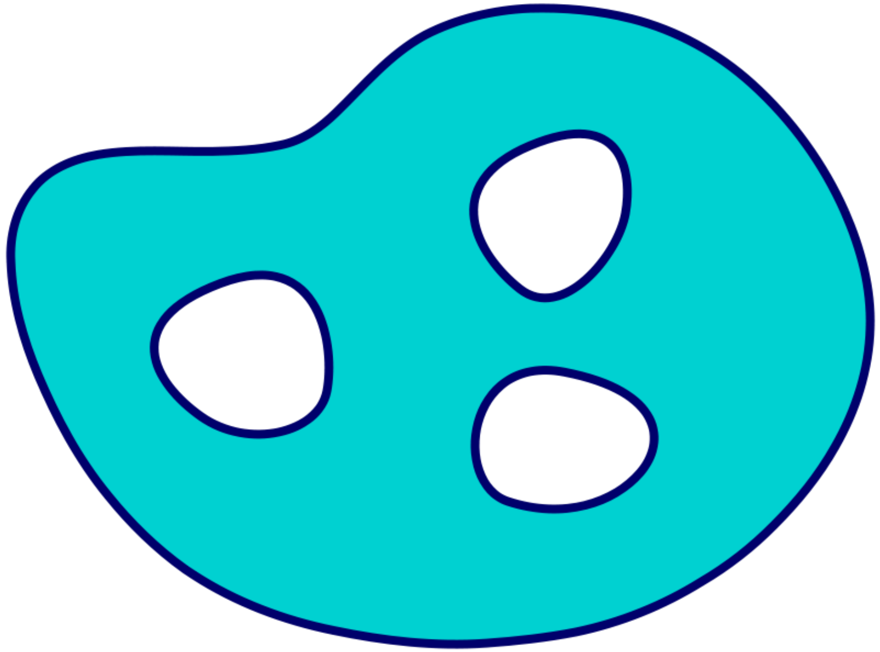
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

L'asserto è provato.

Domini semplicemente connessi

Definizione
Un sottoinsieme di R^2, A aperto, si dice semplicemente connesso se:
1. è connesso
2. ogni curva generalmente regolare, chiusa e semplice contenuta in A è la frontiera di un insieme limitato contenuto in A.

Osservazione
Dire che A è un insieme semplicemente connesso vuol dire che l'insieme è "senza buchi", in quanto ogni curva chiusa e semplice, generalmente regolare, può essere deformata con continuità fino a ridursi ad un singolo punto.
Una corona circolare ha "buchi" e, infatti, non è semplicemente connesso. Il piano privato di un punto non è semplicemente connesso.
L'interno di un cerchio è semplicemente connesso. La circonferenza non è semplicemente connesso.



Forme differenziali in aperti stellati

Teorema
Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A aperto stellato. Allora se ω è chiusa è esatta

Dimostrazione
Supponiamo per fissare le idee che A sia stellato rispetto all'origine. In questo caso, se $x \in A$, il segmento di equazione $\gamma(t) = tx$ che unisce x all'origine è tutto contenuto in A.
Definiamo

$$f(x) = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i(tx)x_i dt$$

Si può far vedere che f(x) è una primitiva della forma differenziale ω, che dunque risulta esatta. Ricordando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}(a_i(tx)x_i)dt$$

Forme differenziali in aperti stellati

Effettuando la derivata a secondo membro e tenuto conto che ω è una forma differenziale chiusa, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}(tx)tx_i) + a_k(tx) \right) dt$$

Posto $g(t) = ta_k(tx)$
risulta

$$g'(t) = a_k(tx) + \sum_{i=1}^{N} t\frac{\partial a_k}{\partial x_i}(tx)x_i)$$

e dunque, in conclusione, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 g'(t)dt = g(1) - g(0) = a_k(x)$$

cosicché

$$df = \omega$$

Teorema
Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A aperto stellato. Allora se ω è chiusa è esatta

Forme differenziali in aperti semplicemente connessi

Teorema.
Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 definita in un aperto $A \subset R^n$ semplicemente connesso. Se la forma differenziale è chiusa allora la forma è anche esatta in A.

Dimostrazione
Consideriamo una forma differenziale $\omega = a(x;\ y)dx + b(x;\ y)dy$, definita in un aperto A di R^2; allora in base ai teoremi di caratterizzazione delle forme esatte occorre provare che per ogni curva regolare a tratti e chiusa, contenuta in A, risulta

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Supponiamo che la curva γ sia semplice ed orientata in senso antiorario, per l'ipotesi della semplice connessione di A possiamo considerare D il dominio limitato in A di cui la curva è la frontiera.
Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \big((a(x,y), b(x,y)), T(x,y)\big)ds = \int_{\partial D} \Big(\big(b(x,y), -a(x,y)\big), N(x,y)\Big)\, ds$$

dove $T(x,y)$ e $N(x,y)$ sono rispetivamente i versori tangente e normale a γ e di conseguenza anche alla frontiera ∂D del dominio D. Essendo la forma chiusa, dal teorema della divergenza*, segue che

$$\int_\gamma \omega = \iint \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy = 0$$