ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE

Continuità e derivabilità

Si studi la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto indicato a fianco

1	$f(x)=\sqrt{4-\lvert x\rvert+3x}, \quad x=0$	3	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-2 & se\ x<1\\ x^2-x-1 & se\ x\geq 1\end{cases}$
2	$f(x)=\lvert 2x-4\rvert+\lvert x\rvert, \quad x=2$		

Si trovi, se possibile, a e b in modo che le seguenti funzioni siano derivabili nel punto a fianco indicato

1	$f(x)=\begin{cases}ax+b & per\ x<2\\ x^2-4 & per\ x\geq 2\end{cases} \qquad x=2$	[a=4; b=-8]
2	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}-1 & se\ x\leq -1\\ ax+b & se\ x>-1\end{cases} \qquad x=-1$	[a=-1/2; b=-1/2]

Calcola la derivata delle seguenti funzioni

1	$y=2e^x+2x-\cos x$	19	$y=\operatorname{cotg}\left(x^2+x\right)$
2	$y=3e^x+4x-\operatorname{sen} x$	20	$y=e^{\cos\ln x}$
3	$y=\left(x-\ln x\right)\cdot\left(\operatorname{sen} x+3\right)$	21	$y=e^{\operatorname{sen}\ln x}$
4	$y=\left(x+\ln x\right)\cdot\left(\cos x+2\right)$	22	$y=\dfrac{\cos\left(2x+1\right)}{\operatorname{sen}\left(2-x\right)}$
5	$y=x\cdot 2^x\cdot\cos x$	23	$y=\dfrac{\operatorname{sen}\left(2x+1\right)}{\cos\left(2-x\right)}$
6	$y=x\cdot 3^x\cdot\operatorname{sen} x$	24	$y=2x^2\ln x$
7	$y=2x^4-x^3+3x-1$	25	$y=3x^2\ln x$
8	$y=3x^4-2x^2+2x+3$	26	$y=e^{3x}+x^2-\ln\left(x+2\right)$
9	$y=\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}$	27	$y=2\operatorname{sen}^3 x+\cos^2 x$
10	$y=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[5]{x}$	28	$y=\cos^3 x+2\operatorname{sen}^2 x$

11	$y=\left(x^3+2x^2+x\right)\cdot\ln x$	29	$y=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$
12	$y=\left(x^3-x^2+2x\right)\cdot\ln x$	30	$y=\sqrt[4]{x^2+x-1}$
13	$y=\dfrac{x^2-x+3}{x^4+3}$	31	$y=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{\text{sen}(\pi x)}}$
14	$y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3+2}$	32	$y=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{\cos(\pi x)}}$
15	$y=\dfrac{2e^x+x+\ln x}{x^2}$	33	$y=\text{tg}\left(x^2+2x\right)$
16	$y=\dfrac{e^x+2x-\ln x}{2x^2}$	34	$y=\text{arctg}\dfrac{\ln x}{x^2}$
17	$y=\dfrac{1+\text{sen}\,x-\cos x}{1-\text{sen}\,x}$	35	$y=\text{arccotg}\dfrac{\ln x}{x^2}$
18	$y=\dfrac{1-\text{sen}\,x+\cos x}{1+\cos x}$	36	$y=\text{arcsen}\sqrt{x}\cdot\ln\left(2x^2+3x\right)$

Ulteriori esercizi

37	$f(x)=e^{x^2}$	47	$f(x)=\dfrac{3x^4-2x^2+4}{x^3}$
38	$f(x)=e^{x^2-2}$	48	$f(x)=\dfrac{8x+2}{\sqrt[4]{4x+1}}$
39	$f(x)=log\left(\sqrt{sin\dfrac{3}{4}\pi}\right)$	49	$f(x)=4artg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
40	$f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^4}$	50	$f(x)=arctg\left(\dfrac{1-2x^2}{x^3-2x}\right)$
41	$f(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x^2-2x}$	51	$f(x)=\dfrac{4(x-1)}{x}+log(x^2+1)^4$

42	$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$	52	$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 2}$
43	$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$	53	$f(x) = log^2 x - 4logx + 3$
44	$f(x) = log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$	54	$f(x) = (x-1)e^{3-x}$
45	$f(x) = tg^3 x$	55	$f(x) = \frac{1}{2}log(x^2+1) - xarctgx$
46	$f(x) = x\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$	56	$f(x) = log\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right) + log(12-3x^4)$

Retta tangente e normale ad una curva

L'espressione analitica della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto P_0 di ascissa x_0 è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

L'espressione analitica della retta normale alla curva $y = f(x)$ nel punto P_0 di ascissa x_0 è l'equazione della retta perpendicolare alla retta tangente nello stesso punto:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ESERCIZIO SVOLTO

