I - LA FORMULA DI TAYLOR

Data una funzione, ci si chiede se è possibile approssimarla con una funzione più semplice, per esempio con un polinomio, in un intorno di un punto assegnato. Vedremo che questa operazione è possibile, a patto che la funzione sia derivabile un numero sufficiente di volte.

Scopo. *Approssimare una funzione $f(x)$ con un polinomio $T_n(x)$ di grado n, in un intorno di un punto assegnato $x_0 \in domf$, in modo che*

(1) $$f(x) - T_n(x) = o((x-x_0)^n), \qquad (\text{per } x \to x_0)$$

o, usando l'appropriata terminologia matematica, *in modo che f e T_n abbiano* **contatto di ordine n con f in x_0.**

Se ci basta ottenere un polinomio di grado 1 che approssimi la nostra funzione, la risposta è data dalla seguente formula, che si fonda sulla semplice esistenza della derivata prima. Infatti:

I.1 - **PROPRIETA' (Prima formula degli incrementi finiti).** *Data una funzione $f(x)$ derivabile in x_0, esiste un intorno di x_0 in cui f si può approssimare con un polinomio di primo grado; vale cioè la seguente espressione:*

I^o F.I.F. $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad (\text{per } x \to x_0)$$

I.2 - **COROLLARIO.** *Il polinomio*

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

ha contatto del primo ordine con $f(x)$ in x_0 .

Dimostrazione della proprietà I.1. Poiché f è derivabile in x_0, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

e dunque:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

In termini di o, questa formula si traduce in:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)\ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Dunque:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Introducendo pertanto il polinomio:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

possiamo scrivere:

$$f(x) = T_1(x) + o(x-x_0)$$

I.3 - *Osservazione* Il grafico del polinomio di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è quello della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $\mathrm{P}_0(x_0, f(x_0))$.

Definizione. *Il polinomio*

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

viene detto **polinomio di Taylor di ordine 1 della funzione f, centrato in x_0.**

Come abbiamo visto dalla I^o F.I.F., la differenza $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$ è trascurabile rispetto a $x - x_0$, se $x \to x_0$, cioè l'ordine di infinitesimo della differenza $f(x) - T_1(x)$ è superiore al primo.

Ci chiediamo se sia possibile precisare meglio tale ordine di infinitesimo; proviamo a confrontare $R_1(x)$ con $(x - x_0)^2$. Nel calcolo del limite che segue, supponiamo che f sia derivabile in un intorno di x_0 e usiamo il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)}$$

L'ultimo limite, se esiste finito, è legato alla derivata seconda di f calcolata in x_0; precisamente, se f è derivabile due volte in x_0, tale limite vale $\frac{1}{2} f''(x_0)$; dunque si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Pertanto:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \frac{1}{2} f''(x_0) = 0$$

e dunque:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0.$$

L'ultimo limite usando il linguaggio dei simboli di Landau dice che:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 = o((x - x_0)^2) \ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

ovvero che;

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Definizione. *Il polinomio*

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

si dice **polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f, centrato in x_0.**

Studiamo ora con lo stesso procedimento la differenza $f(x) - T_2(x)$, che sappiamo essere infinitesima di ordine superiore al secondo, per $x \to x_0$. Confrontiamo tale differenza con $(x - x_0)^3$; supponendo che f sia derivabile tre volte in x_0 (e dunque che esista f'' in un intorno di x_0) e applicando due volte il teorema di de l'Hôpital, troviamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{3(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{6(x - x_0)} = \frac{1}{6} f'''(x_0)$$

Pertanto:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3} = \frac{1}{6} f'''(x_0)$$

e dunque, con passaggi analoghi ai precedenti, troviamo che:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)\ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Definizione. *Il polinomio*

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

si dice **polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione f, centrato in x_0.**

Si osservi che i denominatori dei coefficienti delle successive potenze di $(x-x_0)$ si possono scrivere come $1 = 1!$, $2 = 2!$, $6 = 3 \cdot 2 = 3!$. Continuando, se f è derivabile 4 volte in x_0 si aggiungerà l'addendo $\frac{1}{4!}f^{(4)}(x - x_0)^4$ etc. Il procedimento seguito si può iterare, se f è ancora derivabile in x_0.

Si può dimostrare il seguente

I.4 - **Teorema.** *Sia f una funzione derivabile n volte in x_0. Allora esiste un polinomio $T_n(x)$ che ha contatto di ordine n con $f(x)$ in x_0 (per $x \to x_0$). Tale polinomio ha la seguente espressione:*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

ed è detto **polinomio di Taylor di ordine n della f, centrato in x_0.**

Si dimostra facilmente che:

I.5 - **Proprietà.** *Le derivate in x_0 di $f(x)$ e del polinomio $T_n(x)$ coincidono fino all'ordine n, cioè* (ponendo $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$):

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), \quad \forall k = 0, ..., n.$$

I.6 - **DEFINIZIONI**

L'espressione

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

si dice **formula di Taylor di ordine n della f, centrata in x_0, con resto di Peano.**

La funzione

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) =$$

$$= f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3-...-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si dice **resto (nella forma di Peano) di ordine n** relativo allo sviluppo di Taylor di f centrato in x_0.

