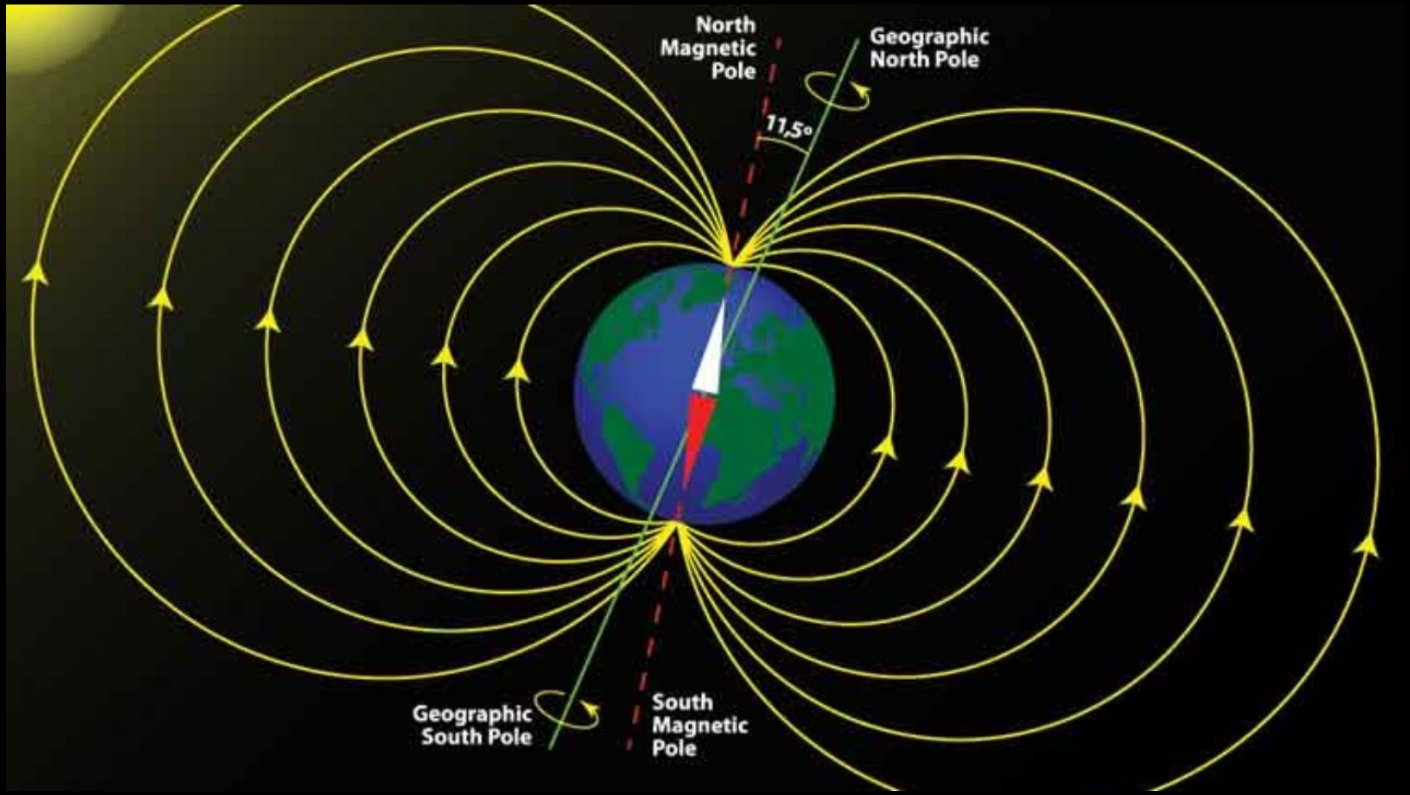
CAMPI VETTORIALI



Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/2020
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Campi vettoriali

Definizione
Si dice campo vettoriale in R^3 un'applicazione continua

$$F\colon \Omega \subset R^3 \to R^3$$

ovvero

$$F(x,y,z) \in \Omega = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$$

con $(x,y,z) \in \Omega$ e con $A, B, C\colon \Omega \to R$ funzioni continue.

