Prof. Roberto Capone

Funzioni reali di una variabile reale

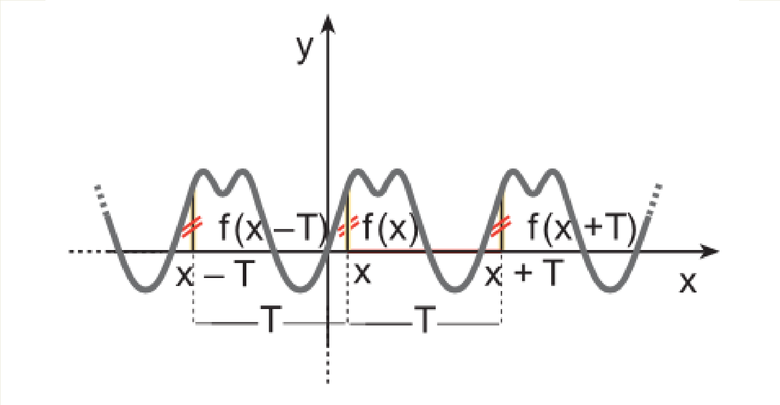
Corso di Analisi Matematica I
2020/2021
Laurea in Ingegneria Aerospaziale/Meccanica

Le funzioni periodiche

DEFINIZIONE

Funzione periodica
Una funzione $y = f(x)$ si dice periodica di periodo T, con T > 0, se, per qualsiasi numero k intero, si ha:

$$f(x) = f(x + kT).$$

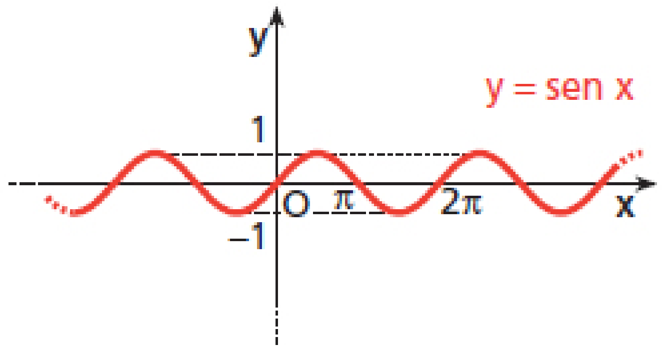


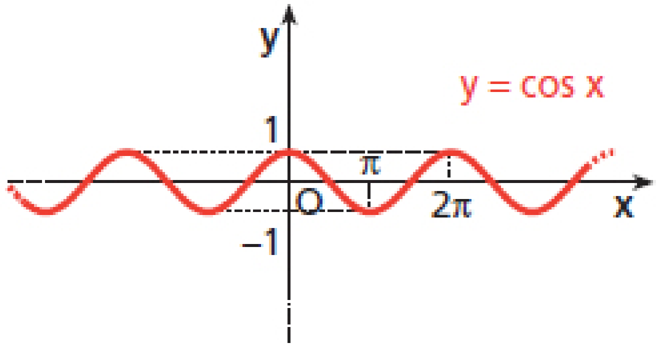
ESEMPIO

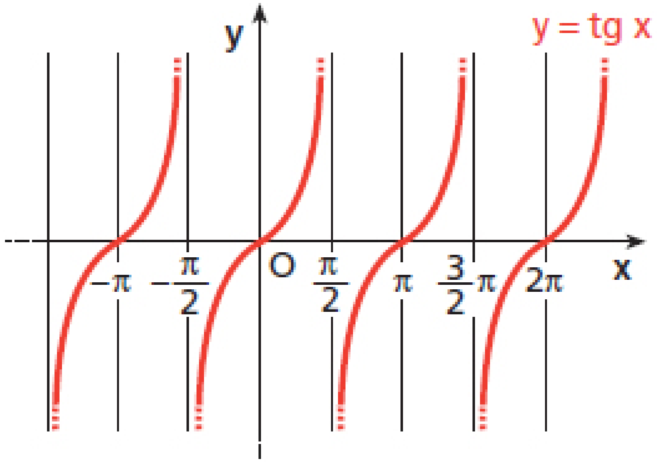
y = sen (x) è periodica di periodo 2π perché sen (x) = sen $(x + 2k\pi)$.

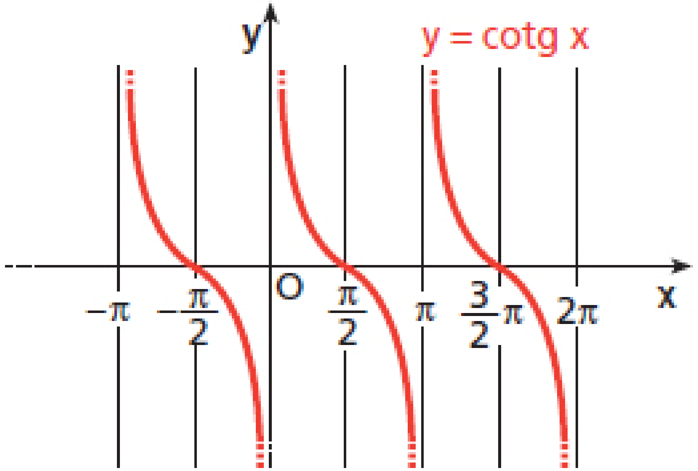
y = tg (x) è periodica di periodo π perché tg (x) = tg $(x + k\pi)$.