Calcolare l'equazione della retta normale alla curva

$$y = x^3 - \sqrt{x^3 + 3}$$

nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

Il punto di contatto ha coordinate $P_0(2; 5)$. La derivata della funzione è

$$y' = 3x^2 - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente è $y'(2) = 10$. Quindi, l'equazione della retta cercata è:

$$y - 5 = 10(x - 2)$$

$$y = 10x - 15$$

ESERCIZI DA SVOLGERE

Scrivere l'equazione della retta tangente alle curve nel punto a fianco indicato:

1	$f(x) = 5x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 0$
2	$f(x) = -3x^2 + 2, \quad x_0 = 2$
3	$f(x) = 2x - \sqrt{x^3 + 2}, \quad x_0 = 1$
4	$f(x) = \frac{1}{x} + x^2, \quad x_0 = 2$
5	$f(x) = x\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}, \quad x_0 = 3$
6	$f(x) = e^{x+1} - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$
7	$f(x) = x^2 logx, \quad x_0 = 1$
8	$f(x) = cosx + tanx, \quad x_0 = \pi$
9	$f(x) = e^{3x}\log(x^2 + 1), \quad x_0 = 0$
10	Stabilire se la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & per\ x \geq 0 \\ x^3 - 2x & per\ x < 0 \end{cases}$ è continua e derivabile nell'origine e se esistono punti del grafico in cui la retta tangente è parallela alla bisettrice del II e IV quadrante.

11	Individuare i punti del grafico della funzione $$y = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x + 3}$$ in cui la tangente ha coefficiente angolare pari a -1

Teorema di De L'Hospital

Esercizio svolto 1

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + sinx}{x - 2sinx}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando il teorema di De L'Hospital, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + sinx}{x - 2sinx} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + cosx}{1 - 2cosx} = -3$$

Esercizio svolto 2

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x + sinx}{2xsin^2x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando la regola di De L'Hospital, si ha che, poiché $2sinxcosx = sin2x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x + sinx}{2xsin^2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1 + cosx}{2sin^2x + 2xsin2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-sinx}{4sin2x + 4xcos2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-cosx}{8cos2x + 4cos2x - 8xsin2x} = -\frac{1}{2}$$

Utilizzando la regola di De L'Hospital, calcolare i seguenti limiti:

1	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2 - x}$	13	$\lim_{x \to 0^+} \left[x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right]$
2	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x + x}$	14	$\lim_{x \to +\infty} \left[(x+2) e^{-x} \right]$
3	$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + 2x}$	15	$\lim_{x \to 0^+} \left[x^2 \cdot \ln\left(\frac{2}{x} - 1 \right) \right]$

4	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln\left(x^2+2x\right)}$	16	$\lim_{x\to +\infty} \left[\left(x-1\right)e^{-2x}\right]$
5	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(2x^2+x\right)}{\ln x}$	17	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\operatorname{sen} x}{x^2-x}$
6	$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x-2}{\operatorname{sen} x-2x}$	18	$\lim_{x\to 0} \frac{x-x\cos x}{\ln\left(x+1\right)}$
7	$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{e^x+x}$	19	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2+x}$
8	$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^x}{x^2-x}$	20	$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-x}{\ln\left(1-x\right)}$
9	$\lim_{x\to 0^+} \left[x^2\cdot\ln\left(\operatorname{sen} x\right)\right]$	21	$\lim_{x\to -\infty} \left[\left(x^2-x\right)e^x\right]$
10	$\lim_{x\to 0^+} \left[x^2\cdot\ln\left(1-\cos x\right)\right]$	22	$\lim_{x\to -\infty} \left[e^x\left(x^2-2x\right)\right]$
11	$\lim_{x\to\infty} \frac{6\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{3x^2-\sqrt{x}}=0$	23	$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{3x}-6(2^{2x})-arctg8x}{2^{3x}+4x}=1$
12	$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=+\infty$	24	$\lim_{x\to 0} \frac{x+2-\sqrt{x^2-x+4}}{3x}=\frac{5}{12}$

Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui *f*(*x*) è continua e quelli in cui è derivabile

1	$f\left(x\right)=\left\lvert\operatorname{sen}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\right\rvert$	$\left[\text{continua su } \mathbf{R}\text{; derivabile su } \left]\frac{2}{3}\pi+k\pi;\frac{5}{3}\pi+k\pi\right[,\ k\in\mathbf{Z}\right]$
2	$f\left(x\right)=\left\lvert\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\rvert$	$\left[\text{continua su } \mathbf{R}\text{; derivabile su } \left]\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{4}{3}\pi+k\pi\right[,\ k\in\mathbf{Z}\right]$
3	$f\left(x\right)=\sqrt{\ln\left(x-2\right)}$	$\left[\text{continua su } \left[3;+\infty\right[\text{; derivabile su } \left]3;+\infty\right[\right]$
4	$f\left(x\right)=\sqrt{\ln\left(3-x\right)}$	$\left[\text{continua su } \left]-\infty;2\right]\text{; derivabile su } \left]-\infty;2\right[\right]$

