

ESERCIZI SUI LIMITI DI FUNZIONE

Esercizio proposto N°1

Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$$

Si ricordi la definizione di limite finito in un punto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{x_0} \text{ t. c. } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Pertanto, applicando la definizione al caso concreto, si ha:

$$\left| \frac{x+3}{x} - 2 \right| < \varepsilon$$

o, ciò che è lo stesso:

$$-\varepsilon < \left| \frac{x+3-2x}{x} \right| < \varepsilon$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{-x+3}{x} < \varepsilon \\ \frac{-x+3}{x} > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x+3-\varepsilon x}{x} < 0 \\ \frac{-x+3+\varepsilon x}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{1+\varepsilon} \\ x > 0 \\ x < \frac{3}{1-\varepsilon} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \cup x > \frac{3}{1+\varepsilon} \\ 0 < x < \frac{3}{1-\varepsilon} \end{cases}$$

In definitiva:

$$\frac{3}{1+\varepsilon} < x < \frac{3}{1-\varepsilon}$$

Esercizio proposto n°2

Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

Ricordando la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists I_3 \text{ t. c. } \left| \frac{3x+1}{x} - 3 \right| < \varepsilon$$

ovvero

$$-\varepsilon < \frac{3x + 1 - 3x}{x} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ho trovato cioè un intorno di $+\infty$ $\left] \frac{1}{\varepsilon}; +\infty \right[$

Esercizio proposto n°3

Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{-\infty} \text{ t.c. } |e^{2x}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < e^{2x} < \varepsilon \quad \Rightarrow \begin{cases} e^{2x} < -\varepsilon & \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{2x} < \varepsilon & x < \frac{\log \varepsilon}{2} \end{cases}$$

La disequazione è vera per ogni x dell'intervallo $\left] -\infty; \frac{\log \varepsilon}{2} \right[$ che è un intorno di $-\infty$; il limite è dunque verificato.

Esercizio proposto n°4

Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$$

Dalla definizione di limite infinito in un punto si ha che:

$$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0} \text{ t.c. } f(x) > M$$

che, applicato al nostro caso particolare, diventa:

$$\frac{1}{(x-4)^2} < M$$

ovvero

$$(x-4)^2 < \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{M}} < x-4 < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 4 + \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Ho trovato un intorno circolare di centro 4 e raggio $\delta = 1/\sqrt{M}$

Verificare che valgono i seguenti limiti:

1	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	16	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+10} = 0$
2	$\lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - 2x) = -3$	17	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{2x+1} = 2$
3	$\lim_{x \rightarrow 3^+} e^{\frac{2}{3-x}} = 0$	18	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$
4	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$	19	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x}{x-1} = 0$
5	$\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x+3) = 1$	20	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x+1} = 0$
6	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$	21	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$
7	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$	22	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1+e^x) = 0$
8	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x-7)^2} = +\infty$	23	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3+3) = +\infty$
9	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{(x-5)^4} = +\infty$	24	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-4} = +\infty$
10	$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$	25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$
11	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{(x+3)^2} = +\infty$	26	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^4 - x^3) = +\infty$
12	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log(1-x^2) = -\infty$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\log x} = +\infty$
13	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log x} = \infty$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \log^4 x = +\infty$
14	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log \sqrt{1-x} = -\infty$	29	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log^4 x = +\infty$
15	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2-2^x} = -\infty$	30	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^2 - 3x + 5} = +\infty$

Limiti in forma indeterminata ∞/∞

Le funzioni più semplici che si presentano nella forma indeterminata ∞/∞ sono le funzioni razionali per x che tende a ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m}$$

Dove $a_n \cdot x^n$ e $b_m \cdot x^m$ sono i termini di grado massimo dei polinomi rispettivamente a numeratore e a denominatore, sicché formalmente la relazione sopra scritta si ottiene sopprimendo tutti i termini di grado

inferiore a n al numeratore e inferiore a m al denominatore. Si possono verificare le seguenti tre circostanze:

Se $n > m$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m} = \pm\infty$
Se $n < m$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m} = 0$
Se $n = m$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m} = \frac{a_n}{b_m}$

Un analogo comportamento si ha con le funzioni fratte (anche se non razionali) laddove si può applicare il teorema sui limiti delle funzioni composte, come nell'esempio seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^3 x - 5\log^2 x + 3\log x + 1}{7\log^3 x - \log^2 x + 2\log x + 3}$$