Le funzioni trigonometriche



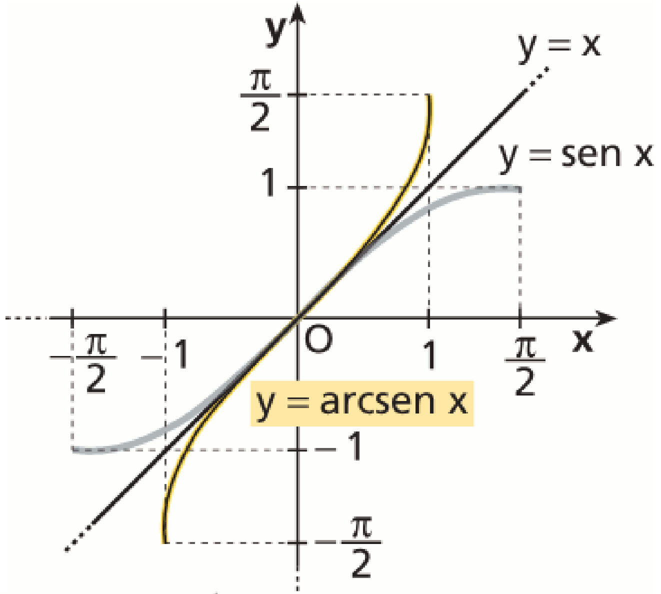




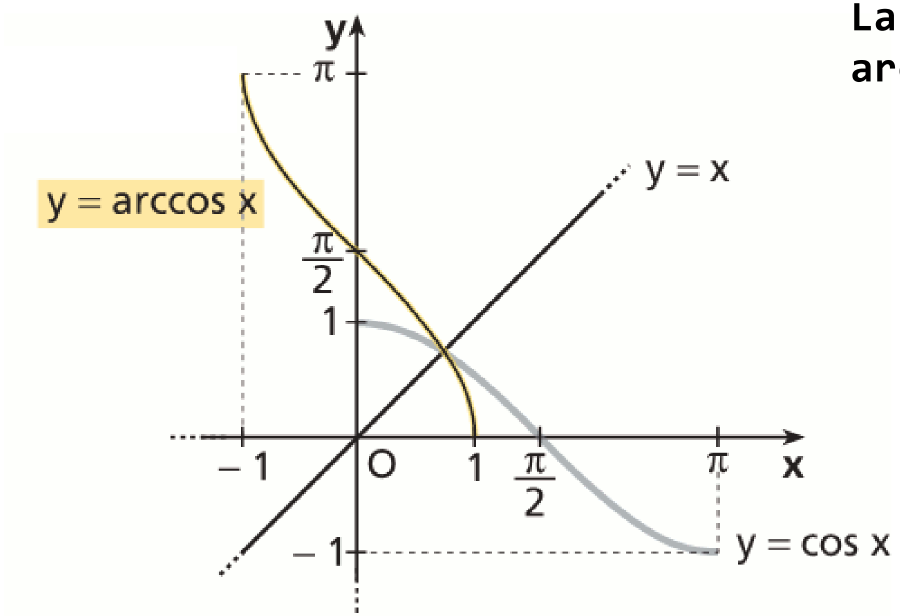


Le funzioni trigonometriche inverse

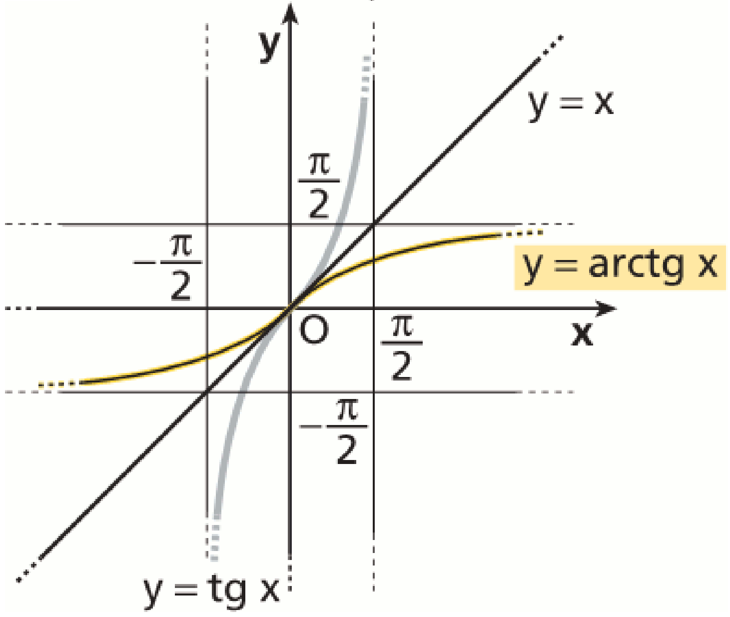
La funzione arcoseno



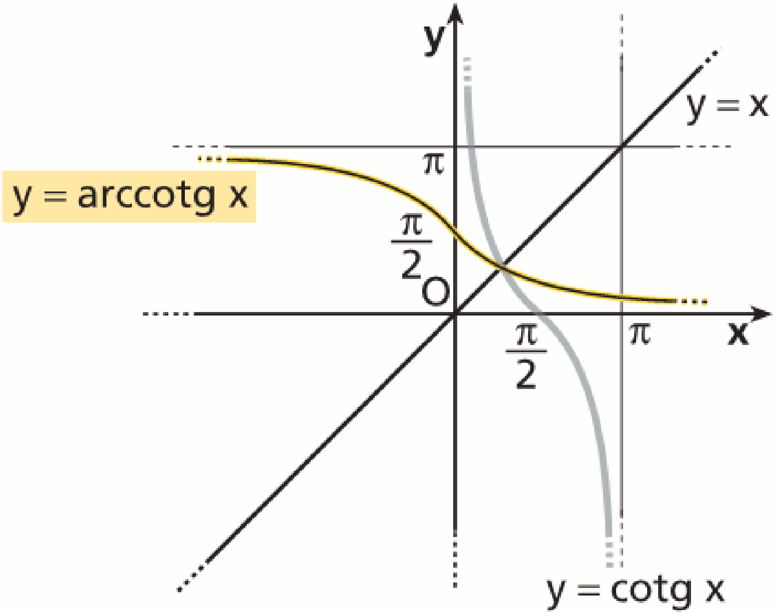
La funzione arcocoseno



La funzione arcotangente

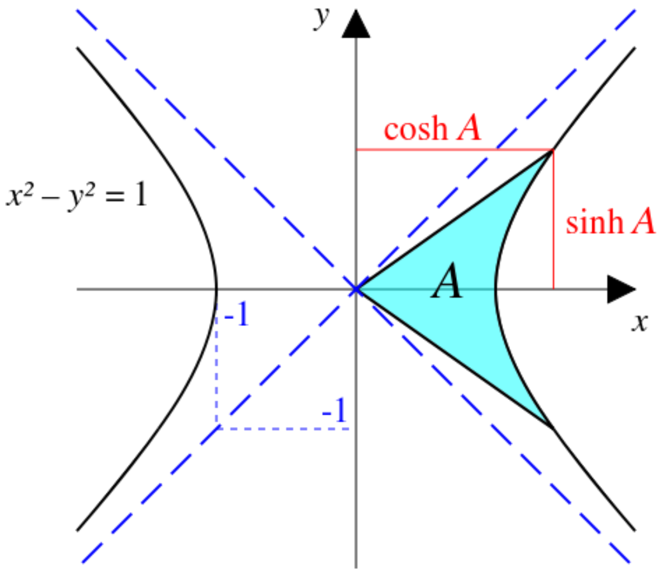


La funzione arcocotangente



Le funzioni iperboliche

Le **funzioni iperboliche** costituiscono una famiglia di funzioni speciali dotate di alcune proprietà analoghe a corrispondenti proprietà delle ordinarie funzioni trigonometriche.