Inoltre, *se il centro dello sviluppo è* $x_0 = 0$, si usa il termine **formula di McLaurin di ordine n.** Pertanto la formula di McLaurin di ordine n di f con resto di Peano assume la semplice espressione:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)\ , \qquad \text{per } x \to 0.$$

Dunque, al crescere di n l'approssimazione di f "migliora", nel senso che l'errore commesso considerando il polinomio di Taylor di grado n invece della funzione f diventa trascurabile rispetto a x^n.

Attenzione! L'approssimazione così ottenuta è "buona" solo localmente, cioè in un intorno di x_0. Più ci si allontana da x_0, più in generale peggiorerà l'approssimazione.

Possiamo renderci conto di ciò osservando i grafici di $f(x) = \log(1+x)$ e dei polinomi di McLaurin che approssimano f in un intorno di $x_0 = 0$ (si vedrà più avanti - nel paragrafo III.8.1 - quale è la loro espressione). Come si vede, se x supera l'intorno di $x_0 = 0$ di raggio 1 i valori di $f(x)$ e dei polinomi $T_n(x)$ sono completamente diversi!

Per avere un'idea dell'errore commesso, abbiamo bisogno di poter dare una stima del resto, cosa che non è possibile se si usa il resto nella forma di Peano. Si dimostra però che il resto può essere espresso anche in altra forma. Vale infatti il seguente:

I.7 - **Teorema.** *Se f è derivabile $n+1$ volte in un intorno U di x_0, allora, qualunque sia $x \in U$, esiste un $c \in]x_0, x[$ (oppure $c \in]x, x_0[$) tale che:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Il resto $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

è detto **resto in forma di Lagrange di ordine** n (o resto di Lagrange) dello sviluppo di Taylor di ordine n di f centrato in x_0.

I.8 - <u>*Osservazioni*</u>

(i) Lo sviluppo di Taylor con resto di Peano generalizza la I^o F.I.F.; infatti la I^o F.I.F. non è altro che lo sviluppo di Taylor del primo ordine con resto di Peano. Invece lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange generalizza la II^o F.I.F (che coincide con lo sviluppo di ordine 0 di f con resto di Lagrange).

(ii) Le due diverse espressioni del resto nella formula di Taylor forniscono due punti di vista diversi sull'approssimazione di $f(x)$ con il polinomio di Taylor $T_n(x)$ nell'intorno del punto x_0.

Il resto di Peano :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o(x - x_0)^n \ , \quad \text{per } x \to x_0$$

esprime il fatto che l'errore che si commette approssimando $f(x)$ con $T_n(x)$ (per $x \to x_0$) è trascurabile rispetto a $(x - x_0)^n$ e inoltre che $f(x) \sim T_n(x)$, per $x \to x_0$.
Pertanto dà un'indicazione qualitativa dell' errore, molto utile (come vedremo) in certe situazioni (ad esempio, nel calcolo dei limiti), ma non ci consente di quantificarlo in qualche modo.

Invece il resto di Lagrange consente di dare una maggiorazione dello scarto $R_n(x)$ tra $f(x)$ e $T_n(x)$ (se x varia in un intorno U di x_0), se si riesce a limitare la derivata $(n+1)-$esima di f , quando x si mantiene "vicino a x_0".

Infatti, nell'ipotesi che esista una costante $M \in \mathbb{R}_+$ tale che, se x varia in un opportuno intorno $U(x_0)$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, dalla formula I.7 otteniamo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{2!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

Esempio. Serviamoci del risultato precedente per calcolare un valore approssimato di $\frac{1}{e}$ servendoci del polinomio di McLaurin di grado 4 di e^x e valutiamo l'errore commesso.

Iniziamo con lo scrivere il polinomio di McLaurin di grado 4 di $f(x) = e^x$.

Osserviamo che $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 1$; pertanto, sostituendo nella formula di McLaurin del paragrafo I.6, abbiamo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(x)$$

Calcolandola per $x = -1$, abbiamo:

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + R_4(-1) = \frac{3}{8} + R_4(-1) = 0,375 + R_4(-1)$$

Pertanto possiamo approssimare $\frac{1}{e} \approx 0,375$.

Cerchiamo ora di valutare l'errore commesso. Scriviamo il resto $R_4(x)$ nella forma di Lagrange, tenendo conto che $f^{(5)}(c) = e^c$:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 \ = \frac{e^c}{5!}x^5, \quad \text{con } 0 < c < x \ , \quad \text{oppure } x < c < 0$$

Dunque:

$$R_4(-1) = \frac{e^c}{120}(-1)^5 = -\frac{e^c}{120} \ , \quad \text{dove } -1 < c < 0$$

Poiché $R_4(-1) = f(-1) - T_4(-1) < 0$, il valore $T_4(-1) = 0,375$ fornisce un'approssimazione per eccesso di $\frac{1}{e}$. Inoltre, poiché $-1 < c < 0$, e dunque $e^{-1} < e^c < 1$, possiamo maggiorare l'errore:

$$|R_4(-1)| = \ \frac{e^c}{120} < \frac{1}{120} = 0,008\overline{3}$$

Dunque approssimando il valore di $\frac{1}{e}$ con $0,375$ commettiamo un errore che non supera $0,008\overline{3}$.