Osservazione
Il motivo del nome campo vettoriale è il seguente:
La funzione $F(x,y,z)$ associa ad ogni punto P$(x,y,z) \in \Omega$ il punto $P' = F(x,y,z)$. Poiché il punto P'determina il vettore $\overline{OP'}$ applicato nell'origine, possiamo dire che la funzione $F(x,y,z)$ associa ad ogni punto P il vettore $\overline{OP'}$. Se poi consideriamo il vettore $\bar{v}$ applicato nel punto P ed equivalente al vettore $\overline{OP'}$, possiamo dire che la funzione $F(x,y,z)$ associa a ogni punto P di Ω uno ed un solo vettore $\bar{v}$ applicato in P

Campi vettoriali

Ad esempio il campo vettoriale

$$F: R^3 \backslash \{0,0,0\} \to R^3$$

così definito:

$$F(x,y,z) = GM\left(\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, rappresenta il campo di forza gravitazionali, cioè la forza generata da un corpo di massa M, posto nell'origine, che agisce su un corpo di massa unitaria, posto nel punto $P(x,y,z)$.

Se poniamo $\bar{r} = (x,y,z) = P$ l'espressione precedente può essere scritta anche nel seguente modo più compatto:

$$F(P) = -\frac{GM\bar{r}}{\|\bar{r}\|^3}$$

Il modulo di $F(P)$ è dato da

$$\|F(P)\| = \frac{GM}{\|\bar{r}\|^2}$$

Lavoro di una forza

Un esempio in cui vediamo applicata una forma differenziale in fisica è il lavoro compiuto da un campo di forze. Se consideriamo una particella che si muove lungo una curva, indicando con $\bar{s}$ la distanza percorsa dalla particella lungo la curva $+\gamma$, e con $\bar{F} = (X, Y)$ una forza che agisce sulla particella mentre essa si sposta di un tratto $d\bar{s}$, si definisce lavoro elementare eseguito da $\bar{F}$ il prodotto scalare:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

In coordinate cartesiane, e limitandoci al caso bidimensionale, si può scrivere

$$dL = Xdx + Ydy$$

Il lavoro elementare è dunque una forma differenziale.

Il lavoro totale lungo tutta la curva $+\gamma$ è definito tramite l'integrale della forma differenziale dL:

$$L = \int_{+\gamma} dL = \int_a^b X\big(x(t), y(t)\big)dx + Y\big(x(t), y(t)\big)dy$$

Circuitazione

Se indichiamo con T il versore tangente a γ, cioè:

$$T(t) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}$$

si può anche scrivere:

$$L = \int_\gamma dL = \int_\gamma F \cdot T \cdot ds$$

Nel caso in cui γ sia una curva chiusa, l'integrale

$$\int_\gamma F \cdot T \cdot ds$$

viene anche detto *circuitazione* di ***F*** lungo γ, e indicato con il simbolo

$$\oint F \cdot T \cdot ds$$

L'operatore nabla

Alcuni concetti e grandezze della fisica, in particolare in elettrologia, sono legati alle derivate spaziali di campi scalari e vettoriali. Queste operazioni si prestano ad essere rappresentate convenientemente per mezzo dell'operatore vettoriale nabla (detto anche atled nel mondo anglosassone) indicato col simbolo ∇ Esso è definito nel seguente modo:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

L'operatore nabla può essere applicato a funzioni della posizione (campi) sia scalari che vettoriali e si può dimostrare che nel calcolo dei risultati è lecito considerarlo come un normale vettore e applicare le regole usuali dell'algebra vettoriale.

L'operatore nabla

I modi di applicare l'operatore nabla sono 3

Gradiente

Divergenza

Rotore

L'operatore nabla viene applicato direttamente a uno scalare e produce una grandezza vettoriale $\nabla s = \boldsymbol{i}\frac{\partial s}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial s}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial s}{\partial z} = grad\ s$	In questo caso nabla opera tramite il prodotto scalare su una grandezza vettoriale e produce un risultato scalare $\nabla \cdot w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = div\ w$	In questo caso nabla opera tramite il prodotto vettoriale su una grandezza vettoriale e produce un risultato vettoriale $\nabla \times w = rot\ w$

Il Gradiente

Il **gradiente** di una funzione a valori reali (ovvero di un campo scalare) è una funzione vettoriale.
Il gradiente di una funzione è spesso definito come il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione (anche se questo vale solo se si utilizzano coordinate cartesiane ortonormali)
In altri termini, Il gradiente della funzione reale f *è il vettore normale alla superficie di equazione* $f(x, y, z) = 0$ *nel punto* (x, y, z) *definito da*