Data una iperbole equilatera unitaria, quindi con $a = b = 1$, centrata con gli assi sugli assi coordinati e dato un angolo α , consideriamo il settore iperbolico di area α/2 : questo determina un punto **P** come intersezione con l'iperbole; definiamo quindi **seno iperbolico** $sinh$ l'ordinata del punto **P** e **coseno iperbolico** $cosh$ l'ascissa del punto **P**.



Le funzioni iperboliche ed esponenziali

È possibile legare le funzioni iperboliche alla funzione esponenziale:

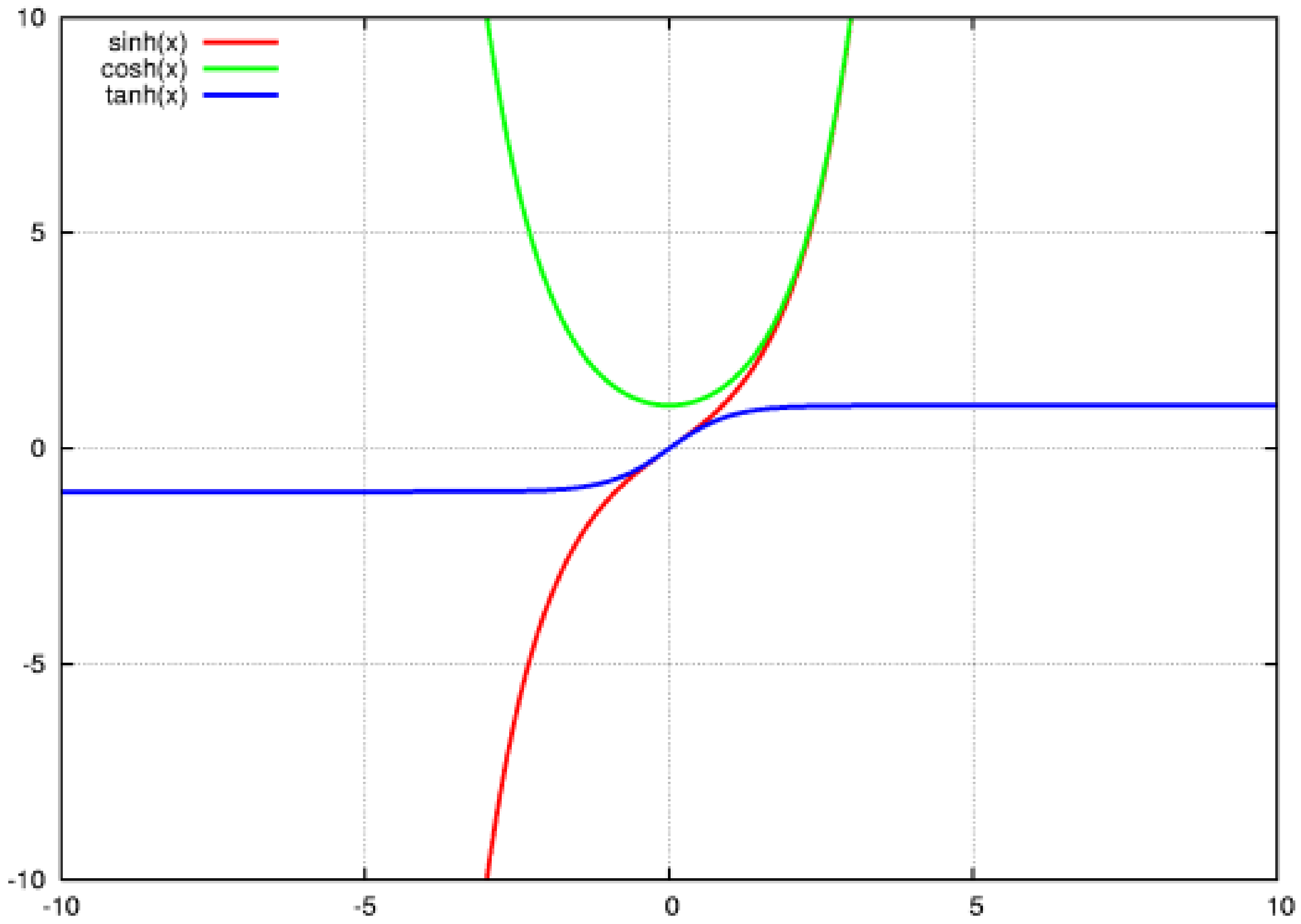
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