II - SVILUPPI NOTEVOLI

PREMESSA: se $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ è possibile costruire sviluppi centrati in ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ e di ordine arbitrario.

II.1 - POLINOMI

Sia $Q_n(x)$ un polinomio di grado n $\quad Q_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$

Sviluppo in $x_0 = 0$

Se $k < n$ il polinomio di McLaurin di grado k coincide con i termini fino al grado k di $Q_n(x)$. Ad esempio, se $\quad Q_2(x) = 3 + 2x + x^2$, allora $\quad T_1(x) = 3 + 2x$ e $\quad R_1(x) = x^2 = o(x)$.

Se $k \geq n$ il polinomio di McLaurin di $Q_n(x)$ coincide con $Q_n(x)$ stesso e il resto è identicamente nullo

$$Q_n(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} Q_n}{dx^{n+1}}(c) \equiv 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Sviluppo in $x_0 \neq 0$

Il polinomio di Taylor di grado n coincide con $Q_n(x)$ scritto nella variabile $(x - x_0)$, anziché x. Ad esempio: lo sviluppo di Taylor di grado 2 centrato in $x_0 = 1$ del polinomio $Q_2(x) = 3+2x+x^2$ è il polinomio stesso scritto secondo le potenze di $(x-1)$, cioè: $\quad Q_2(x) = 6 + 4(x-1) + (x-1)^2$.

II.2 - FUNZIONE ESPONENZIALE

Si tenga presente che $\qquad D^k(e^x) = e^x \;, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Sviluppo in $x_0 = 0$

Se $x_0 = 0$, $\quad D^k(e^x)\Big|_{x=0} = 1 \;, \quad \forall k \in \mathbf{N}$.
Pertanto la formula di McLaurin di ordine n della funzione $f(x) = e^x$ risulta essere:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Sviluppo in $x_0 \neq 0$

Se $x_0 \neq 0 \qquad D^k(e^x)\Big|_{x=x_0} = e^{x_0} \;, \quad \forall k \in \mathbf{N}$. Dunque la formula di Taylor di ordine n della funzione $f(x) = e^x$ centrata in x_0 risulta essere:

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

II.3 -FUNZIONI IPERBOLICHE

Ricordiamo che $D(\sinh x) = \cosh x$ e che $D(\cosh x) = \sinh x$; inoltre $\sinh(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$.

Pertanto, nello sviluppo di McLaurin della funzione seno iperbolico, tutti i coefficienti delle potenze di x di grado pari saranno nulli, e, poiché $D^{(2k+1)}(\sinh x)\Big|_{x=0} = \cosh(0) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, si avrà il seguente sviluppo:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \ , \qquad \text{per } x \to 0.$$

In modo analogo, nello svipuppo di McLaurin di $\cosh x$ compariranno solo potenze di grado pari; lo sviluppo risulta:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \ , \qquad \text{per } x \to 0.$$

<u>*Osservazione*</u>. Si può provare che *lo sviluppo di McLaurin di una funzione pari*, se esiste, *contiene solo potenze di x di grado pari* e, analogamente, *lo sviluppo di McLaurin di una funzione dispari*, se esiste, *contiene solo potenze di x di grado dispari.*

II.4 - FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Ricordiamo che $D(\sin x) = \cos x$ e che $D(\cos x) = -\sin x$; inoltre $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$.

Pertanto, nello sviluppo di McLaurin della funzione seno , tutti i coefficienti delle potenze di x di grado pari saranno nulli, e, poiché $D^{(2k+1)}(\sin x)\Big|_{x=0} = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, si avrà il seguente sviluppo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \ , \qquad \text{per } x \to 0.$$

In modo analogo, nello svipuppo di McLaurin di $\cos x$ compariranno solo potenze di grado pari e lo lo sviluppo risulterà essere:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

II.5 - LE FUNZIONI $(1+x)^\alpha$

Se $\alpha \in \mathbf{N}$, $(1+x)^\alpha$ è un polinomio. Consideriamo pertanto $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{N}$, e cerchiamo lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \end{array}$$

Quindi:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Definiamo ora il simbolo **COEFFICIENTE BINOMIALE**:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

Possiamo dunque riscrivere lo sviluppo precedente come:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + ... + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

In particolare, lo sviluppo troncato al 1^o ordine è :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

Dalla formula precedente, ricaviamo lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ per alcuni valori notevoli di α.