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z} = grad\ f$$

dove $f: A \subset R^3 \rightarrow R$ *aventi derivate parziali prime in A.*

Proprietà del Gradiente

- Se per una coppia di campi vale la relazione $\nabla s = w$, la stessa relazione vale per qualsiasi altro campo scalare $s'(x, y, z) = s(x, y, z) + c$, dove c è una costante.
- In ogni punto la direzione del gradiente corrisponde a quella in cui il campo scalare cresce più velocemente.
- Un campo posizionale s per cui $\nabla s = w$ viene comunemente chiamato potenziale (scalare) del campo vettoriale w

La Divergenza

La divergenza è una quantità scalare che determina la tendenza delle linee di flusso di un campo vettoriale a confluire verso una sorgente o diramarsi (divergere) da essa. Tale comportamento può essere descritto considerando una regione di spazio e osservando il flusso(uscente o entrante) del campo vettoriale attraverso la superficie (chiusa) che delimita tale regione: se il flusso è uscente il campo si comporta come se all'interno della regione ci fosse una "sorgente", mentre se è entrante è come se ci fosse un "pozzo".

Definizione

Si consideri la funzione vettoriale $\mathbf{v}: A \subset R^3 \rightarrow R^3$ e si supponga che essa abbia derivate parziali prime in A, allora è possibile definire la divergenza di $\mathbf{v}$ come segue:
la divergenza della funzione vettoriale $\mathbf{v}: A \subset R^3 \rightarrow R^3$ *è uno scalare dato da*

$$div\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Il rotore

Dato in R^3 il campo vettoriale $F = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ che supponiamo di classe C^1, indichiamo con rotF il campo vettoriale

$$rotF = (C_y - B_x)\hat{\imath} - (C_x - A_z)\hat{\jmath} + (B_x - A_y)\hat{k}$$

che si ottiene sviluppando il determinante della seguente matrice simbolica

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Teorema
Il campo vettoriale $F = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ di classe C^1 è irrotazionale se esso ammette rotore nullo

Teorema
Il campo vettoriale $F = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ è irrotazionale se e solo se la forma differenziale

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

è chiusa

Campi conservativi

Così come la definizione di campo di forze irrotazionale deriva da quella di chiusura di una forma differenziale, allo stesso modo la definizione di campi di forze conservativi discende da quella di esattezza di una forma differenziale, vale infatti la seguente

Definizione 1
Un campo vettoriale $F(a, b, c)$ è conservativo se e solo se la forma differenziale

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

è esatta.

In genere una definizione di campo conservativo del tutto equivalente alla precedente è la seguente.

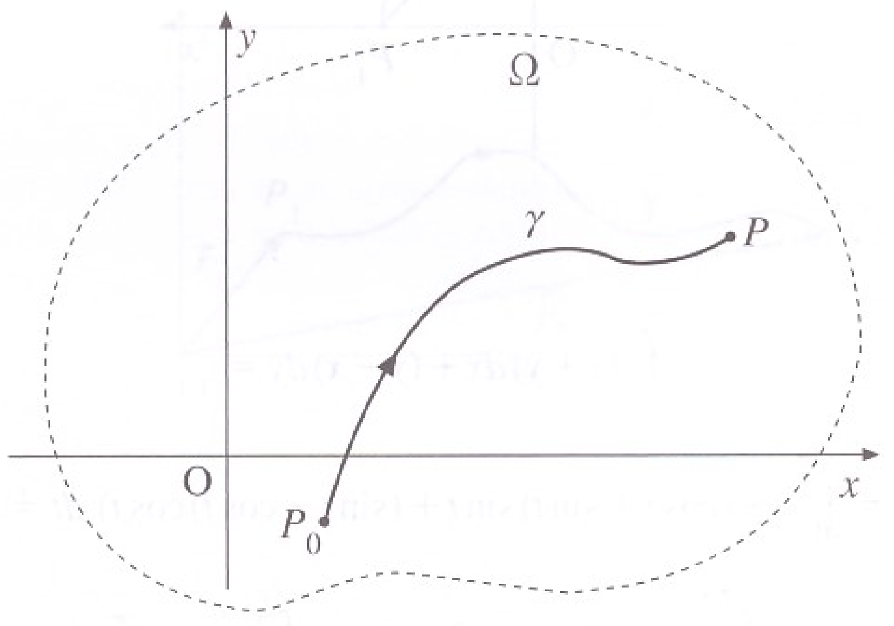
Definizione 2
Un campo vettoriale $F(a, b, c)$ è conservativo se esiste una funzione U: $A \subset R^3 \to R$ di classe C^1 in A, tale che il gradiente di U coincida con F in A:

$$\boldsymbol{\nabla U(x, y, z) = F(x, y, z)}$$

La funzione U è anche detta potenziale del campo.