Le funzioni iperboliche: grafici



Le funzioni iperboliche

Così come al variare della variabile reale t i punti $(cost, sint)$ definiscono la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, analogamente i punti $(cosht, sinht)$ definiscono l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$.
Questa è una conseguenza dell'identità: $(cosht)^2 - (sinht)^2 = 1$
derivabile dalle definizioni mediante funzioni esponenziali con manipolazioni algebriche elementari.

Al contrario delle corrispondenti funzioni trigonometriche, le funzioni iperboliche non sono periodiche.

L'argomento t delle funzioni seno e coseno che definiscono la circonferenza può essere interpretato naturalmente come un angolo; l' argomento t delle funzioni iperboliche rappresenta invece due volte l'area del settore compreso tra il segmento che collega l'origine con il punto $(cosht, sinht)$ su un ramo dell'iperbole equilatera, l'arco di tale iperbole che dal punto si conclude nel punto (1;0) sull'asse x e il segmento sull'asse x da questo punto all'origine.

Le funzioni iperboliche soddisfano molte identità, simili a corrispondenti identità trigonometriche.

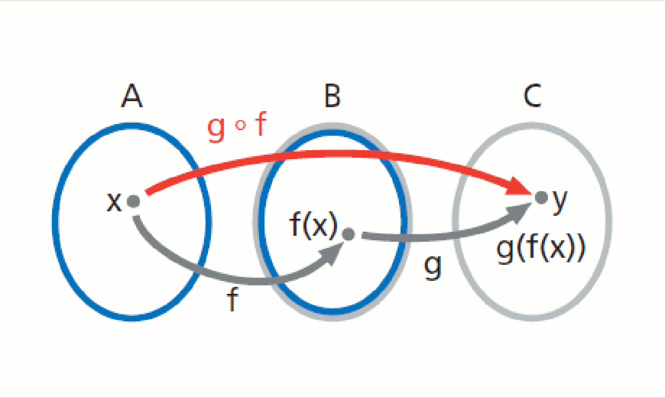
Le funzioni composte

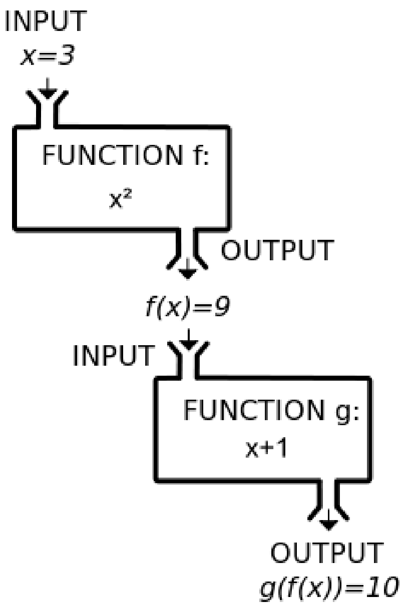
Le funzioni composte

Date le due funzioni $f: A \to B$

$g: B \to C$ con $\boldsymbol{f \circ g}$ o $\boldsymbol{y = g(f(x))}$

indichiamo la funzione, detta funzione composta, da *A a C* che si ottiene associando a ogni *x* di *A* l'immagine mediante *g* dell'immagine di *x* mediante *f.*





ESEMPIO

Consideriamo: $f(x) = x^2, g(x) = x + 1$

Otteniamo:

$$g \circ f = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1$$

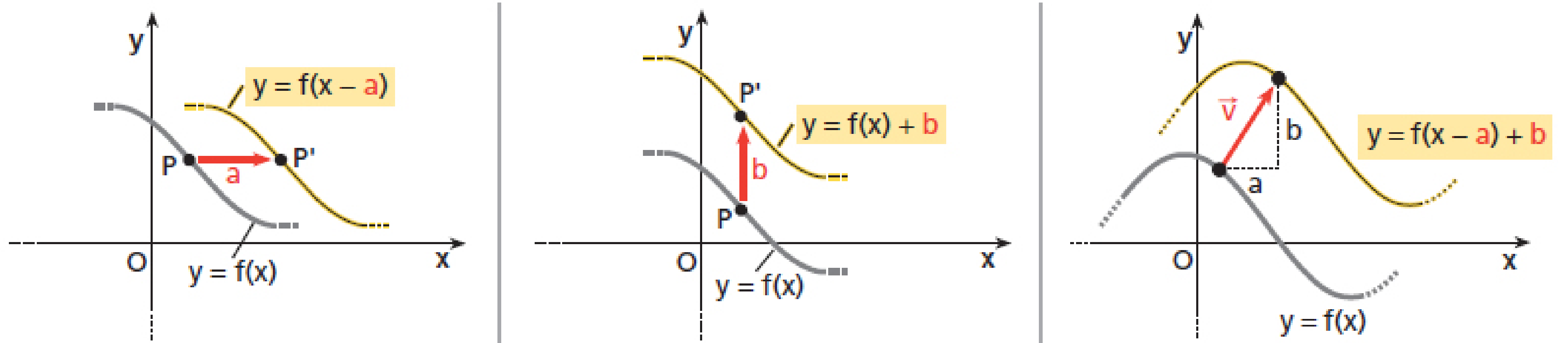
$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2$$

