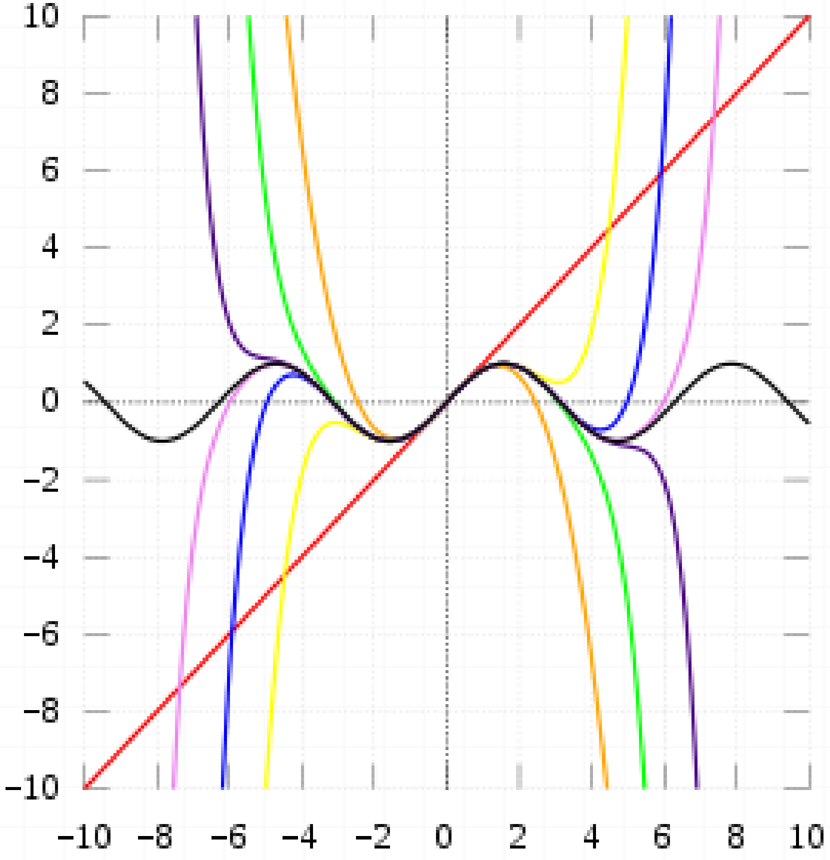
SERIE DI FUNZIONI E DI POTENZE



Prof. Roberto Capone

A.A. 2019/20
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Serie di funzioni

Definizione

Sia $\{f_k(x)\}_{k\in N}$ una successione di funzioni reali definite in un intervallo $X \subset R$. Sia $\{S_n\}_{n\in N}$ la successione delle somme parziali:

$$S_1(x) = f_1(x);$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x);$$
$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x);$$
$$\ldots\ldots$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x);$$

Tale successione di funzioni si chiama «serie di funzioni di termine generale $f_k(x)$ e si indica come

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Definizione
La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente (in X) se

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

converge puntualmente (in X), il che equivale a dire che $\exists S(x)$ (detta domma della serie) tale che:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon, x) \in N\colon\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > \nu$$

Definizione
La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente (in X) se

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

converge uniformemente (in X), il che equivale a dire che $\exists S(x)$ (detta domma della serie) tale che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in N\colon\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > \nu$$

Convergenza totale

Definizione
La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge totalmente (in X) se esiste una successione numerica $\{M_n\}_{n \in N}$ positiva $(M_n > 0)$ tale che:

1. $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in X, \forall n \in N$;
2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge

Ciò equivale a richiedere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x)|$$

converga.

Criteri per la convergenza

Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente in $X \subset R$ se e solo se:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon, x) \in N: \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon, \forall m > \nu, \forall n > m$$

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente in $X \subset R$ se e solo se:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in N: \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon, \forall m > \nu, \forall n > m$$

Criterio di Weierstrass

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ una serie convergente totalmente in X, allora essa converge anche uniformemente in X (ma non viceversa)

Serie di funzioni note

Serie geometrica		
$\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \boldsymbol{x^n}$	$\boldsymbol{D = R; I =]-1;1[}$	$\boldsymbol{S(x) = \dfrac{x^k}{1-x}}$
Serie esponenziale		
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}{n!}$	$\boldsymbol{D = R; I = R}$	$S(x) = e^x$
Serie di Leibnitz		
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$	$D = R\backslash Z^-;\quad I = D$	$S(x) = \dfrac{1}{x+1}$
Serie di Mc Laurin del coseno		
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2n}}}{(2n)!}$	$\boldsymbol{D = R; I = D}$	$S(x) = cosx$

