ULTERIORI ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE

1	Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = (1 + 2x)^4$ nel suo punto di intersezione con l'asse y	$\boldsymbol{y = 8x + 1}$
2	Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = (1 - 2x)^3$ nel suo punto di ascissa 1	$\boldsymbol{y = 5 - 6x}$
3	Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = log^3 x$ nel suo punto di ascissa e	$\boldsymbol{y = \frac{3}{e}x - 2}$
4	Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{sinx}$ nel suo punto di ascissa π	$\boldsymbol{y = -x + \pi + 1}$
5	Determina per quali valori di k la funzione $f(x) = e^{kx}$ soddisfa la relazione $y'' + 4y' - 5e^{kx} = 0$	$\boldsymbol{k = -5, k = 1}$
6	Considera la funzione $$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x \geq 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$ Determina per quale valore di $a \in R$ è continua in x=0 e traccia il grafico della funzione corrispondente	$\boldsymbol{a = 1}$
7	Data la funzione: $$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x}\right)^a & x > 0 \\ 9^{x+a^2} & x \leq 0 \end{cases}$$ determina i valori di $a \in R$ per cui la funzione è continua in R	$\boldsymbol{a = 0, a = 1/2}$
8	Data la funzione $$f(x) = \begin{cases} \frac{2sinx - sin2x}{2x^3} & x > 0 \\ 2k^2 + kx^3 - x & x \leq 0 \end{cases}$$ determina per quali valori di k la funzione è continua in $x = 0$	$\boldsymbol{k = \pm\frac{1}{2}}$
9	Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali a e b in modo che la seguente funzione dia derivabile in R $$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x + ax^3 & x < 0 \\ 2^{x+2b} + ab & x \geq 0 \end{cases}$$	$\boldsymbol{a = 2, b = 1/2}$
10	Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali a e b in modo che la seguente funzione dia derivabile in R	$\boldsymbol{a = -1, b = 1}$

	$f(x) = \begin{cases} 3acosx - \sqrt{2} & x \leq \frac{3}{4}\pi \\ bsin3x & x > \frac{3}{4}\pi \end{cases}$	
11	Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali a e b in modo che la seguente funzione dia derivabile in R $f(x) = \begin{cases} (a-1)\log(x-1) & x > 2 \\ bx^2 - 3ax & x \leq 2 \end{cases}$	$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}}$
12	Determinare il valore del parametro a affinché la derivata della funzione di equazione $f(x) = ax^3 - (2a+2)x + a - 1$ si annulli in corrispondenza di x=1. Determinare, quindi, le coordinate dei punti stazionari della funzione ottenuta in corrispondenza di a trovato	$\boldsymbol{a = 2}$; $(\boldsymbol{-1};\ \boldsymbol{5})$; $(\boldsymbol{1};\ \boldsymbol{-3})$
13	Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui *f*(*x*) è continua e quelli in cui è derivabile. $f(x) = \left\|\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right\|$	
14	Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui *f*(*x*) è continua e quelli in cui è derivabile. $f(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$	
15	Data la seguente funzione e il punto indicato a fianco: a) rappresenta la funzione; b) calcola la sua derivata; c) la funzione è continua nel punto? d) la funzione è derivabile nel punto? $y = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases},\ x = 0.$	
16	Data la seguente funzione e il punto indicato a fianco: a) rappresenta la funzione; b) calcola la sua derivata; c) la funzione è continua nel punto? d) la funzione è derivabile nel punto? $y = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases},\ x = 0.$	
17	Un corpo si muove in linea retta seguendo la legge oraria $s = 2t + e^{-2t} + 1$. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo al variare del tempo e trova in quale istante la velocità è nulla.	

18	Un corpo si muove in linea retta seguendo la legge oraria $s = 3t + e^{-3t} + 3$. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo al variare del tempo e trova in quale istante la velocità è nulla.	
19	La traiettoria descritta da un corpo in un piano *xOy* ha le seguenti equazioni orarie: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = \dfrac{1}{t^2 + 1} \end{cases}$ dove t è misurato in secondi e lo spazio è misurato in metri. Scrivi l'equazione cartesiana della traiettoria e calcola il modulo della velocità all'istante $t = 1\ \mathrm{s}$, sapendo che la velocità istantanea è rappresentata da un vettore di componenti $\vec{v}(t) = (x'(t); y'(t))$	
20	La traiettoria descritta da un oggetto su un piano xOy ha le seguenti equazioni orarie: $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = \dfrac{1}{t^2 + 3} \end{cases}$ dove t è misurato in secondi e lo spazio è misurato in metri. Scrivi l'equazione cartesiana della traiettoria e calcola il modulo della velocità all'istante $t = 1\ \mathrm{s}$, sapendo che la velocità istantanea è rappresentata da un vettore di componenti $\vec{v}(t) = (x'(t); y'(t))$.	