La composizione NON è commutativa

Grafici ottenibili mediante trasformazioni

Traslazioni

Una **traslazione** è una isometria di equazioni $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$



a. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; 0)$ parallelo all'asse x.

b. Traslazione di vettore $\vec{v}(0; b)$ parallelo all'asse y.

c. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$.

La traslazione e il grafico di una funzione

Grafico di una funzione e della funzione traslata secondo il vettore $\bar{v} = (a; b)$

.

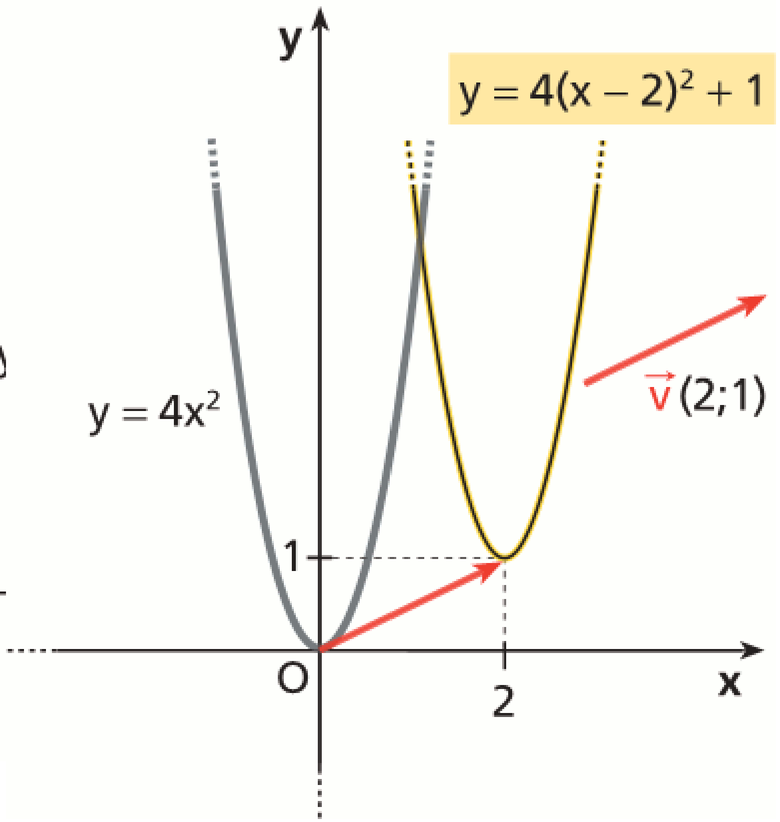
ESEMPIO

Data la funzione $y = 4x^2$
trasliamo il suo grafico secondo il vettore $\vec{v}(2;1)$

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$ quindi

$$y' - 1 = 4(x' - 2)^2 \longrightarrow y' = 4(x' - 2)^2 + 1$$

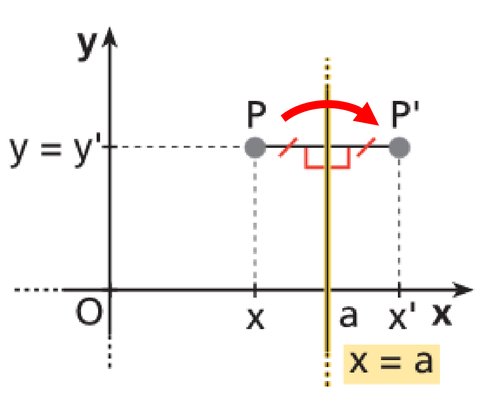
ovvero $y = 4(x - 2)^2 + 1$



Le simmetrie

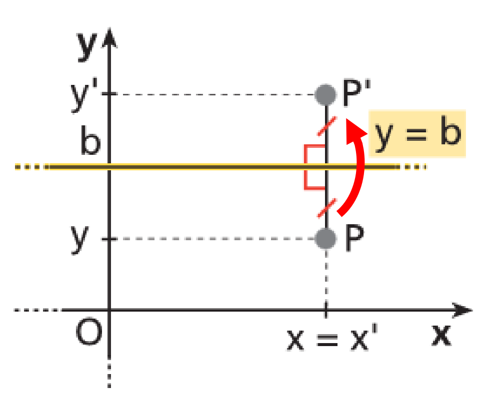
Simmetria rispetto all’asse *x = a*

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



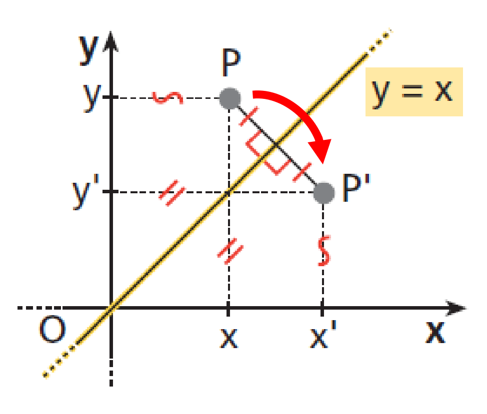
Simmetria rispetto all’asse *y = b*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