Applicando il teorema sui limiti delle funzioni composte, possiamo porre $\log x = y$. Se x tende a 0, y tenderà a infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^3 x - 5\log^2 x + 3\log x + 1}{7\log^3 x - \log^2 x + 2\log x + 3} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^3 - 5y^2 + 3y + 1}{7y^3 - y^2 + 2y + 3} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^3}{7y^3} = \frac{1}{7}$$

Seguendo queste indicazioni risolvi gli esercizi dal 26 a 30

Limiti in forma indeterminata $\infty - \infty$

Esercizio proposto n°5

Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5})$$

Poiché il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$ si razionalizza la funzione in modo che si abbia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5})(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5})}{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5})} = \frac{x+7-x-5}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = \frac{12}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = 0$$

Esercizi da svolgere

1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-5})$	16	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - 2^x = +\infty$
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+4})$	17	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - 2^x = +\infty$
3	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 - 6x + 1)$	18	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + x + 1} = +\infty$
4	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 6x^2 - 5x + 3)$	19	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^4 + 3x^2 + 2} = -\infty$
5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 - 4x - 2}$	20	$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 9}$

6	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^3 - 4x - 2}$	21	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x = 3/2$
7	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3x^2 + x^4}{1 - 5x^4 - 2x}$	22	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x = -1$
8	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^3 + 4x^2}{2x^3 - x + 2}$	23	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 2} - x = 3/4$
9	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^2 + 5}{1 - 2x^3 + 2x^2}$	24	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 5} - \sqrt{x^2 + x + 1} = 1$ (Conviene sottrarre ed aggiungere x)
10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^3 + 7}{2 - x + 3x^4}$	25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x^2 + x + 1} = 0$
11	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$	26	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 4e^{2x} + 2e^x - 1}{2e^{3x} + 6e^{2x} + 5} = 1/2$
12	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 7}}{x + 5}$	27	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 5e^x + 1}{e^{3x} + 7e^{2x} - e^x + 2} = 0$
13	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2 + 4x + 3}$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log x + 1}{3 \log x + 5} = 2/3$
14	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$	29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cot g x - 1}{\cot g x + 5} = 3$
15	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cot g^3 x - 1}{\cot g^2 x - \cot g x + 5} = +\infty$

Limiti notevoli

Dai seguenti due limiti la cui validità è opportunamente dimostrabile, derivano molti altri limiti utili per sciogliere forme indeterminate

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
---	--

Tabella riassuntiva dei limiti notevoli

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = 1/e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\log_e a}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_e a$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{ax} = 1$

Esercizi da svolgere

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}$	16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 3x}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x \cdot \log(1 - 2x)}{(1 - \cos 2x) \operatorname{arctg} x}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{3x^2}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x)^2 \cdot (\sqrt[5]{1 + 2x} - 1) \sin 5x}{\arcsin^2 2x \cdot \sin^3 2x}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x^2}}{\operatorname{arctg} x}$
5	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{(x - 3)}$	20	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{\operatorname{arctg} x^2})}{e^x - 1}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5^x - 1)}{5^x - 1}$	21	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3^{x^2} - 1)}{x^2 \arcsin^2 x}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{49x^2}$	22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^3 \cdot \log^2(1 + 3x)}{\operatorname{tg} x \cdot \arcsin^4 x}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{1 - \cos x} = 50$	23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{x - 2 \operatorname{sen} x} = 1$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 \sqrt[3]{x}}{\sin 3x} = 1/3$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 5 \cos x}{2x \operatorname{sen} x} = 5/4$
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = 2/9$	25	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos x}{x \operatorname{sen} x} = 3/2$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 4x)}{49x^2 \operatorname{arctg} 2x} = 2$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x + x}{x} = 5$
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 3x} - 1}{\arcsin x} = 3/5$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + 5x}{x} = 8$
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\sin x} = \log 9$	28	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^x = e^4$

14	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)} = 2$	29	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^x = e^5$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{\sin x - 2x} = -3$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$

Esercizio proposto n°6

Si voglia calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 2x + \log^3(1+x)}{\operatorname{arctg}^3 3x + 5x^4 - 1}$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Dividendo numeratore e denominatore per x^3 si ha:

$$\frac{\operatorname{tg}^3 2x + \log^3(1+x)}{\operatorname{arctg}^3 3x + 5x^4 - 1} = \frac{\frac{\operatorname{tg}^3 2x}{x^3} + \frac{\log^3(1+x)}{x^3}}{\frac{\operatorname{arctg}^3 3x}{x^3} + \frac{5x^4 - 1}{x^3}} = \frac{8\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\right)^3 + \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^3}{27\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right)^3 + \frac{5x^4 - 1}{x^4} x} = \frac{1}{3}$$

Esercizio proposto n°7

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$.