Serie di Mc Laurin del seno		
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\boldsymbol{x}^{2n+1}}{(\boldsymbol{2}n+1)!}$	$\boldsymbol{D=R; I=D}$	$\boldsymbol{S(x)=sinx}$
Serie di Mc Laurin del coseno iperbolico		
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}^{2n}}{(2n)!}$	$\boldsymbol{D=R; I=D}$	$S(x)=coshx$
Serie di Mc Laurin del seno iperbolico		
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}^{2n+1}}{(\boldsymbol{2}n+1)!}$	$\boldsymbol{D=R; I=]-1,1[}$	$S(x)=sinhx$
Serie logaritmica		
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\boldsymbol{x^n}}{n}$	$\boldsymbol{D=R; I=]-1,1[}$	$S(x)=\log(1+x)$
Serie dell’arcotangente		
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}^{2n+1}}{(2n+1)}$	$\boldsymbol{D=R; I=]-1,1[}$	$S(x)=artgx$

Serie di potenze

Definizione
Si definisce serie di potenze la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-x_0)^n = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)^2 + \cdots f_n(x-x_0)^n$$

dove
- $\{f_n\}_{n\in N}$ è una successione numerica reale
- x è una variabile reale;
- $f_n(x-x_0)^n$ prende il nome di termine generale della serie
- f_n prende il nome di coefficiente n-esimo della serie
- Il numero reale x_0 è detto centro della serie di potenze suddetta

Poiché si può pensare di cambiare variabile tramite una traslazione ponendo

$$y = x - x_0$$

Si potrà anche scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot y^n$$

supponendo che il centro sia $x_0 = 0$

Raggio di convergenza

Definizione
Si definisce raggio di convergenza di una serie di potenze, l'estremo superiore $\rho \in [0, +\infty[$ dell'insieme in cui la serie converge puntualmente

Definizione
L'insieme di convergenza è un intervallo detto intervallo di convergenza della serie

La serie di potenze converge solo in 0, ovvero la serie converge solo nel centro

$$\rho = 0$$

La serie di potenze converge $\forall x \in R$

$$\rho = +\infty$$

La serie di potenze converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$

$$\rho = r$$

Criterio di convergenza della radice

Criterio di convergenza di Cauchy-Hadamard o della radice

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot y^n$ converge nell'intervallo di convergenza di raggio ρ tale che:

$$\rho = \begin{cases} 0 & se\ L = +\infty \\ \dfrac{1}{L} & se\ 0 < L < +\infty \\ +\infty & se\ L = 0 \end{cases}$$

dove

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n|}$$

se tale limite esiste

Criterio di convergenza del rapporto

Criterio di convergenza di D'Alembert o del rapporto

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot y^n$ converge nell'intervallo di convergenza di raggio ρ tale che:

$$\rho = \begin{cases} 0 & se\ L = +\infty \\ \dfrac{1}{L} & se\ 0 < L < +\infty \\ +\infty & se\ L = 0 \end{cases}$$

dove

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right|$$

se tale limite esiste

La serie di Taylor di una funzione

Definizione

Data una funzione $f(x)$ indefinitamente derivabile in un intorno I di x_0, chiamiamo serie di Taylor relativa a $f(x)$ e al punto iniziale x_0 la serie di potenze di $(x - x_0)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = 2^x$.

$f(x)$ è derivabile indefinitamente in ogni punto. Scegliamo $x_0 = 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} f^{(n)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} 2(\ln 2)^n = 2 + (x-1)\, 2(\ln 2) + \frac{(x-1)^2}{2} 2(\ln 2)^2 + \ldots \;.$$

La serie di Mc Laurin di una funzione

Nella serie di Taylor, scegliamo il punto iniziale $x_0 = 0$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) =$$

$$= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \ .$$

Questo sviluppo è detto di Maclaurin.