Teorema di Lagrange

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

1	$y = x^3 + 2x + 3$, $[-3;0]$	$\left[c = -\sqrt{3}\right]$
2	$y = -x^3 - 2x + 3$, $[-3;0]$	$\left[c = -\sqrt{3}\right]$
3	$y = 2\,\text{sen}^2\, x + \cos^2 x$, $[0;\pi]$	$\left[c = \frac{\pi}{2}\right]$
4	$y = -\text{sen}^2\, x + \cos^2 x$, $[0;2\pi]$	$\left[c_1 = \frac{\pi}{2}; c_2 = \pi; c_3 = \frac{3}{2}\pi\right]$

Teorema di Rolle

Data la seguente funzione, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Rolle e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

1	$y = \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}$, $[-2;2]$	$\left[c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; c_2 = 0; c_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
2	$y = -\frac{2}{2x^4 - x^2 + 3}$, $[-1;1]$	$\left[c_1 = -\frac{1}{2}; c_2 = 0; c_3 = \frac{1}{2}\right]$

Teorema di Cauchy

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Cauchy e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

1	$f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+2}{3x}$, $[1;2]$.	$\left[c = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right]$
2	$f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{x-1}{2x-1}$, $[-1;0]$.	$\left[c = \frac{1-\sqrt{6}}{5}\right]$

PROBLEMI

Problema n°1

Date le funzioni $f(x)=x+\left|x^2-2x\right|$ e $g(x)=x-\left|x^2-2x\right|$:

a) calcola le derivate $f'(x)$ e $g'(x)$ e le relative condizioni di esistenza;

b) disegnato il grafico delle due funzioni, indica i valori di *x* per i quali le funzioni non sono derivabili precisando se per tali valori le funzioni sono però continue;

c) trova gli eventuali valori di *x* per i quali *f*(*x*) e *g*(*x*) hanno tangenti parallele.

S: $\left[\text{a) } \begin{matrix} f'(x)=2x-1 & g'(x)=-2x+3 & \text{se } x\le 0 \ \vee \ x\ge 2 \\ f'(x)=-2x+3 & g'(x)=2x-1 & \text{se } 0<x<2 \end{matrix} \text{; b) } x=0 \text{ e } x=2\text{; sì; c) } x=1 \right]$

Problema n°2

Data la funzione $f(x)=\begin{cases} 6x^2+ax+2 & \text{se } b\le x<0 \\ ce^x-1 & \text{se } 0\le x\le \ln 2 \end{cases}$

a) trova *a, b*, *c*, in modo che *f*(*x*) soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle in $[b;\ln 2]$ e determina il punto x_0 che verifica il teorema;

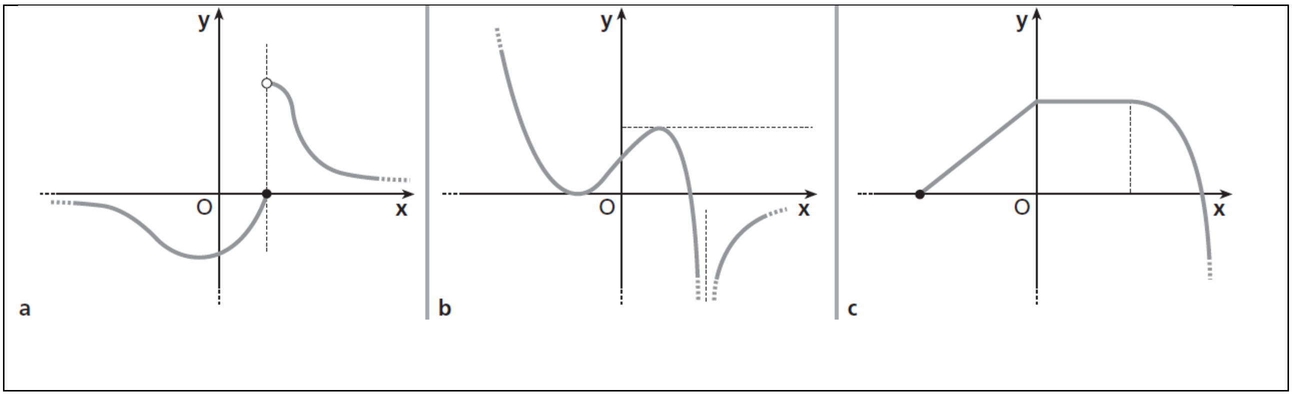
b) rappresenta graficamente *f*(*x*);