Possiamo mettere in evidenza x , tenendo presente che $3^{\frac{1}{x}}$ vale 1 per $x=0$, ottenendo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{x+1}{x^2}} \cdot \frac{x+1}{x^2} \cdot x$$

A proposito del primo fattore possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} = \frac{1}{2}$$

Mentre per il secondo e terzo fattore si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2} \cdot x = 1$$

In definitiva si ha:

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio proposto N°8

Si risolva il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{e^{4x} - 1}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Dividendo numeratore e denominatore per x e applicando il teorema del limite del rapporto si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\log(1 + 5x)}{x}}{\frac{e^{4x} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{x} = \frac{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{5x}}{4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \frac{5}{4}$$

Esercizio proposto N°9

Si risolva il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos 5x)}{1 - \cos^2 3x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0; conviene aggiungere e sottrarre 1 nell'argomento del logaritmo e scomporre il denominatore:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos 5x + 1 - 1)}{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)} &= \frac{1}{1 + \cos 3x} \cdot \frac{\log[1 + (\cos 5x - 1)]}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{1 - \cos 3x} = \\ &= \frac{1}{1 + \cos 3x} \cdot \frac{\log[1 + (\cos 5x - 1)]}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{25x^2} \cdot \frac{25x^2}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos 3x} = \\ &= \frac{25}{9} \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x} \cdot \frac{\log[1 + (\cos 5x - 1)]}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{25x^2} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos 3x} = \frac{25}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -\frac{25}{18} \end{aligned}$$

Esercizio proposto n°10

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2^x + x - 5} - 1}{x - 2}$$

Per utilizzare i limiti notevoli x dovrebbe tendere a zero. Pertanto si effettua una sostituzione $y=x-2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2^x + x - 5} - 1}{x - 2} &= \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2^{y+2} + y + 2 - 5} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + (4 \cdot 2^y + y - 4)} - 1}{(4 \cdot 2^y + y - 4)} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 \cdot 2^y + y + 4}{y} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4(2^y - 1) + y}{y} = \frac{1}{3} \left(4 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^y - 1}{y} + 1 \right) = \frac{1}{3} (4 \log 2 + 1) = \frac{1}{3} (1 + \log 16) \end{aligned}$$

Verificare le seguenti uguaglianze:

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 5x^2}{\arcsin 2x + x^3} = \frac{3}{2}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x + \sin x} = \frac{1}{2} \log \frac{2}{3}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-2x}} = 2 \log \frac{3}{5}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{\log(1 + 3x^2)} = \frac{2 \log 3 + 1}{6}$
5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{\frac{1}{x^2}} - 2^{\frac{1}{x^2}}}{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{x}} = \log \frac{3}{2}$
6	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\arcsin \frac{1}{x}} = 1$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^3} - \sqrt{1 + x^3}}{(\sqrt[4]{1 + x^2} - 1) \cdot (3^x - 1)} = \frac{2}{\log 3}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^2 3x} - 5x^2) \log^2(x + e)}{(e^{3x^2} - 5x^2)(2 + \arcsin 4x)} = \frac{1}{2}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin^2 x} + 4^{\arcsin^2 x} - 2^{x^2} - 5^{\operatorname{tg}^2 x} + x^3}{\log^2(1 + \operatorname{artg} x)} = \log \frac{6}{5}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{3^x + 1}{5^x + 1}}{\log(1 + x)} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{5}$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{x+3}{3^x+2}} - 1}{\operatorname{artg} x} = \frac{1 - \log 3}{6}$
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x} = 3/2$
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{\operatorname{tg} x + \sin x} = \frac{1}{2} \log \frac{5}{3}$