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + \binom{-1}{4}x^4 + \ldots + \binom{-1}{n}x^n + o(x^n) =$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4}x^4 + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + o(x^n) =$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{4}x^4 + \ldots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n + o(x^n) =$$
$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + o(x^n).$$

III - OPERAZIONI SUGLI SVILUPPI DI TAYLOR

Lo sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$ in x_0 è un utile strumento che permette di studiare il comportamento locale di f in un intorno di x_0.

Molto spesso, se la f ha un'espressione piuttosto complicata, che fa intervenire funzioni elementari e loro composte, può non essere agevole calcolarne lo sviluppo di Taylor partendo dalla definizione, cioè calcolando il valore in x_0 delle derivate di f fino all'ordine desiderato. Invece, *partendo dagli sviluppi noti delle funzioni elementari*, risulta più agevole pervenire allo sviluppo di Taylor di f, secondo procedimenti che illustreremo nel seguito.

Questa possibilità si fonda sul seguente :

III.1 - **TEOREMA** *(Unicità del polinomio di Taylor)* .
Sia f derivabile n volte nel punto x_0. Se esiste un polinomio P_n di grado $\leq n$ che abbia contatto di ordine n con f in x_0, cioè tale che, per le x appartenenti ad un opportuno intorno di x_0 si possa scrivere

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \ , \qquad \text{per } x \to x_0.$$

allora $P_n(x)$ coincide con il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di ordine n relativo ad f centrato in x_0.

Questa proprietà ci assicura che, qualunque sia la strada con cui arriviamo ad un'espressione del tipo $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$, per $x \to x_0$, (purché matematicamente lecita) essa fornisce lo sviluppo di Taylor di ordine n di f centrato in x_0.

Ci concentriamo sugli sviluppi di McLaurin (se fosse richiesto lo sviluppo di Taylor centrato in x_0, ci si può sempre ridurre allo sviluppo di McLaurin con il cambio di variabile $t = x - x_0$).

Prima di descrivere come operare con gli sviluppi premettiamo alcune proprietà che ci saranno utili del simbolo di Landau "o":

III.2 - **PROPRIETA'**

$$o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p) \ , \quad \text{con } p = \min(n, m) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$o(kx^n) = o(x^n) \ , \quad \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$x^m o(x^m) = o(x^{n+m}) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$o(x^n) o(x^m) = o(x^{n+m}) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$[o(x^n)]^k = o(x^{kn}) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$[o(x^n)] = x^n o(1) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

$$f = o(x^n) \land f \asymp g \Rightarrow g = o(x^n) \ , \quad \text{per } x \to 0$$

Siano ora

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{e} \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

lo sviluppo di McLaurin di ordine n delle funzioni f e g (centrati in 0).

III.3 - **SVILUPPO DI** $f(\alpha x)$ di ordine n

Se cambiamo x in αx e partiamo dallo sviluppo di McLaurin di ordine n di f,

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

allora:

$$f(\alpha x) = P_n(\alpha x) + o((\alpha x)^n) = P_n(\alpha x) + o(x^n)$$

Dunque **il polinomio** $P_n(\alpha x)$ **è il polinomio di McLaurin di ordine** n **di** $g(x) = f(\alpha x)$.

III.3.1 - *ESEMPI*

(i) Partendo dallo sviluppo di e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

si ottiene facilmente lo sviluppo di McLaurin di e^{3x}:

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + ... + \frac{(3x)^n}{n!} + o(x^n) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + ... + \frac{3^n}{n!}x^n + o(x^n)$$

(ii) Partendo dallo sviluppo di $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

si ottiene facilmente (cambiando x in $-x$) lo sviluppo di McLaurin di $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + o(x^n)$$

III.4 - **SVILUPPO DELLA SOMMA** $f + g$

Ci chiediamo se, a partire dagli sviluppi di McLaurin di ordine n di f e di g, sia possibile trovare lo sviluppo di $f + g$.

Usando le proprietà di "o" viste sopra, ricaviamo:

$$f(x)+g(x) = [P_n(x)+o(x^n)]+[Q_n(x)+o(x^n)] = [P_n(x)+Q_n(x)]+[o(x^n)+o(x^n)] = P_n(x)+Q_n(x)+o(x^n)$$

Dunque *il polinomio* $P_n(x) + Q_n(x)$ è *il polinomio di McLaurin di ordine* n *di* $f(x) + g(x)$.

Ad esempio ricaviamo lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione $f(x) = \sin x - \sinh x$ partendo dagli sviluppi di McLaurin di ordine 3 delle funzioni $\sin x$ e $\sinh x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Pertanto:

$$f(x) = \sin x - \sinh x = [x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)] - [x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)] = -2\frac{x^3}{3!} + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

III.4.1 - <u>*Osservazione*</u> - Come si può capire dall'esempio precedente, nello sviluppare la differenza $f - g$ si può verificare la cancellazione di potenze di x di esponente $\leq n$, se ciascuna di queste compare nei due sviluppi con lo stesso coefficiente. Per ottenere la prima potenza di x con coefficiente non nullo, è necessario allora partire da sviluppi di f e di g di ordine $n' > n$.