Esercizio svolto

Determiniamo k (con k>0) in modo che le curve di equazione $y = k\sqrt{x}$ e $y = x^2 + 1$ siano tangenti

Indichiamo con $P(x_0, y_0)$ il punto di tangenza incognito tra le due curve.

Se P appartiene a entrambe le curve deve soddisfare alle seguenti condizioni

$$\begin{cases} y_0 = k\sqrt{x_0} \\ y_0 = x_0^2 + 1 \\ \dfrac{k}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y_0 = \dfrac{4}{3} \\ k = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{3} \end{cases}$$

Per cui le curve sono tangenti per $k = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$ e il suo punto di contatto è $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{4}{3}\right)$

Esercizio svolto

Determiniamo, se esistono, i valori di a e b per cui la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{3x^2+1} & x \le 1 \\ blogx + x & x > 1 \end{cases}}$$

è derivabile in R.

La funzione è derivabile per ogni $x \neq 1$ quindi, affinché sia derivabile in R, è sufficiente che sia derivabile in $x = 1$

Perché la funzione sia derivabile in $x = 1$, deve anzitutto essere ivi continua, quindi deve essere:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-}\left(a + \sqrt{3x^2+1}\right) = \lim_{x\to 1^+}(blogx + x)$$
$$\Rightarrow \quad a + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

Supposto $a = 1$ si ha:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{3x^2+1} & x \le 1 \\ blogx + x & x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} & x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Affinché la funzione sia derivabile in $x = 1$ deve aversi

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x} + 1$$

Da cui si ottiene $b = 1/2$

21	Determina k in modo che le due curve di equazioni $y = e^x$ e $y = 6 - ke^{-x}$ siano tangenti	$\boldsymbol{k = 9}$
22	Determina, se esistono, i valori di a e b per cui le funzioni date sono derivabili in R	$\boldsymbol{a = b = 1}$

	$f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$	
23	Determina, se esistono, i valori di a per cui le funzioni date sono derivabili in R $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$	$\boldsymbol{a = 2}$
24	Determina, se esistono, i valori di a e b per cui le funzioni date sono derivabili in R $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + a & x < 0 \\ x^2 + bx - 3 & x \geq 0 \end{cases}$	$\boldsymbol{a = -3, b = 2}$
25	Determina, se esistono, i valori di a e b per cui le funzioni date sono derivabili in R $f(x) = \begin{cases} asinx + 1 & x < 0 \\ 2cosx + b & x \geq 0 \end{cases}$	$\boldsymbol{a = 0, b = -1}$
26	Determina, se esistono, i valori di a e b per cui le funzioni date sono derivabili in R $f(x) = \begin{cases} alogx + bx & x < 1 \\ x^2 + \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$	$\boldsymbol{a = -1, b = 2}$
27	Determina, se esistono, i valori di a e b per cui le funzioni date sono derivabili in R $f(x) = \begin{cases} alog^2x + b & x < 1 \\ x^2 + ax + 4 & x \geq 1 \end{cases}$	$\boldsymbol{a = -2, b = 3}$
28	Determina k (con k>0) in modo che le curve di equazione $y = e^x$ e $y = 6 - ke^{-x}$ siano tangenti	$k = 9$
29	Determina k (con k>0) in modo che le curve di equazione $y = x^2$ e $y = klogx$ siano tangenti	$k = 2e$
30	Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui *f*(*x*) è continua e quelli in cui è derivabile. $f(x) = \left\| \text{sen}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) \right\|$	

31	Data la funzione $f(x) = \frac{3x+4}{2x}$, determina l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = -1$	$y = -2x - \frac{5}{2}$