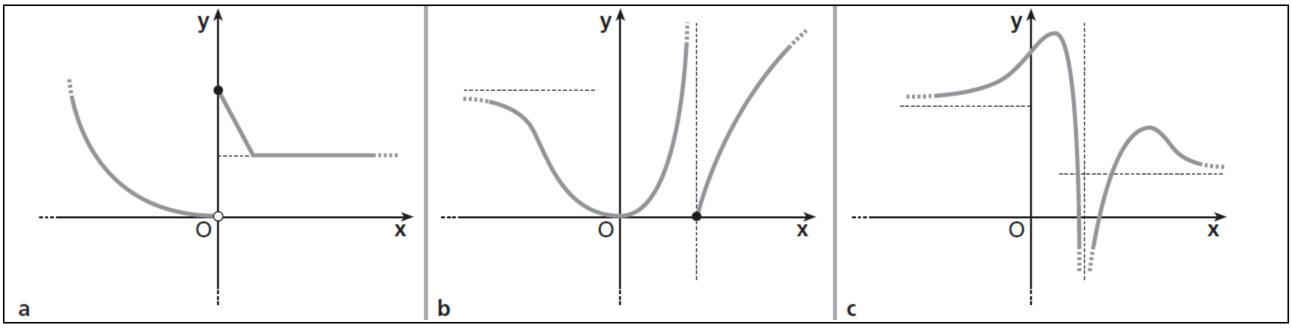
c) determina, se esiste nell'intervallo in cui è definita *f*(*x*), un punto *P* in cui la tangente è perpendicolare alla retta di equazione $x+6y=0$.

S: $\left[\text{a) } a=3;\ b=-1;\ c=3;\ x_0=-\frac{1}{4}\text{; c) } P(\ln 2;5) \right]$

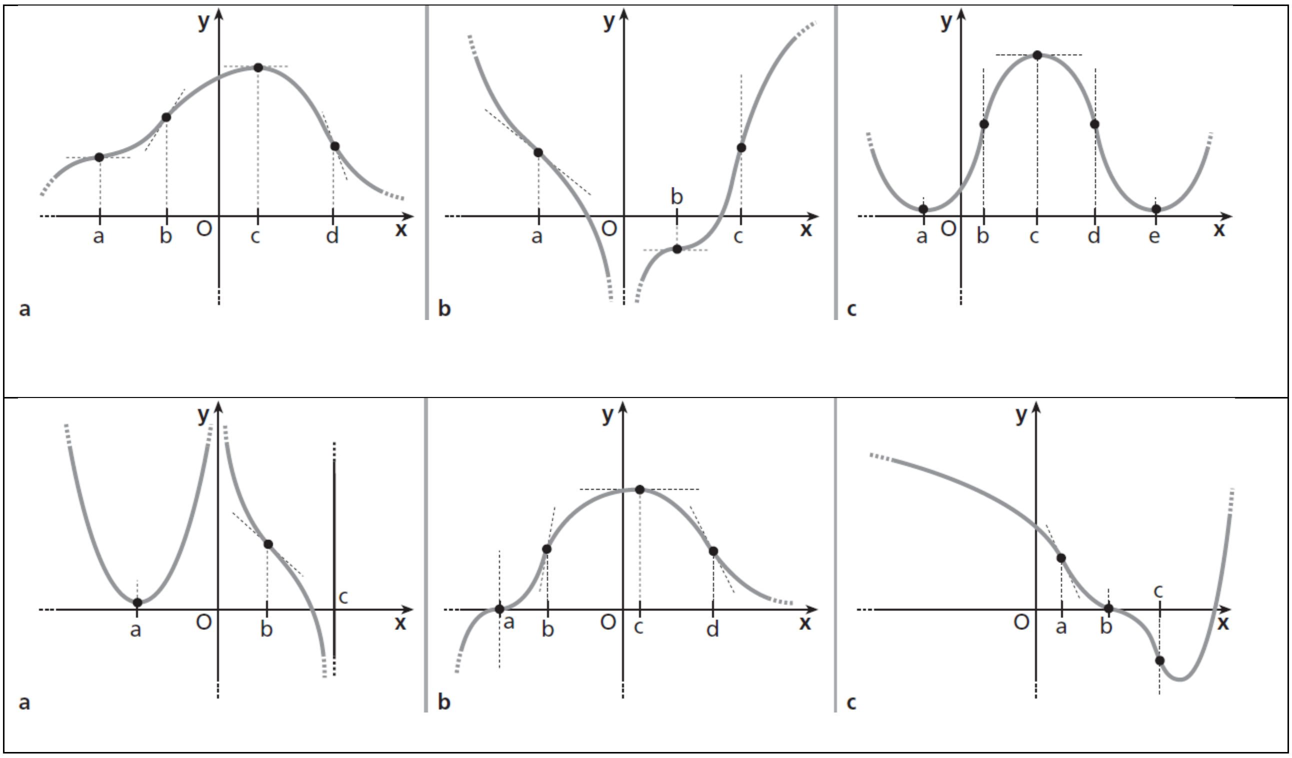
PROPRIETA' DI MONOTONIA

Indica i punti di massimo e di minimo, relativi e assoluti, nelle seguenti funzioni.