Facciamo un esempio che fa anche capire come usando gli sviluppi di Taylor di una funzione infinitesima per $x \to x_0$ si possano avere informazioni sull'ordine di infinitesimo di f.

Si voglia determinare l'ordine di infinitesimo in $x_0 = 0$ della funzione $h(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$. Partiamo dagli sviluppi del primo ordine di McLaurin di $f(x) = e^x$ e di $g(x) = \sqrt{1+2x}$:

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x) + o(x) = 1 + x + o(x)$$

Dunque:

$$h(x) = f(x) - g(x) = [1 + x + o(x)] - [1 + x + o(x)] = o(x)$$

Non abbiamo pertanto nessuna informazione utile sul comportamento di $h(x)$ per $x \to 0$. Proviamo a utilizzare gli sviluppi di McLaurin del secondo ordine:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Pertanto

$$h(x) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - \left[1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] = x^2 + o(x^2)$$

Dunque $h(x) \sim x^2, \quad$ per $x \to x_0$. Quindi l'ordine di infinitesimo di h per $x \to x_0$ è 2.

III.5 - **SVILUPPO DEL PRODOTTO** fg

Siano $\quad f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad , \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$ i due sviluppi di ordine n di f e di g; vogliamo lo sviluppo del prodotto fg.

$$f(x)g(x) = [P_n(x)+o(x^n)]\cdot[Q_n(x)+o(x^n)] = P_n(x)Q_n(x)+P_n(x)o(x^n)+Q_n(x)o(x^n)+o(x^n)o(x^n) =$$

$$= P_n(x)Q_n(x) + o(x^n) + o(x^n) + o(x^n) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)$$

Il prodotto $P_n(x)Q_n(x)$ contiene potenze di grado superiore ad n, che sono tutte trascurabili rispetto a x^n. Possiamo dunque scrivere:

$$P_n(x)Q_n(x) = S_n(x) + o(x^n)$$

e pertanto:

$$f(x)g(x) = S_n(x) + o(x^n)$$

In pratica, per trovare lo sviluppo di McLaurin di ordine n del prodotto fg, si scrivono gli sviluppi di McLaurin di f e di g fino all'ordine n e si moltiplicano tra loro trascurando tutti i termini che sono $o(x^n)$.

III.5.1 - **Esempio** - Calcoliamo lo sviluppo di McLaurin di ordine 4 di $h(x) = e^x \sin x$, partendo dagli sviluppi di ordine 4 di e^x e di $\sin x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 + x + + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Pertanto:

$$h(x) = e^x \sin x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] \cdot \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] =$$

$$= x + x^2 + +\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

III.6 - SVILUPPO DEL QUOZIENTE $\frac{f(x)}{g(x)}$

Cerchiamo lo sviluppo di McLaurin di ordine n di $\frac{f(x)}{g(x)}$ a partire dagli sviluppi di McLaurin di ordine n : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ e $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$; osserviamo intanto che lo sviluppo ha senso se $g(0) \neq 0$. Posto

$$h(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{(e dunque} \quad h(x)g(x) = f(x)),$$

cerchiamo uno sviluppo di $h(x)$ del tipo $h(x) = S_n(x) + o(x^n)$, dove $S_n(x)$ è un polinomio a coefficienti incogniti

$$S_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \ .$$

Sostituendo in $h(x)g(x) = f(x)$, e ricordando quanto detto per il prodotto di sviluppi, abbiamo:

$$S_n(x)Q_n(x) + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n) \ .$$

Pertanto la parte di grado $\leq n$ del polinomio $S_n(x)Q_n(x)$ (di grado $2n$) deve coincidere termine a termine con $P_n(x)$. Possiamo dunque ricavare i coefficienti incogniti c_k del polinomio $S_n(x)$, in ordine crescente di indice, a partire da c_0.

III.6.1 - **Esempi**

(i) Calcoliamo lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 di $h(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Si deve avere:

$$\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right] \cdot \left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_5 x^5 + o(x^5)\right] = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

ovvero:

$$c_0 + c_1 x + \left(c_2 + \frac{c_0}{2}\right) x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right) x^3 + \left(c_4 + \frac{c_0}{24} - \frac{c_2}{2}\right) x^4 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24}\right) x^5 + o(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di x dello stesso grado, otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} & c_0 = 0 \\ & c_1 = 1 \\ & c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \\ & c_4 + \frac{c_0}{24} - \frac{c_2}{2} = 0 \\ & c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

da cui:

$$c_0 = 0\ , \quad c_1 = 1\ , \quad c_2 = 0\ , \quad c_3 = \frac{1}{3}\ , \quad c_4 = 0\ , \quad c_5 = \frac{2}{15}$$

Infine, lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 di $\tan x$ risulta:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Come ci si doveva aspettare, tale sviluppo contiene solo potenze dispari di x. Avremmo potuto partire da uno sviluppo incognito contenente solo potenze dispari di x: $\tan x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + o(x^5)$ risparmiando calcoli!