Nello sviluppo di Maclaurin, il fattore

$$(x - x_0)^n$$

che compare nei termini della serie di Taylor,
diventa semplicemente:

$$x^n.$$

ESEMPIO

Scriviamo la serie di Maclaurin di 2^x
.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (\ln 2)^n$$

$$= 1 + x \ln 2 + \frac{x^2}{2} (\ln 2)^2 + \ldots \ .$$

Lo sviluppo in serie

Definizione

Una funzione $f(x)$ indefinitamente derivabile in un intorno I di x_0 si dice **sviluppabile in serie di Taylor** nel punto x_0 se la relativa serie di Taylor converge e la somma della serie coincide con la funzione, $\forall x \in I$

In simboli:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)\,,\ \forall x \in I\,.$$

Se $x_0 = 0$, la funzione si dice **sviluppabile in serie di Maclaurin**.

Esempio

Consideriamo $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

La funzione è indefinitamente derivabile in $x = 0$ con tutte le derivate nulle in tale punto.

La serie di Maclaurin è

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} 0 = 0$$

e converge a 0 per ogni valore di x .

La somma della serie **non coincide** con la funzione.

Non tutti gli sviluppi in serie di Taylor (o Maclaurin) convergono a $f(x)$.

Lo sviluppo in serie

Teorema (Condizione sufficiente per la sviluppabilità)

Data una funzione $f\,(x)$ derivabile indefinitamente **in un intorno *I*** di x_0, se **esiste un numero** $L > 0$ tale che

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq L\,,\ \forall x \in I \ \ e \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

allora $f\,(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor in tutto I con punto iniziale x_0.

Gli sviluppi in serie di Maclaurin

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Per questa funzione, $f^{(n)}(x) = e^x$,

tutte le derivate coincidono con la funzione e^x .

Scegliamo l'intorno di x_0: $I = [-d\,;\,d\,]$.

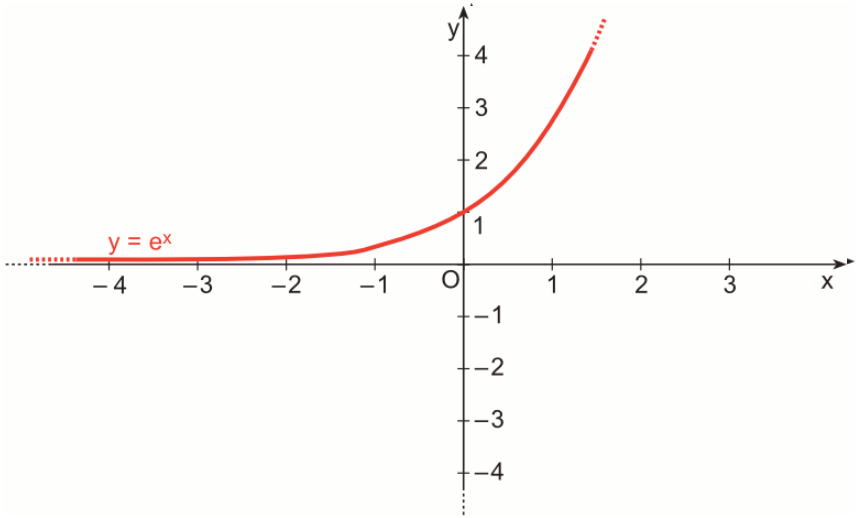
Per tutte le $x \in I$, $e^{-d} \le f^{(n)}(x) \le e^d$.

Per ogni d , ponendo $L = e^d$, si ha dunque $\boldsymbol{|f^{(n)}(x)| \le L}$ qualunque sia n.

La funzione è sviluppabile in serie Maclaurin su tutto $\mathbb{R}$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

L'approssimazione migliora man mano che si aggiungono termini alla somma.



Gli sviluppi in serie di MacLaurin

$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$

$f^{(n)}(x) = -\text{sen } x$, per n = 1, 5, 9, ...

$f^{(n)}(x) = -\cos x$, per n = 2, 6, 10, ...