Nei seguenti grafici indica i punti di flesso, specificando se sono orizzontali, verticali o obliqui e se sono ascendenti o discendenti.



Proprietà di monotonia

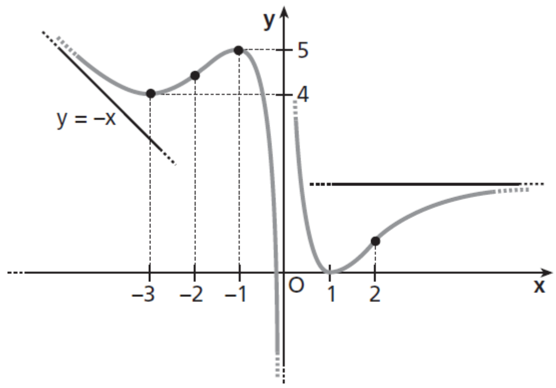
Studiare le proprietà di monotonia delle seguenti funzioni

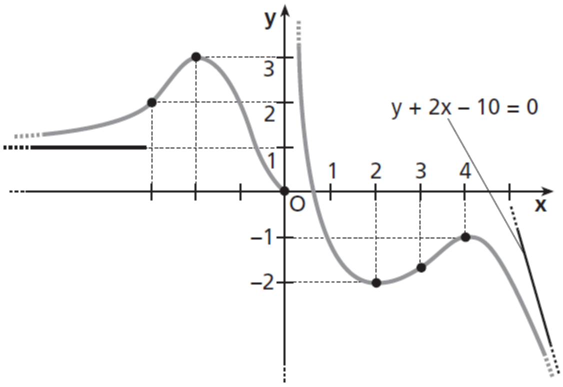
1	$y = x^4 - 6x^2 + 2$	**26**	$y = \left\|1 - \sqrt{e^{x-2}}\right\|$
2	$y = \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x + 2}$	**27**	$y = e^{\frac{x-1}{\|x\|}}$
3	$y = \dfrac{6x}{x^2 - 2}$	**28**	$y = e^{x\|x-1\|}$
4	$y = x + \sqrt{2 - x}$	**29**	$y = \dfrac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{2x+1}{x-1}}$
5	$y = log(2x^2 + 1)$	**30**	$y = \dfrac{4cos^2x - 3}{cosx}$

6	$y = e^{2x} + 6e^{-2x}$	**31**	$y = \frac{3cosx}{2sin^2x} - 1$
7	$y = \sqrt{x^3 - x}$	**32**	$y = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-1}}$
8	$y = x^3 - 2x^2 - 1$	**33**	$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
9	$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 6$	**34**	$y = x\sqrt{1-x^2}$
10	$y = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^4}{4}$	**35**	$y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2-1}}$
11	$y = \frac{x+4}{7-x^2}$	**36**	$y = \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$
12	$y = e^{2x} - 2e^x + e^2$	**37**	$y = x\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$
13	$y = logx - \frac{1}{2}x^2$	**38**	$y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}$
14	$y = log^2x + 2logx + 1$	**39**	$y = \frac{e^{-x}}{x^2-3}$
15	$y = \frac{sinx}{1+2sin^2x}$	**40**	$y = \left(\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4}\right)^{\pi}$
16	$y = \frac{\lvert 1-x^3\rvert}{x^2}$	**41**	$y = \sqrt{2^{(2sin^2x-1)} - 1}$
17	$y = \frac{4}{\lvert x\rvert\sqrt{4-x^2}}$	**42**	$y = arctg\lvert e^{2x} - 1\rvert$
18	$y = \frac{x}{log^2x} + x$	**43**	$y = e^{\frac{x}{1-x}}$
19	$y = \frac{1}{\sqrt{1-\lvert 2-x\rvert}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lvert 2-x\rvert}}$	**44**	$y = log\lvert x^2 - 3x + 2\rvert$
20	$y = \sqrt[5]{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$	**45**	$y = (x^2 + 6x)e^{-\frac{1}{x}}$
21	$y = \sqrt{x} \cdot e^{x-1}$	**46**	$y = \sqrt{logx^2}$
22	$y = \frac{x^2}{x^2 - \lvert x^2-4\rvert}$	**47**	$y = 2arctg\sqrt[3]{2x^3 - 15x^2 + 36x + 1} - \pi$
23	$y = \sqrt{x^2 + \lvert 2x-3\rvert}$	**48**	$y = log\left(\pi - 2arctg\sqrt[3]{2x^3 - 15x^2 + 36x + 1}\right)$
24	$y = \frac{2x-1}{xe^{x+1}}$	**49**	$y = \left(1 + tgh\sqrt[4]{2x^3 - 15x^2 + 36x}\right)^3$
25	$y = log\frac{e^x+1}{e^x}$	**50**	$y = \sqrt[5]{\pi - 2arctg(log^2x - 1)^3}$