(ii) Calcoliamo lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 di $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Osserviamo che lo sviluppo ha senso poiché $\cos 0 \neq 0$ e vale se $x \in]-\delta, \delta[\subseteq]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Poiché $h(x) \cdot \cos x = 1$, e osservando come sopra che lo sviluppo incognito di $h(x)$ conterrà solo potenze pari di x, si deve avere:

$$\Big(c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + o(x^4)\Big) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = 1$$

e dunque

$$c_0 + (c_2 - \frac{1}{2}c_0)x^2 + (c_4 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{24}c_0)x^4 + o(x^4) = 1$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} &c_0 = 1 \\ &c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0 \\ &c_4 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{24}c_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$c_0 = 1 \quad c_2 = \frac{1}{2}\ , \quad c_4 = \frac{5}{24}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

III.7 SVILUPPO DELLA FUNZIONE COMPOSTA $g \circ f$

Cerchiamo ora lo sviluppo di McLaurin di ordine n di $g \circ f$ a partire dagli sviluppi di McLaurin di ordine n di f e di g.

Sia $f(x)$ infinitesima per $x \to 0$. Pertanto deve essere:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)\ , \qquad \text{per } x \to 0$$

mentre la funzione $g(y)$ avrà uno sviluppo di McLaurin qualunque:

$$g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n + o(y^n)\ , \qquad \text{per } y \to 0\ .$$

Per trovare lo sviluppo della funzione composta $h(x) = g(f(x))$ iniziamo con il sostituire $y = f(x)$ nello sviluppo di $g(y)$:

$$g(f(x)) = b_0 + b_1 f(x) + b_2[f(x)]^2 + b_3[f(x)]^3 + \ldots + b_n[f(x)]^n + [f(x)]^n o(1)\ , \qquad \text{per } y \to 0\ .$$

Poiché $f(x)$ è sicuramente continua in 0, si ha che, se $x \to 0$, anche $y = f(x) \to 0$ e dunque nella precedente espressione la funzione $o(1)$ è infinitesima non solo per $y \to 0$, ma anche per

$x \to 0$. Inoltre, ricordando quanto detto nello sviluppo del prodotto,si ha:

$$[f(x)]^n = a_1^n x^n + o(x^n) \ , \qquad \text{per} \ \ x \to 0$$

e dunque:

$$[f(x)]^n o(1) = o(x^n) \ , \qquad \text{per} \ \ x \to 0$$

Pertanto sostituendo nello sviluppo di $g(f(x))$, si ha:

$$g(f(x)) = b_0 + b_1 f(x) + b_2[f(x)]^2 + b_3[f(x)]^3 + \ldots + b_n[f(x)]^n + o(x^n) \ , \qquad \text{per} \ \ x \to 0 \ .$$

A questo punto è sufficiente sviluppare le varie potenze $[f(x)]^k$, $1 \leq k \leq n$ fino ll'ordine n e sostituirle per avere lo sviluppo di ordine n di $g(f(x))$.

III.7.1 - **Esempi**

(i) Calcoliamo lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 di $h(x) = e^{\sin x}$. Dunque, nel nostro caso, $f(x) = \sin x$ e $g(y) = e^y$.

Scriviamo gli sviluppi di ordine 3 di f e di g:

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \ , \qquad g(y) = e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(x^3)$$

Allora:

$$h(x) = 1+\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3+o\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right] =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

(ii) Calcoliamo lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 di $h(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$.

Scriviamo gli sviluppi di ordine 3 di f e di g:

$f(x) = \frac{x}{1-x} = x \cdot \frac{1}{1-x} = x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$

$g(y) = e^y = 1 + y + \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{6}y^3 + o(x^3)$

Allora:

$$h(x) = 1+(x+x^2+x^3+o(x^3))+\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+o(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+x^2+x^3+o(x^3))^3+o\left[(x + x^2 + x^3 + o(x^3))^3\right] =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + +x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + o(x^3)$$

III.7.2 - *Osservazione*

Abbiamo descritto un procedimento per trovare lo sviluppo di McLaurin di $g(f(x))$, a partire dagli sviluppi di McLaurin di f e di g, quando $f(x)$ è infinitesima per $x \to 0$. Vediamo ora come si può procedere nel caso in cui $f(0) \neq 0$. Facciamo alcuni esempi:

(a) Sia $h(x) = g(f(x)) = e^{\cos x}$. Qui $\cos 0 \neq 0$, però possiamo scrivere

$$h(x) = e^{\cos x} = e^{1+(\cos x - 1)} = e \cdot e^{\cos x - 1}.$$

In questo modo ci siamo ricondotti allo sviluppo della funzione composta $e^{\cos x-1}$ in cui la componente più interna è infinitesima per $x \to 0$.