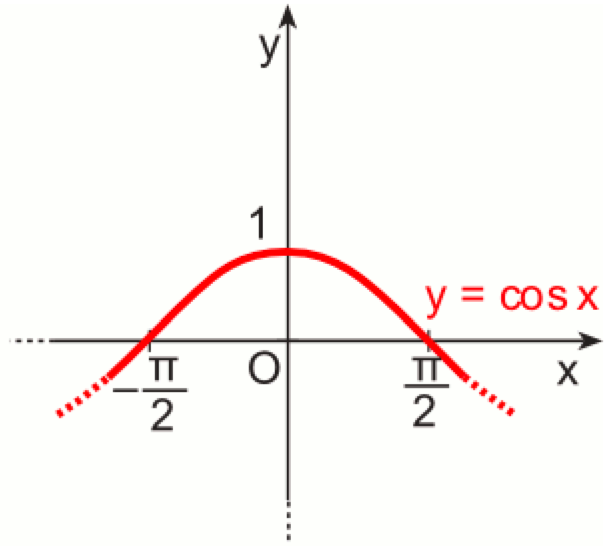
$f^{(n)}(x) = \text{sen } x$, per n = 3, 7, 11, ...
$f^{(n)}(x) = \cos x$, per n = 4, 8, 12, ...

Per ogni x,
$|\,\text{sen } x\,| \leq 1$ e $|\cos x\,| \leq 1$,

e perciò $\quad \boldsymbol{|\,f^{(n)}(x)\,| \leq 1}$ **.**

La funzione è sviluppabile
in serie di Maclaurin su tutto $\mathbb{R}$.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$



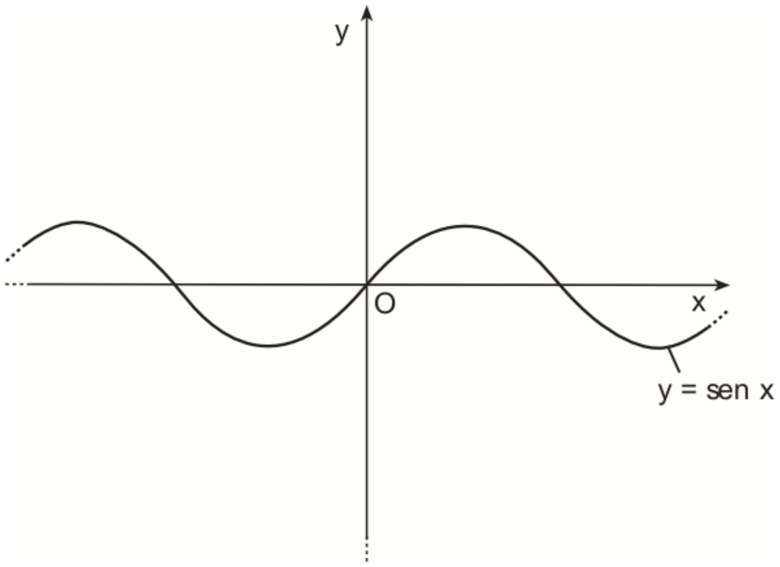
Gli sviluppi in serie di MacLaurin

f* (*x*) = sen *x

La discussione è del tutto analoga a quella di $f(x) = \cos x$.

→ La funzione è sviluppabile in serie di Maclaurin su tutto $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$



Gli sviluppi in serie di MacLaurin

f **(*x*) = ln (1+*x*)**

Le derivate della funzione non sono equilimitate in nessun intorno di $x = 0$.

Dunque non vale la condizione sufficiente per la sviluppabilità.

Nonostante questo, si può dimostrare che la serie di Maclaurin converge ai valori della funzione nell'intervallo]–1 ; 1[.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

f **(*x*) = arctg *x***

La derivata di arctg x è $\frac{1}{1+x^2}$

Se $x^2 < 1$, questa espressione equivale alla somma di una serie geometrica di ragione $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x^2)^n \quad .$$

Integrando la serie si ottiene lo sviluppo di arctg x valido in] –1; 1[.

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo la serie di Taylor della funzione $f(x) = \sqrt{e^x}$, con punto iniziale 1.

Riscriviamo $f(x)$:

$$f(x) = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x}.$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}f(x), \quad f''(x) = \frac{1}{2}f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 f(x).$$

La derivata n-esima vale:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}f^{(n-1)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f(x).$$

Quindi la serie di Taylor è:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{e}\,(x-1)^n}{2^n n!}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Utilizzando gli sviluppi notevoli, sviluppiamo in serie di Maclaurin indicando l'intervallo di convergenza.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}$$

Essendo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}} = (1+2x)^{-\frac{1}{3}},$$

utilizziamo la serie binomiale, con $\alpha = -\frac{1}{3}$ e $2x \in \left]-1;1\right[$, cioé $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$,

$$(1+2x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1!}2x + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(2x)^2 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}(2x)^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 - \frac{112}{81}x^3 + \ldots$$