32	Determina il valore del parametro a per cui la tangente al grafico della funzione $$f(x)=\frac{ax^2+3x}{2x+1}$$ nel punto di ascissa $x=2$ risulta orizzontale.	$a=-\frac{1}{4}$
33	Determina le ascisse dei punti appartenenti al grafico della funzione $$f(x)=\frac{x^2+4x}{2x-1}$$ in cui la retta tangente ha coefficiente angolare $m=-1$	$x=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$
34	Determina le equazioni delle rette tangenti sia al grafico della parabola di equazione $y=-27x^2$ sia al grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{x^2}$	$y=\pm 54x+27$
35	Determina l'angolo α formato dalle rette tangenti ai grafici delle funzioni $f(x)=x^2+6x-2$ e $f(x)=2log\lvert x-1\rvert-\frac{x^2+2x}{2}$ nei loro punti di ascissa -2	$\alpha=\frac{\pi}{4}$
36	Determina i parametri a,b,c per cui il grafico della funzione $$f(x)=e^{\frac{ax^2+bx}{x+c}}$$ ha un asintoto verticale di equazione x=1, passa per il punto di coordinate $(2,e^4)$ e ha ivi tangente orizzontale	$a=1, b=0,$ $c=-1$
37	Stabilisci se la funzione $$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+8x-20}{x-5} & se\ x<2\\ 2\sqrt{x-2} & se\ x\geq 2\end{cases}$$ è continua e derivabile e determina le rette tangenti al suo grafico nei punti di ascisse $x=-1$ e $x=3$	Continua ma non derivabile in x=2; $y=-\frac{1}{4}x+\frac{17}{4}$; $y=x-1$
38	Date le funzioni $f(x)=x^3+3x$ e $g(x)=\sqrt{x+3}$ a. Scrivi l'espressione analitica della funzione $h(x)=f°g$ b. Stabilisci se è derivabile nel suo campo di esistenza c. Traccia il grafico della funzione h(x) d. Trova la tangente al grafico di h(x) nel suo punto di ascissa -2	$h(x)$ $=x+3+3\sqrt{x+3}$ derivabile per x>-3 $y=\frac{5}{2}x+9$
39	Individua il punto in cui la retta tangente al grafico della funzione $$f(x)=log\left(\frac{4x}{x^2+2}\right)$$ è perpendicolare alla retta di equazione $y=x+3$	$\left(1,log\frac{4}{3}\right)$
40	Data la funzione $$f(x)=\frac{2x-6}{1-3x}$$ determina i punti appartenenti al suo grafico in cui la retta tangente è perpendicolare alla retta di equazione $y=x+3$	
41	Determina a,b,c in modo che a curva di equazione $$f(x)=\frac{ax^2+b}{x^2+c}$$ soddisfi le seguenti condizioni:	$a=2; b=-8; c=0$

	a. Ha per asintoto orizzontale la retta di equazione y=2 b. Passa per il punto $P(2;0)$ ed ha in tale punto tangente parallela alla retta di equazione $y=2x$	
42	Determina a,b,c in modo che a curva di equazione $$f(x)=\frac{ax+1}{x^2+bx+c}$$ soddisfi le seguenti condizioni: a. Ha per asintoti verticali le rette di equazioni $x=-3$ e $x=1$ b. La tangente nel suo punto di intersezione con l'asse y è parallela alla retta di equazione $4x-9y+1=0$	$a=-2; b=2; c=-3$
43	Data la funzione $$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\leq 1 \\ x^3+cx & x>1 \end{cases}$$ trova a,b,c in modo che sia continua e derivabile per ogni $x\in R$ e abbia nel punto di ascissa 2 tangente parallela ala retta di equazione $y=5x-1$	$a=-4; b=-2;$ $c=-7$
44	Determina i punti appartenenti al grafico della funzione $f(x)=x^3-3x^2$ in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $y=9x$	$(-1;\ -4), (3;0)$
45	Determina a, b, c in modo che la funzione $$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x<0 \\ sin2x & 0\leq x\leq \pi \\ bx+c & x\geq \pi \end{cases}$$ sia derivabile $\forall x\in R$. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori a,b,c trovati.	$a=2; b=2; c=-2\pi$
46	Data la funzione $$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & x<0 \\ ax^2+bx+c & x\geq 0 \end{cases}$$ Determina a,b,c in modo che funzione sia derivabile due volte in R. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza dei valori di a,b,c trovati.	$a=1/2; b=1; c=0$
47	Considera la funzione $$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$ Determina i coefficienti a,b,c in modo che siano soddisfatte tutte le seguenti condizioni: a. La funzione è dispari b. La tangente al grafico della funzione nell'origine è la retta di equazione $y=-4x$ c. Il grafico della funzione interseca l'asse x, oltre che nell'origine, in altri due punti distinti e la tangente nel punto d'intersezione con il semiasse delle ascisse positive passa per il punto di coordinate $(2;\ 4)$	$a=\frac{16}{9}; b=0;$ $c=-4;$ $d=0$
48	Considera la funzione $$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$ a. Determina i coefficienti a,b,c,d in modo che sia:	$a=-1; b=0;$ $c=2; d=0$ $y=2x$ $y=-\frac{19}{4}x+\frac{27}{4}$