(b) Sia $h(x) = g(f(x)) = \sin(\log(2+x))$. Anche qui la funzione componente più interna $\log(2+x)$ non è infinitesima per $x \to 0$. Riscriviamola:

$$\sin(\log(2+x)) = \sin\left[\log\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\right] = \sin\left[\log 2 + \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \sin(\log 2)\cdot\cos\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) + \cos(\log 2)\cdot\sin\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)$$

Siamo così ricondotti alla ricerca dello sviluppo delle funzioni composte $\cos\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)$ e $\sin\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)$ in cui la funzione più interna è infinitesima per $x \to 0$.

III.8 - **DERIVAZIONE E SVILUPPI DI TAYLOR**

Supponiamo di conoscere lo sviluppo di McLaurin di ordine $n-1$ della derivata di una funzione $f(x)$; è possibile allora ricavare lo sviluppo di ordine n di $f(x)$ a partire dallo sviluppo di $f'(x)$, operando nel modo che segue .

Sia

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \ldots + c_nx^n \;\; + o(x^n)$$

lo sviluppo (a coefficienti c_i incogniti) di $f(x)$. Derivando tale espressione e osservando che $D[o(x^n)] = o(x^{n-1})$, otteniamo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \ldots + nc_nx^{n-1} \;\; + o(x^{n-1})$$

I coefficienti incogniti dello sviluppo di f' scritto sopra devono coincidere con i coefficienti dello sviluppo noto di f' (data l'unicità del polinomio di Taylor di ordine $n-1$ della funzione f'). Questo ci consente di ricavare c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , ... , c_n . Quanto a c_0 , esso è immediatamente ricavabile in quanto $c_0 = f(0)$.

Facciamo alcuni esempi per illustrare questo procedimento.

III.8.1 - **Esempi**

(i) Calcoliamo lo sviluppo di McLaurin di ordine n di $f(x) = \log(1+x)$ a partire dallo sviluppo noto di $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

Sia

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \ldots + c_nx^n \;\; + o(x^n)$$

lo sviluppo (a coefficienti c_i incogniti) di $f(x) = \log(1+x)$. Deriviamo tale espressione:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \ldots + nc_nx^{n-1} \;\; + o(x^{n-1})$$

Uguagliamo i coefficienti incogniti con quelli di pari grado dello sviluppo noto di f':

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^e - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Pertanto si deve avere:

$$\begin{array}{lll}
c_1 = 1 & \Rightarrow & c_1 = 1 \\
2c_2 = -1 & \Rightarrow & c_2 = -\frac{1}{2} \\
3c_3 = 1 & \Rightarrow & c_3 = \frac{1}{3} \\
4c_4 = -1 & \Rightarrow & c_4 = -\frac{1}{4} \\
5c_5 = 1 & \Rightarrow & c_5 = \frac{1}{5} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
nc_n = (-1)^{n-1} & \Rightarrow & c_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}
\end{array}$$

Poiché $c_0 = f(0) = \log(1+0) = 0$, abbiamo lo sviluppo cercato:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + o(x^n)$$

(ii) Calcoliamo ora lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 di $f(x) = \arcsin x$ servendoci dello sviluppo di $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ricaviamo anzitutto lo sviluppo di $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a partire dallo sviluppo di $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)$$

Sostituendo in tale espressione $t = -x^2$, abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

Sia ora

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \ + o(x^5)$$

lo sviluppo (a coefficienti c_i incogniti) di ordine 5 di $f(x) = \log(1+x)$. Deriviamo tale espressione:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ +o(x^4)$$

Uguagliando i coefficienti incogniti con quelli dello sviluppo trovato sopra di $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ troviamo:

$a_1 = 1$	$\Rightarrow$	$a_1 = 1$
$2a_2 = 0$	$\Rightarrow$	$a_2 = 0$
$3a_3 = \frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$a_3 = \frac{1}{6}$
$4a_4 = 0$	$\Rightarrow$	$a_4 = 0$
$5a_5 = \frac{3}{8}$	$\Rightarrow$	$a_5 = \frac{3}{40}$

Poiché $a_0 = f(0) = \arcsin 0 = 0$, abbiamo lo sviluppo cercato:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

Come già avevamo osservato in precedenza, essendo la funzione $\arcsin x$ dispari il suo sviluppo di McLaurin contiene solo termini di gardo dispari; avremmo potuto partire da uno sviluppo incognito contenente solo termini di grado dispari, risparmiando così qualche calcolo.

(iii) Con procedimento del tutto analogo, si possono ricavare gli sviluppi di McLaurin di $\arctan x$, di $\mathrm{SettSh}\, x$ e di $\mathrm{SettTh} x$, a partire dagli sviluppi delle loro derivate $\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, e $\dfrac{1}{1-x^2}$.
Si trova:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{SettSh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$\mathrm{SettTh} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

IV - APPLICAZIONI DELLA FORMULA DI TAYLOR

Gli sviluppi di Taylor (centrati in un punto x_0) con resto di Peano trovano applicazioni al calcolo dei limiti, dell'ordine di infinitesimo e della ricerca della parte principale di funzioni, allo studio locale del segno e del grafico di una funzione, quando cioè interessa solo il comportamento locale delle funzioni in un intorno di x_0, e dunque possiamo pensare di approssimare le funzioni con i loro polinomi di Taylor di un certo ordine centrati in x_0. Come vedremo, tutti questi problemi si riducono a trovare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor.