Simmetria rispetto all’asse *y = x*

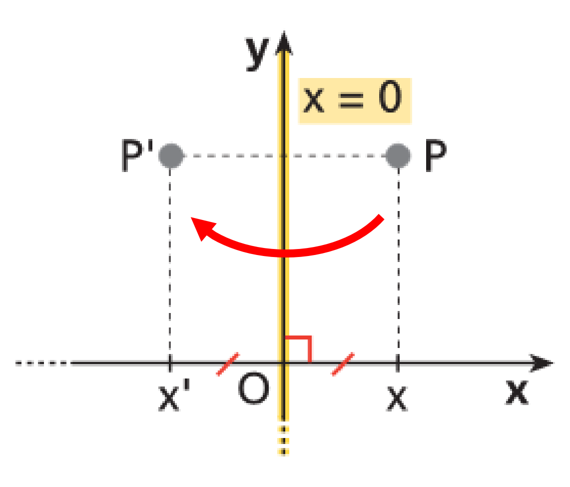
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



Le simmetrie

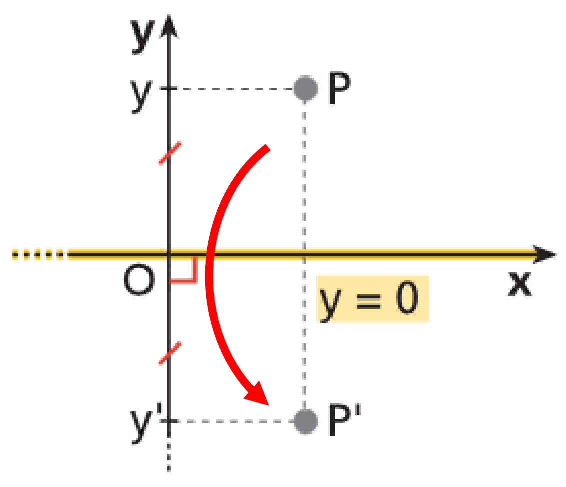
Simmetria rispetto all'asse $x = 0$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



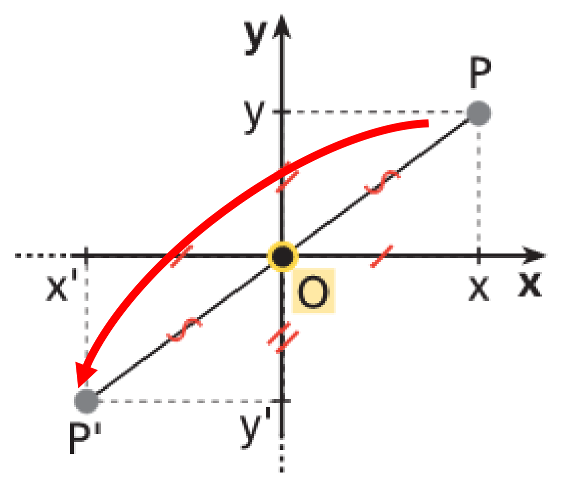
Simmetria rispetto all'asse $y = 0$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

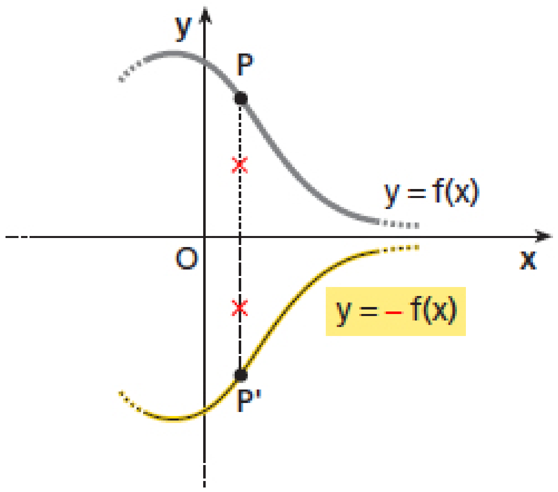


Simmetria centrale

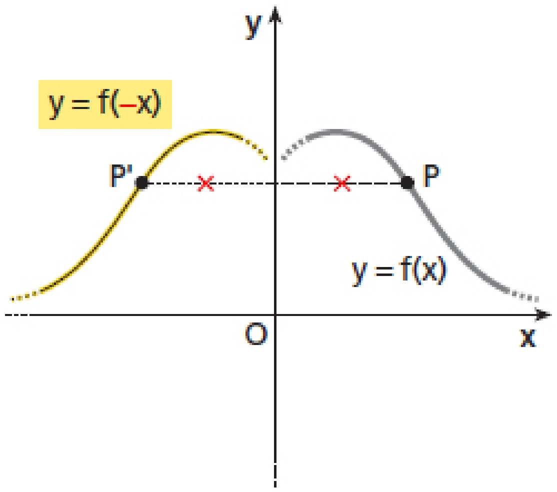
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



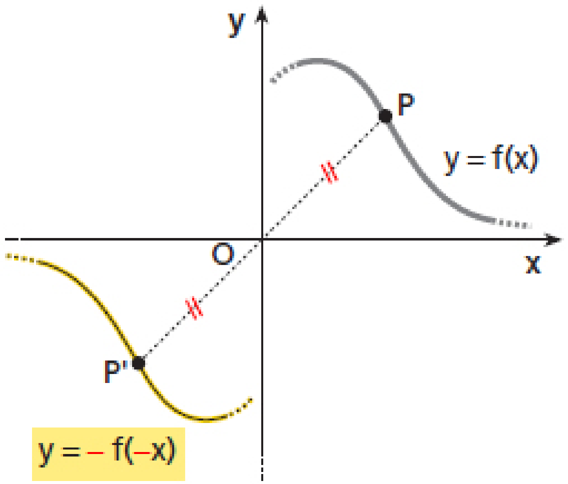
Le simmetrie



a. Simmetria rispetto all'asse *x*.