14	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - \cos x}{\log(1+3x)} = \frac{1}{3} \log 5$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x+1}} = \log \frac{2}{3}$
16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^3} - \sqrt{1+x^3}}{(5^x - 1)(\sqrt[4]{1+x^2} - 1)} = \frac{4}{\log 5}$
17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{3^{\operatorname{artg} x} - x \log x} = -2$
18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^2 3x) + \operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{1 + \operatorname{arctg}^2 x} - 1 + x^4} = 18$
19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arcsin}^2 x - 1 + \operatorname{tg}^4 x}{1 - \cos 2x + 3 \sin^5 x} = \frac{1}{2} \log 3$
20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{\log(1+3x^2)} = \frac{2 \log 3 + 1}{6}$
21	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{arcsin}(3^x - 27)}{\operatorname{artg}(x-3)} = 27 \log 3$
22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + \operatorname{artg}(3 \sin x)} - 1}{\operatorname{artg}[\log(1+x)]} = \frac{3}{4}$
23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{\operatorname{arctg}(\sin x)} - 3^{\operatorname{arctg} x}}{x + \operatorname{artg} x} = \frac{\log 3}{2}$
24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 4x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}} = 2$
25	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{settsinh}(3^{x^2} - 1)}{x^2 \operatorname{arcsin}^2 x} = +\infty$
26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{\log_2(1+3x^4)} = -\infty$
27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh}(\sqrt[5]{1+3x^4} - 1)}{\log(1+x) \operatorname{tg} x} = 0$
28	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{3x + 2} \left(\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3}} - 1 \right) = \frac{1}{3}$
29	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x + 2 \sin x}{x - 4 + \operatorname{artg} x} \left(\sqrt[3]{\frac{3x^3 + 7x - 1}{3x^3 - x^2 + 2}} - 1 \right) = \frac{2}{3}$
30	$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2x \log x + 3x + 5}{2x \log x + 1}} - 1 \right) = \frac{1}{2}$

Determina gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

1	$y = \frac{\ln x + 1}{x}$	$[x = 0, y = 0]$	11	$y = (x+2) \cdot e^{x-1}$	$[y = 0]$
---	---------------------------	------------------	----	---------------------------	-----------

2	$y = \frac{\ln x - 2}{x} \quad [x = 0, y = 0]$	12	$y = (x - 2) \cdot e^{-x-1} \quad [y = 0]$
3	$y = \frac{3x^2 - x + 1}{x + 1} \quad [x = -1, y = 3x - 4]$	13	$y = \sqrt{9x^2 + 4x - 1} \quad \left[y = \pm 3x \pm \frac{2}{3} \right]$
4	$y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 2} \quad [x = -2, y = 2x - 6]$	14	$y = \sqrt{4x^2 + 5x - 2} \quad \left[y = \pm 2x \pm \frac{5}{4} \right]$
5	$y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x^2 + x - 15}$	15	$y = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x - 4}$
6	$y = \frac{1}{(x + 5)^2}$	16	$y = \frac{x^2 + 9}{\sqrt{x^2 - 9}}$
7	$y = x - 3 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 8}}$	17	$y = \frac{4 + e^x - 3e^{2x}}{e^x - 4}$
8	$y = e^{-x} \log(x^2 - 4)$	18	$y = \frac{\log(2 - e^{2x})}{1 - e^x}$
9	$y = x\sqrt{2x + 1}$	19	$y = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 1}{x} - \left \frac{x}{x^2 + 4} \right }$
10	$y = \frac{\log^2 x}{x} - 3x$	20	$y = \sqrt[3]{(x - 1)(x - 2)^2}$

Ulteriori esercizi sul comportamento di una funzione agli Estremi dell'insieme di definizione.

Ricerca gli asintoti verticali per i diagrammi delle seguenti funzioni (dopo aver calcolato opportunamente l'insieme di definizione):