IV.1 - **ESEMPI**

(i) Vogliamo calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{\tan x - x}$$

Trattandosi di un limite per $x\to 0$, interessa solo il comportamento locale delle funzioni coinvolte in un intorno di $x_0=0$, e dunque possiamo pensare di approssimare le funzioni e^x, $\log(1-x)$, e $\tan x$ con i loro polinomi di McLaurin di un certo ordine . Precisiamo quanto detto; iniziamo a sviluppare in serie di McLaurin le funzioni che intervengono, fino al terzo ordine :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\ , \qquad \log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\ , \qquad \tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Sostituiamo ora tali sviluppi nel limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-o(x^3)-1}{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{3}} = -\frac{1}{2}$$

(ii) Si vuole trovare l'ordine di infinitesimo e la parte principale (rispetto al campione standard) della funzione $f(x)=e^x-e^{\sin x}$, per $x\to 0$.

Sviluppiamo $f(x)$ in serie di McLaurin fino al terzo ordine; sappiamo dall'esempio III.7.1 (i) che $e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$. Pertanto:

$$f(x)=e^x-e^{\sin x}=\Big(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)-\Big(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\Big)=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

Possiamo quindi dedurre che, per $x\to 0$, rispetto all'infinitesimo campione standard $u(x)=x$:

$\mathrm{ord}(f(x))=3$ e che la parte principale di $f(x)$ è la funzione $p(x)=\frac{1}{6}x^3$.

Poiché $f(x)\sim\frac{1}{6}x^3$, per $x\to 0$, in un intorno di $x_0=0$ f si comporterà come la parabola cubica di equazione $y=\frac{1}{6}x^3$ e dunque in $x_0=0$ avrà un punto di flesso.

(iii) Si vuole trovare l'ordine di infinitesimo e la parte principale (rispetto al campione standard) della funzione $f(x)=\log\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sinh\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{4x^2}$, per $x\to+\infty$. Se sostituiamo $\frac{1}{x}=t$, ci riconduciamo allo studio di $g(t)=\log\sqrt{1+t}-\sinh t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2$ per $x\to 0$.
Proviamo a sviluppare $g(t)$ in serie di McLaurin fino al terzo ordine:

$$g(t)=\log\sqrt{1+t}-\sinh t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}\log(1+t)-\sinh t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)\right) - \left(t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = o(t^3)$$

Non abbiamo dunque nessuna informazione sulla nostra funzione, se non che ha ordine di infinitesimo superiore al terzo. Dobbiamo allora adentrarci più oltre nello sviluppo in serie di McLaurin. Procediamo fino al quarto ordine:

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)\right) - \left(t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)\right) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = -\frac{1}{8}t^4 + o(t^4)\,, \quad \text{per} x \to 0$$

Dunque, risostituendo $t = \dfrac{1}{x}$:

$$f(x) = -\frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,, \quad \text{per } x \to +\infty$$

Pertanto $f(x)$ ha ordine di infinitesimo 4 (per $x \to +\infty$) e la sua parte principale è $p(x) = -\dfrac{1}{8x^4}$.

Attraverso ilo sviluppo in serie di Taylor possiamo dunque avere molte informazioni sul comportamento di f in un intorno del centro dello sviluppo. Precisiamo quanto abbiamo già intuito con le due proprietà seguenti:

IV.2 - **Teorema** . Sia f derivabile k volte in x_0 e sia $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ mentre $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Allora:

	k pari	k dispari
$f^{(k)}(x_0) > 0$	minimo locale	flesso (ascendente)
$f^{(k)}(x_0) < 0$	massimo locale	flesso (discendente)

Se invece non si hanno informazioni su $f'(x_0)$, si può parlare solo di convessità locale o di flessi, secondo quanto dice il seguente:

IV.3 - **Teorema** . Sia f derivabile k volte in x_0 e sia $f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ mentre $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Allora:

	k pari	k dispari
$f^{(k)}(x_0) > 0$	f è convessa in x_0	flesso (ascendente)
$f^{(k)}(x_0) < 0$	f è concava in x_0	flesso (discendente)

Facciamo un esempio per illustrare l'uso di questi teoremi.

Sia $\phi(x) = \log(\cos x)) + \dfrac{1}{2}x^2$. Abbiamo visto (nell'Osservazione III.8) che si può pensare di sviluppare $h(x) = \log((\cos x))$ in serie di McLaurin come funzione composta di $f(x) = \cos x - 1$ e di $g(y) = \log(1 + y)$. Ricavando in questo modo lo sviluppo del quarto ordine, si trova $h(x) = \log((\cos x)) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4)$. Dunque

$$\phi(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

Applicando il teorema IV.2, si vede dunque che $\phi(x)$ ha in $x_0 = 0$ un punto di massimo locale.