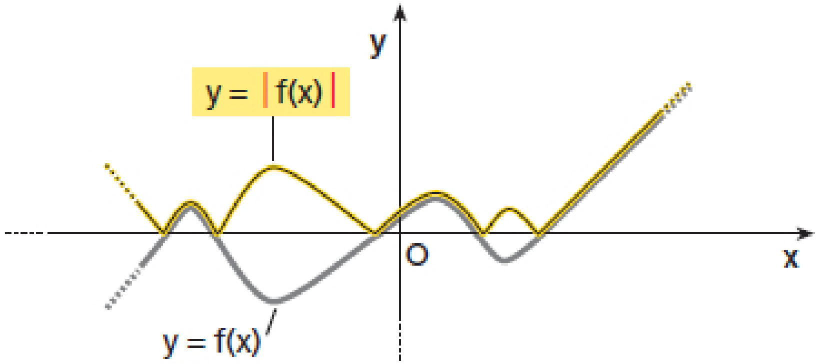


b. Simmetria rispetto all'asse *y*.

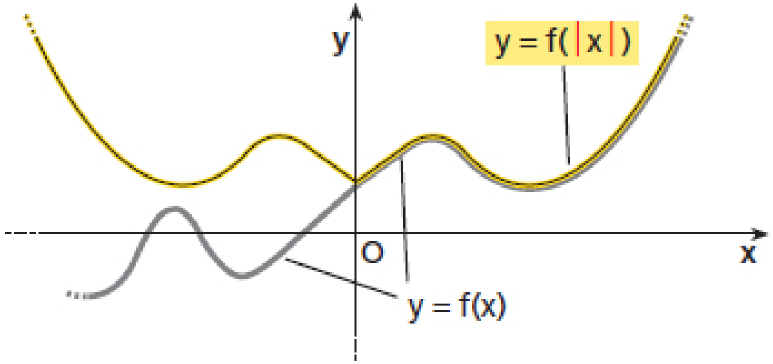


c. Simmetria centrale rispetto a *O*.

Simmetrie e valori assoluti



d. Il grafico di $|f(x)|$, se $f(x) \geq 0$, è lo stesso di $f(x)$; se $f(x) < 0$, è simmetrico rispetto all'asse x di quello di $f(x)$.



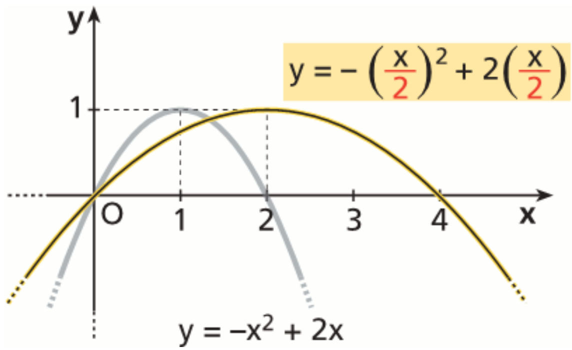
e. Per $x \geq 0$ il grafico è lo stesso di $y = f(x)$, per $x < 0$ il grafico è il simmetrico rispetto all'asse y di quello che $y = f(x)$ ha per $x > 0$.

Le dilatazioni

Una **dilatazione** è una trasformazione non isometrica di equazioni $\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$ con $m, n \in \mathbb{R}^+$

ESEMPIO

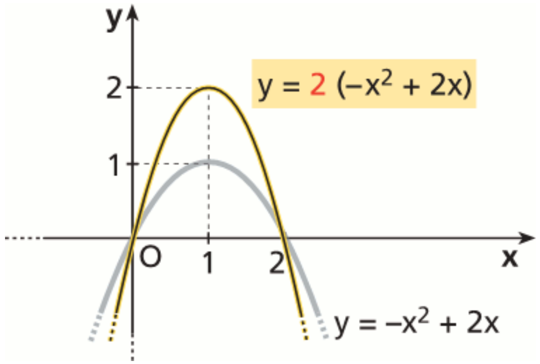
***n* = 1,**
***m* = 2**



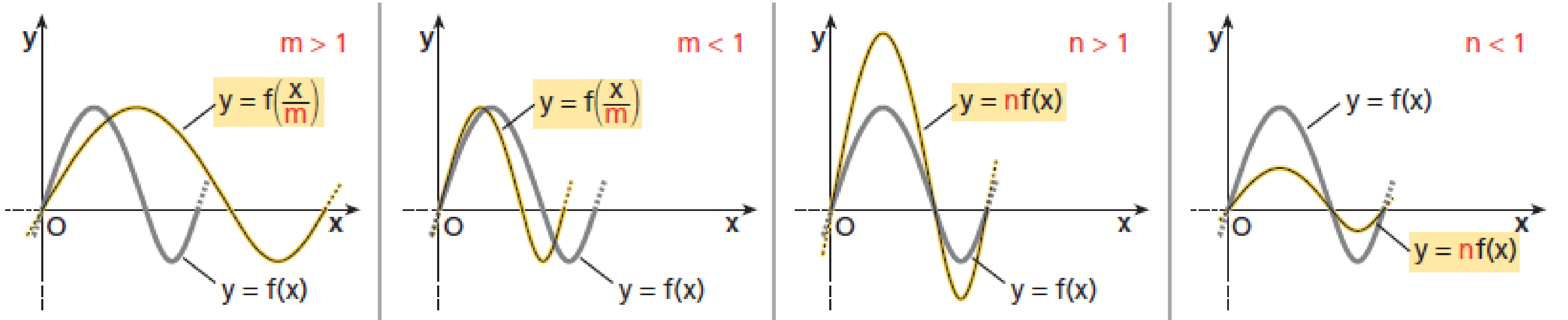
Data la funzione $y = f(x)$, la funzione f' il cui grafico è il corrispondente di f mediante la dilatazione è $y = n\,f\left(\frac{x}{m}\right)$.