1	$y = \log(x^2 - 5x - 14)$	21	$y = \log \frac{4\arcsin x - \pi}{\pi - 6\arcsin x}$
2	$y = \log 3x - 1 $	22	$y = (4\arcsin x - \pi) \log \frac{4\arcsin x - \pi}{\pi - 6\arcsin x}$
3	$y = \sqrt[6]{3 - \log_2 x}$	23	$y = \log_2 \log(12x^2 + 5x - 2)$
4	$y = (\log_2 3 - \log_2 x)^{\sqrt{2}}$	24	$y = \arctg \log_2 \log(12x^2 + 5x - 2)$
5	$y = (\log_2 3 - \log_2 x)^{-\sqrt{2}}$	25	$y = (\arctg \log(7x^2 + 8x + 1))^{-3}$
6	$y = \log(\log_2 3 - \log_2 x)$	26	$y = (\sqrt{ 6x^2 + 8x + 1 } - 1)^{-\sqrt{3}}$
7	$y = \frac{1}{1 + \log^2(\log_2 3 - \log_2 x)}$	27	$y = \log \left[3\arccos \left(8x^2 - \frac{3}{2} \right) - \pi \right]$
8	$y = (\pi - 6\arcsin x)^{-1/3}$	28	$y = \log(x^2 - 2 - x^2 - 6)$
9	$y = \log(\pi + 2\arcsin x)$	29	$y = \log(x - 2 - x - 6)$
10	$y = \log(4\arctg x - \pi)$	30	$y = \sqrt{\pi^2 - 16x^2} \log(2\sin x - 1)$
11	$y = (4\arctg x - \pi)^{-1/3}$	31	$y = \log \log x $
12	$y = \frac{\log^3 x}{1 + \log^2 x}$	32	$y = \sqrt[4]{6\log^2 x - 7\log x + 2}$
13	$y = \frac{\log x}{1 + \log^2 x}$	33	$y = \sqrt[4]{ 6\log^2 x - 7\log x + 2 }$
14	$y = (3x - x^2 - 2)^{-\pi}$	34	$y = \log \sin^2 x$
15	$y = \log \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$	35	$y = \log \frac{(2\sin x - 1)(1 + \sqrt{x})}{(2\sin x - \sqrt{2})(1 + \sqrt{\pi - 4x})}$

16	$y = \frac{x-1}{(x^2-5x+6)^\pi}$	36	$y = \left(\frac{3x-2}{x^2+3x-10} \right)^{\sqrt{3x-2}}$
17	$y = \frac{\log x}{\sqrt{1-\log x}}$	37	$y = \left(\frac{x^2-6x+9}{4\arctg x - \pi} \right)^{x^2}$
18	$y = \frac{\sqrt[3]{\log x}}{\sqrt{1-\log x}}$	38	$y = \log \log_{(3x^2+4x+1)}(3x^2+2x)$
19	$y = \arctg \frac{\log x}{\sqrt{1-\log x}}$	39	$y = \log(tg^2 x + tg x + 1)$
20	$y = \frac{\cos x}{\arctg(\log x - 1)}$	40	$y = \log[\cos^2(5x - \pi) + 3 \cos(5x - \pi) + 2]$

Ricerca gli asintoti orizzontali e gli asintoti obliqui per i diagrammi delle seguenti funzioni (dopo aver calcolato opportunamente l'insieme di definizione):

1	$y = \sqrt{x^2 + 3x + 5} - x$	11	$y = \sqrt[4]{x^4 + 5x^2 + 1}$
2	$y = \arctg \frac{\log x + 1}{\log x + 3}$	12	$y = \sqrt{x^6 + 2x + 1} - x^3$
3	$y = \operatorname{arccotg}(\sinh x + 1)$	13	$y = \log(e^x + x^4 + 3x^2 + 1)$
4	$y = \log(e^x + 1)$	14	$y = e^{\frac{3x^2 + \sqrt{x} + 1}{x^3}} \cdot \sqrt[4]{x^4 + x^3 + 5}$
5	$y = \log(e^x + 1) + \arctg x$	15	$y = (3x + 1) \arcsin \frac{x^2 + 4x + 5}{2x^2}$
6	$y = \log(e^x + 1) + \sin \frac{1}{x}$	16	$y = (2x + 4) \operatorname{setttgh} \frac{x^2 + x + 6}{2x^2}$
7	$y = \frac{x^3 - 5x^2 + x + 1}{3x^2 - 2x}$	17	$y = \frac{3^x + \arctg 2x + e^{-x}}{3^{x+2} + \cos^2 5x + 2e^{-x}}$
8	$y = tgh^2 x + x - 2$	18	$y = \frac{2x^5 + x^4 - 3\sin x + 1}{x^4 + 2\cos^4 3x + e^{-x}}$
9	$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$	19	$y = \frac{3x^5 + 2x^4 + \cos 2x - 5}{x^4 + \cos^2 x + 2x^2} + \arctg \frac{1}{x}$
10	$y = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1}$	20	$y = \frac{x^4 + x^3 + 2}{x^3 + \arctg x} + \arcsin \frac{1}{x}$