Studio delle funzioni

Dal grafico in figura deduci:
1. il dominio della funzione;
2. le intersezioni con gli assi;
3. gli intervalli in cui la funzione è positiva e quelli in cui è negativa;
4. i limiti agli estremi del dominio e le equazioni degli asintoti;
5. gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente;
6. i punti di massimo e di minimo relativi;
7. i punti di flesso, evidenziando le concavità.





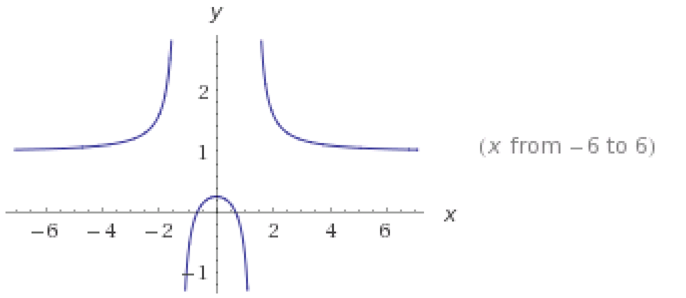
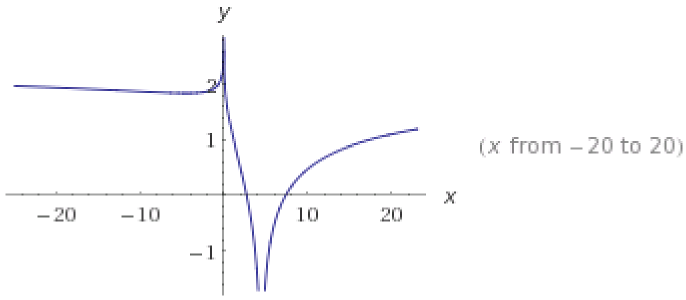
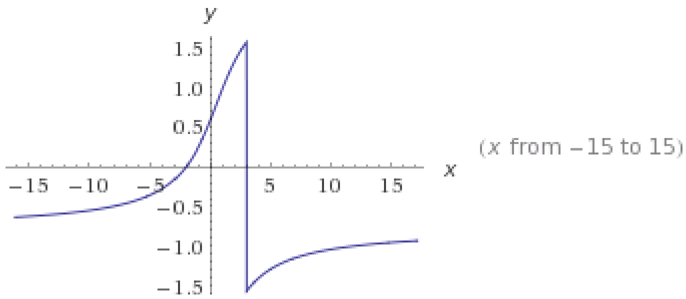
Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

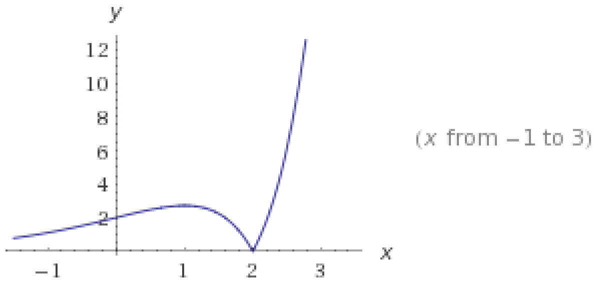
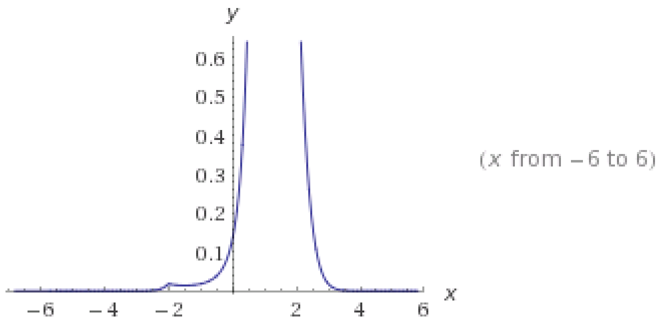
1	$y = x^3 - 3x^2$	$\left[\max\ (0;0);\ \min\ (2;-4);\ F(1;-2)\right]$
2	$y = x^3 + 3x^2$	$\left[\max\ (-2;4);\ \min\ (0;0);\ F(-1;2)\right]$
3	$y = x^4 - 2x^2 - 3$	$\left[\text{funzione pari}; \min\ (\pm 1;-4);\ \max\ (0;-3); F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{32}{9}\right)\right]$
4	$y = x^4 - 2x^2 - 8$	$\left[\text{funzione pari}; \min\ (\pm 1;-9);\ \max\ (0;-8); F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{77}{9}\right)\right]$
5	$y = \dfrac{x^3}{x+1}$	$\left[a: x=-1;\ \min\left(-\frac{3}{2};\frac{27}{4}\right); F(0;0)\right]$
6	$y = \dfrac{x^3}{x-1}$	$\left[a: x=1;\ \ \min\left(\frac{3}{2};\frac{27}{4}\right);\ F(0;0)\right]$