Campi conservativi

Teorema
Un campo vettoriale definito in un insieme aperto e connesso $\Omega \subset R^2$ è conservativo sse, $\forall P_0, P_1 \in \Omega$ il lavoro compiuto lungo una curva orientata, semplice e generalmente regolare γ, contenuta in Ω e congiungente P_0 e P_1 (nel verso che va da P_0 a P_1) è indipendente dalla curva γ



Dimostrazione
Fissiamo un punto $P_0(x_0, y_0) \in \Omega \subset R^2$ e prendiamo un generico altro punto $P(x, y) \in \Omega$. Definiamo

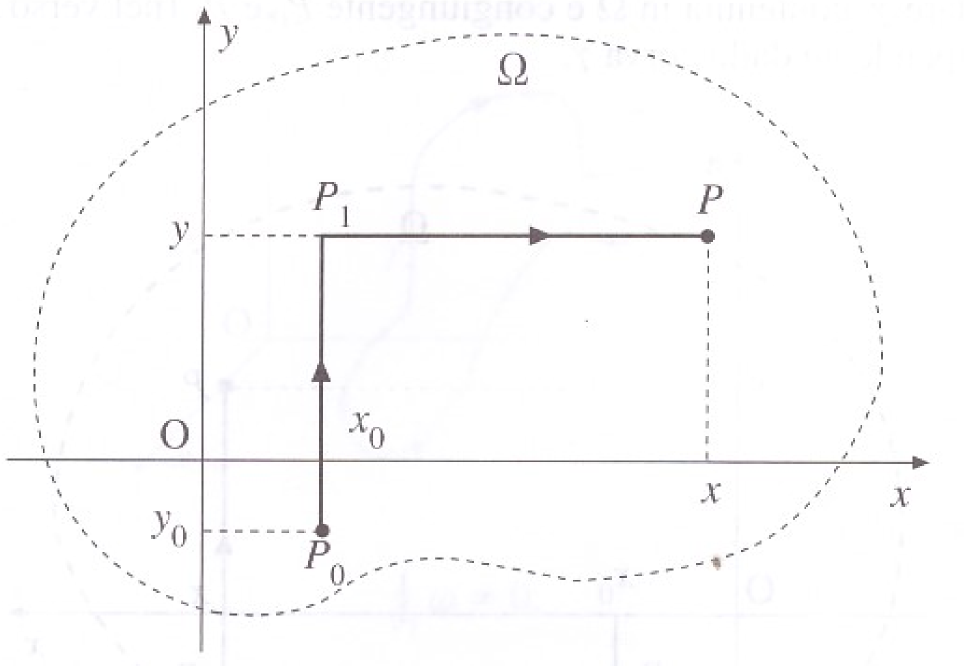
$$U = \int_{\gamma} A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

dove γ è una qualunque curva orientata, semplice e generalmente regolare contenuta in Ω, che unisce i punti P_0 e P_1

La funzione $U(x, y)$ è ben definita perché l'integrale che compare al secondo membro è indipendente dalla curva γ; inoltre esiste almeno una curva orientata, semplice e generalmente regolare che unisce P_0 con P_1 . Infatti essendo Ω un insieme aperto e connesso sappiamo che esiste una spezzata di estremi P_0 e P_1 tutta contenuta in Ω

Campi conservativi

Supponiamo per semplicità che la spezzata sia formata da due segmenti (analogamente avviene per più segmenti)



Facciamo vedere che si ha:

$$U_x(x,y) = A(x,y), U_y(x,y) = B(x,y)$$

Prendiamo come curva γ la spezzata in figura. I punti del segmento P_0P_1 hanno coordinate $(x_0,t), y_0 \leq t \leq y$; i punti del segmento P_1P hanno coordinate $(t,y), x_0 \leq t \leq x$.

Abbiamo allora:

$$U(x,y) = \int_{y_0}^{y}(A(x_0,t)0 + B(x_0,t))dt + \int_{x_0}^{x}(A(t,y) + B(t,y)0)dt = \int_{y_0}^{y}(B(x_0,t))dt + \int_{x_0}^{x}\big(A(t,y)\big)dt$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $U_y(x,y) = B(x,y)$

Campi conservativi

Teorema
Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e connesso e sia $F: \Omega \to R^3$ un campo vettoriale. Allora $F(x,y,z) = \big(A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z)\big)$ è conservativo sse si ha:

$$\int_\gamma A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz = 0$$

per ogni curva orientata, semplice, generalmente regolare e chiusa contenuta in Ω.