ESEMPIO

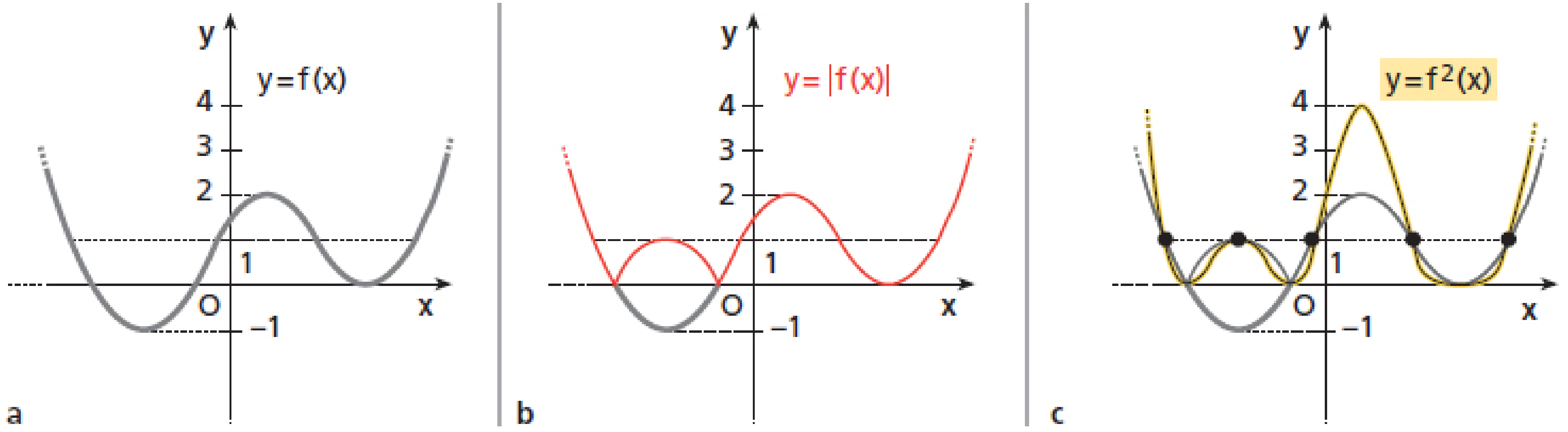
***m* = 1,**
***n* = 2**



Le dilatazioni



a. Dilatazione orizzontale. b. Contrazione orizzontale. c. Dilatazione verticale. d. Contrazione verticale.



Calcolo del periodo delle funzioni

Definizione

Siano: f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, T un numero reale positivo. La funzione f si dice periodica in X, di periodo T se X soddisfa la seguente proprietà:

$$x \in X \Rightarrow x \pm T \in X$$

e per f vale l'uguaglianza

$$f(x \pm T) = f(x), \qquad \forall x \in X$$

Proposizione

Se la funzione $f\colon X \subseteq R \to R$ è periodica in X di periodo T, allora l'insieme X gode della proprietà (più forte della precedente):

$$x \in X \Rightarrow x + kT \in X, \qquad \forall k \in Z$$

e la funzione f soddisfa l'uguaglianza

$$f(x \pm kT) = f(x), \qquad \forall x \in X \, e \, \forall k \in Z$$

Il periodo delle funzioni $y = sinx$ e $y = cosx$ è 2π; il periodo delle funzioni $y = tgx$ e $y = cotgx$ è π

$y = f_1(x) + f_2(x)$	**Se** $T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = T_1 = T_2$
	Se $T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)$
$y = f_1(x) - f_2(x)$	**Se** $T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{2}$
	Se $T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)$
$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$	**Se** $T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{2}$
	Se $T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)$
$y = f(kx)$	$\frac{T}{k}$
$y = \lvert f(x) \rvert$	$\frac{T}{2}$ **per seno e coseno**
	T **per tangente e cotangente**
$y = [f(x)]^{2n}$	$\frac{T}{2}$ **per seno e coseno**
	T **per tangente e cotangente**
$y = [f(x)]^{2n+1}$	**T**
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	**T**

Calcolo del periodo delle funzioni

Osservazione

Quando i due periodi presentano una forma frazionaria e sono diversi tra loro, per calcolare il m.c.m. basta esprimere entrambi i periodi mediante frazioni di uguale denominatore e calcolare il m.c.m. dei numeratori e dividerlo per i denominatori

Esempio

Si calcoli il periodo della funzione $y = sin^2x - cos3x$

$$T = m.c.m.\left(2\pi;\ \frac{2}{3}\pi\right) = m.c.m.\left(\frac{2\pi}{2};\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= m.c.m.\left(\frac{3}{3}\pi;\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$$