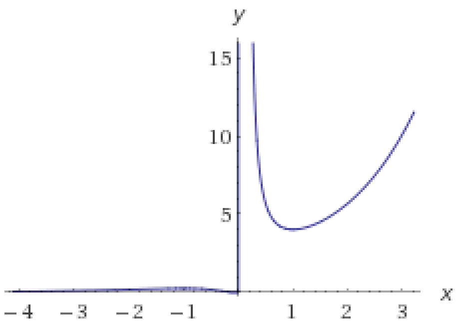
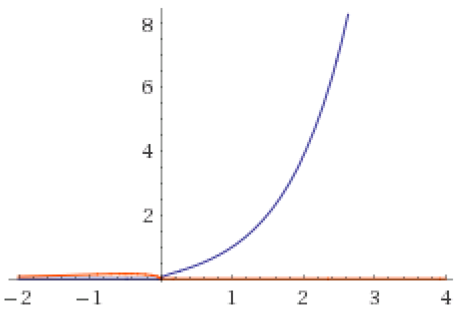
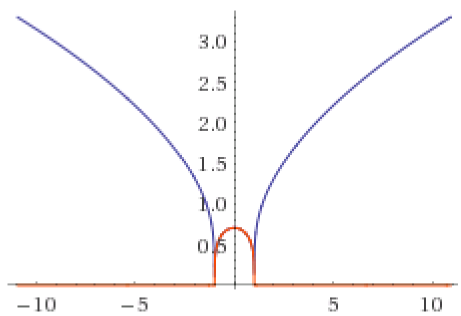
7	$y=\frac{x^3}{x^2-4}$	$\left[\text{funz. dispari; } a: x=\pm 2,\ y=x;\ \min\left(-2\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right);\ \max\left(2\sqrt{3};3\sqrt{3}\right);\ F(0;0)\right]$
8	$y=\frac{x^3}{x^2-9}$	$\left[\text{funz. dispari; } a: x=\pm 3,\ y=x;\ \min\left(-3\sqrt{3};-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right);\ \max\left(3\sqrt{3};\frac{9\sqrt{3}}{2}\right);F(0;0)\right]$
9	$y=-2+\sqrt{5+4x-x^2}$	$\left[\max\ (2;1);\ x=-1,\ x=5 \text{ punti a tangente verticale}\right]$
10	$y=-1+\sqrt{7-6x-x^2}$	$\left[\max\ (-3;3);\ x=-7,\ x=1 \text{ punti a tangente verticale}\right]$
11	$y=\sqrt{\frac{2-x}{x+4}}$	$\left[a: x=-4;\ F\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$
12	$y=\sqrt{\frac{1-x}{x+5}}$	$\left[a: x=-5;\ F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$
13	$y=\frac{x^2-1}{e^x}$	$\left[a: y=0;\ \min\left(1-\sqrt{2};\frac{2-2\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\right);\ \max\left(1+\sqrt{2};\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}\right);\ F_1\left(2-\sqrt{3};\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}\right);\ F_2\left(2+\sqrt{3};\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}\right)\right]$
14	$y=\frac{1-x^2}{e^x}$	$\left[a: y=0;\ \min\left(1+\sqrt{2};-\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}\right);\ \max\left(\sqrt{2}-1;\frac{-2+2\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\right);\ F_1\left(2-\sqrt{3};-\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}\right);F_2\left(2+\sqrt{3};-\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}\right)\right]$
15	$y=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$	$\left[a: x=-1;\ \max\left(\sqrt{e}-1;\frac{1}{2e}\right);\ F\left(e^{\frac{5}{6}}-1;\frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}\right)\right]$
16	$y=\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$	$\left[a: x=1;\ \max\left(\sqrt{e}+1;\frac{1}{2e}\right);\ F\left(e^{\frac{5}{6}}+1;\frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}\right)\right]$
17	$y=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+2}$	$\left[\min\left(\frac{4}{3}\pi;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\ \max\left(\frac{2}{3}\pi;\frac{\sqrt{3}}{3}\right);F_0(0;0);F_1(\pi;0);F_2(2\pi;0)\right]$
18	$y=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x+2}$	$\left[\min\left(\frac{7}{6}\pi;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\ \max\left(\frac{11}{6}\pi;\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\ F_0\left(\frac{\pi}{2};0\right);F_1\left(3\frac{\pi}{2};0\right)\right]$
19	$y=\left\lvert\frac{x^2-2x-8}{x-2}\right\rvert$	$\left[a: x=2;\ y=x;\ y=-x;\ \min_1(-2;0) \text{ punto angoloso; } \min_2(4;0) \text{ punto angoloso}\right]$
20	$y=\left\lvert\frac{x^2+2x-3}{x+1}\right\rvert$	$\left[a: x=-1;\ y=x+1;\ y=-x-1;\ \min_1(-3;0) \text{ punto angoloso; } \min_2(1;0) \text{ punto angoloso}\right]$