Dimostrazione
È chiaro che se il campo vettoriale è conservativo, allora per ogni curva semplice regolare e chiusa γ contenuta in Ω si ha:

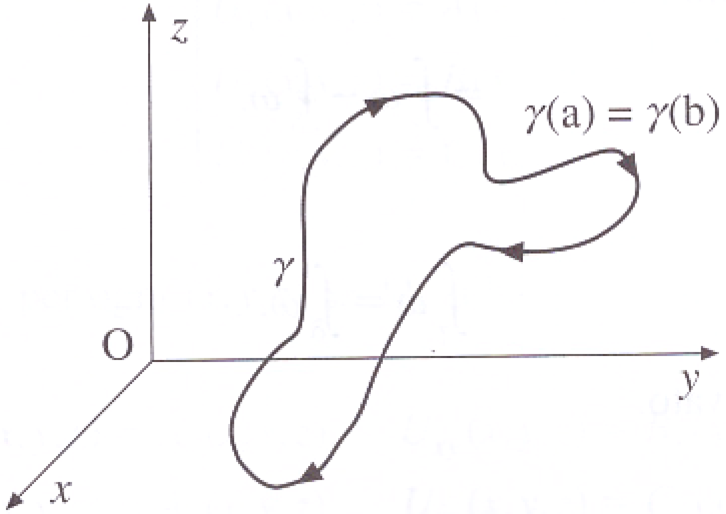
$$\int_\gamma A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz = U\big(x(b), y(b), z(b)\big) - U\big(x(a), y(a), z(a)\big)$$
$$= U\big(\gamma(b)\big) - U\big(\gamma(a)\big) = 0$$

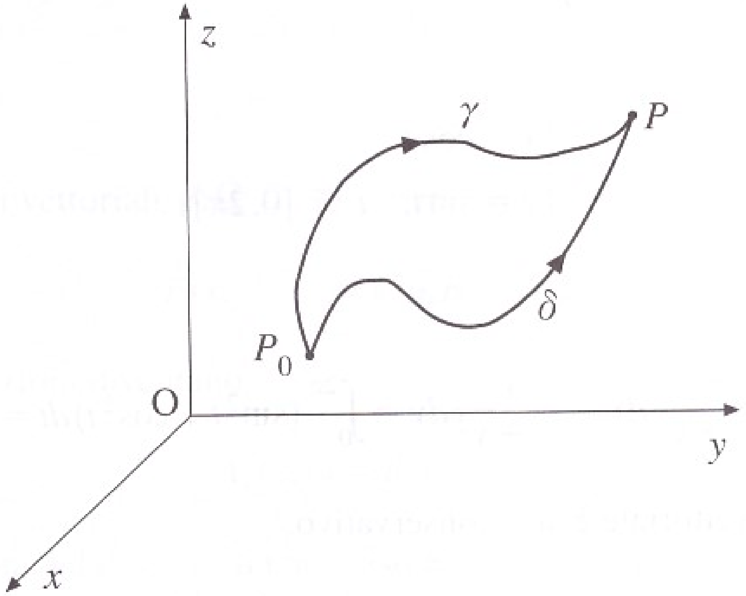
Viceversa, supponiamo che valga la formula della tesi e riscriviamola nel seguente modo:

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

Siano P_0 e P due punti qualunque di Ω. Facciamo vedere che l'integrale è indipendente dalla curva semplice e generalmente regolare che unisce i punti P_0 e P nel verso che va da P_0 a P

Campi conservativi





Siano γ e δ due curve orientate, semplici, generalmente regolari e contenute in Ω che uniscono i punti P_0 e P .
Sia γ_1 la curva formata dall'unione delle curve γ e $-\delta$. Chiaramente γ_1 è una curva orientata semplice chiusa generalmente regolare; dunque dalle ipotesi si ha che

$$\oint_{\gamma_1} \omega = 0$$

Ma abbiamo:

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma} \omega + \oint_{-\delta} \omega = 0$$

e cioè:

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\delta} \omega$$

Caratterizzazione dei campi conservativi

Sia $F: A \subset R^3 \to R^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I – F è conservativo (cioè ammette una funzione potenziale);

II – date due curve γ_1 e γ_2 continue in A e aventi gli stessi estremi (nell'ordine), si ha:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot T \cdot ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T \cdot ds$$

III – data una qualunque curva chiusa γ contenuta in A, la sua circuitazione è nulla:

$$\oint F \cdot T \cdot ds = 0$$