	$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=2, f''(1)=-6.$ b. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione passanti per $P(1;\ 2)$ e indica con A e B i punti di contatto delle tangenti con la curva di equazione $y=f(x)$. c. Determina l'area del triangolo APB	$A(0;0), B\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8}\right)$ $A=\frac{27}{16}$
49	Considera la funzione $$f(x)=ax^3+bx^2+c$$ a. Determina a,b,c in modo che $f(0)=0, f''(x)=\frac{9}{2}x-4$ b. Scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto $P(4;0)$ e tangenti alla curva di equazione $y=f(x)$.	$a=\frac{3}{4}; b=-2; c=0$ $y=0; y=x-4$ $y=\frac{128}{3}(x-4)$
50	Considera la funzione $$f(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+b}$$ a. Determina a e b in modo che abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x=3$ e che la tangente nell'origine al grafico di f sia parallela alla retta di equazione $2x-9y+9=0$ b. Traccia il grafico probabile della funzione $y=f(x)$ in corrispondenza dei valori a e b trovati al punto precedente. c. Determina le ascisse dei punti in cui la tangente al grafico di f è orizzontale d. Traccia il grafico della funzione $y=\|f(x)\|$ e determina i punti dove non è derivabile.	$a=-2; b=-9$ $x=\frac{9\pm 3\sqrt{5}}{2}$ $x=0, x=2$
51	Considera la funzione $$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}$$ a. Determina a,b,c,d in modo che abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x=1$, come asintoto obliquo la retta di equazione $y=x-2$ e come tangente nel punto di ascissa $x=2$ una retta parallela alla retta di equazione $y=7x$ b. Traccia il grafico probabile della funzione ottenuta c. Stabilisci se esistono punti appartenenti al grafico di f aventi tangente orizzontale. d. Indicati con P e Q, rispettivamente, i punti in cui il grafico di f interseca il semiasse delle ascisse negative e il semiasse delle ascisse positive, scrivi le equazioni delle rette tangenti in P e Q a f.	$a=1; b=-3;$ $c=-4; d=-1$
52	Considera la funzione $$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+b}$$ a. Determina a e b in modo che la retta di equazione $x=-2$ sia un asintoto della funzione e nel punto $x=2$ la tangente al grafico della funzione sia orizzontale b. Traccia il grafico probabile della funzione in corrispondenza dei valori di a e b trovati c. Determina l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto P di intersezione con l'asse y	$a=4, b=2$ Asintoti: $x=-2$, $y=-1, y=1$ $y=1-\frac{1}{2}x$
53	Considera la funzione	$a=1, b=2$ $x=e$

	$$f(x) = \frac{alogx}{x} + b$$ a. Sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $A(1;2)$ e ammette ivi come tangente la retta passante per A e parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, determina i valori di a e b. b. Determina l'ascissa del punto in cui il grafico della funzione ha tangente orizzontale	
54	Determina i parametri h e k in modo che la funzione $$f(x) = \begin{cases} hx^3 + kx^2 & x < 1 \\ \frac{logx}{x} + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$ sia continua e derivabile in R .	$h = -3;\ k = 5$
55	Data la funzione $$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{\lvert x^2 - 1 \rvert}}$$ tracciarne il grafico probabile, dopo averne determinato il campo di esistenza, il segno e gli eventuali asintoti verticali, orizzontali e obliqui	
56	Sia $a > 0, b \in R, c \in R$ Studia al variare di a,b e c la continuità e la derivabilità in x=0 della funzione: $$f(x) = \begin{cases} sin(x^a) & x > 0 \\ \sin(x+b) + c & x \leq 0 \end{cases}$$	
57	Determina k in modo che la funzione di equazione $y = ke^{2x}$ soddisfi la relazione $$y'' + 2y' + 3y = 3e^{2x}$$	

Dopo aver studiato la concavità delle seguenti funzioni, analizza le analogie e le differenze e adduci opportune riflessioni.

	$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$	
	$f(x) = \sqrt[5]{x^2-1}$	
	$f(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$	
	$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^4}$	
	$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^3}$	
	$f(x) = \sqrt[4]{(x^2-1)^3}$	
	$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^6}$	
	$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^7}$	
	$f(x) = \sqrt[4]{(x^2-1)^5}$	

	$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^{-2}}$	

MATEMATICA PER L'INGEGNERIA CHIMICA

In un campus universitario di 5000 studenti, la diffusione di un virus influenzale attraverso il corpo studentesco è modellato dalla seguente legge:

$$P(t) = \frac{4500}{1+300e^{-0.8t}} + 150$$

Dove P è il numero totale di persone infette e t è il tempo, misurato in giorni.

1. Studiare la funzione per tutte le t per cui è definita
2. Quanti studenti saranno infettati dopo 5 giorni?
3. Secondo questo modello, tutti gli studenti del campus saranno infettati con l'influenza?