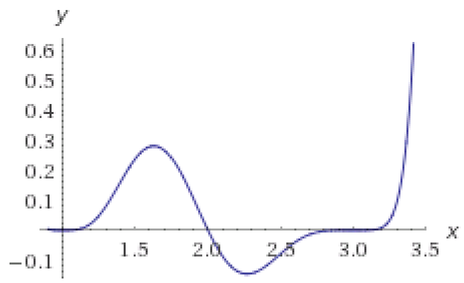
Paulo difficiliora

21	$y=\frac{9x^2-4}{9x^2-16}$	

		
22	$y = e^x - \frac{1}{8}e^{2x}$	
23	$y = log\|3 - 2logx\|$	
24	$y = log\frac{logx + 1}{logx - \frac{1}{2}}$	
25	$y = artg\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$	
26	$y = e^x(3x^2 - 4x - 1)$	
27	$y = \frac{x^2}{16}\left(4log^2\left(\frac{x}{4}\right) - 10log\left(\frac{x}{4}\right) + 5\right)$	
28	$y = log(5x^2 + 4x + 4)$	
29	$y = \sqrt{\|x^2 - 4x - 5\|}$	
30	$y = \|x - 2\| \cdot e^x$	

		
31	$y = x\lvert logx\rvert$	
32	$y = \frac{sinx}{\sqrt{2}cosx - 1}$	
33	$y = \sqrt{2sin^2x - 1}$	
34	$y = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$	
35	$y = \sqrt{\lvert 5x^2 - 6x + 1\rvert}$	
36	$y = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2 - 3x - 4}}$	
37	$y = log(2x^2 + 3x + 1)$	
38	$y = log\frac{\lvert 2x+1\rvert - x^2}{3x - 1}$	
39	$y = \frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{2x-1}}$	
40	$y = e^{\frac{2-x^2}{1-x^2}}$	
41	$y = e^{2x - \lvert x^2 + x - 2\rvert}$	
42	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 9) - \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 5x + 4)$	
43	$y = \frac{1}{\sqrt{e^x(1 - x^2)}}$	

44	$y = artg\left(\dfrac{2^x}{2^x-1}\right)$	
45	$y = \dfrac{x\lvert logx\rvert}{(logx-1)^2}$	
46	$y = artg\left(\dfrac{1-3x}{2-x}\right)$	
47	$y = arcsin\left(\dfrac{2-x}{3-2x}\right)$	
48	$y = 2^{x+\frac{1}{x}}$	
49	$y = \sqrt{x}e^{x-1}$	
50	$y = \sqrt[5]{x}e^{-\frac{1}{x}}$	
51	$y = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$	
52	$y = \sqrt[5]{x^2-1}$	
53	$y = \sqrt[4]{x^2-1}$	
54	$y = \sqrt[5]{(x^2-1)^4}$	

55	$y = \begin{cases} 1-2x\log x & se\ x \in]0,1] \\ (\log x - 1)^2 & se\ x > 1 \end{cases}$	
56	$y = \begin{cases} (x+1)e^{\frac{x+2}{2(x+1)}} & se\ x \leq 0, x \neq -1 \\ e\sqrt{x+1} & se\ x > 0 \end{cases}$	
57	$y = \begin{cases} \dfrac{1}{e-x} & se\ x \in [0,e[\\ \dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{\log x + 1}{\log x - 1}} & se\ x > e \end{cases}$	
58	$y = \dfrac{\lvert 1+3\log\lvert x\rvert\rvert}{\lvert x\rvert^3}$	
59	$y = (x-1)^4(x-2)(x-3)^5$	 (x from 1 to 3.5)
60	$y = \arccos(\cos^2 x)$	