lezione 3 del 11-10-2021

Area e superficie?

DEF. Due superfici si dicono equivalenti se hanno la stessa estensione

$$S \doteq T$$

- Due superfici uguali sono equivalenti
- La relazione di equivalenza tra superfici gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Ogni classe di equivalenza, a cui appartengono tutte le superfici tra loro equivalenti, indica una proprietà comune alle superfici che vi appartengono: l'area

$\Rightarrow$ Due superfici equivalenti hanno la stessa area.

1 - Due parallelogrammi che hanno uguali le basi e le relative altezze sono equivalenti -

Ogni parallelogramma è equivalente ad un rettangolo che ha base e l'altezza uguali a quelle del parallelogramma.

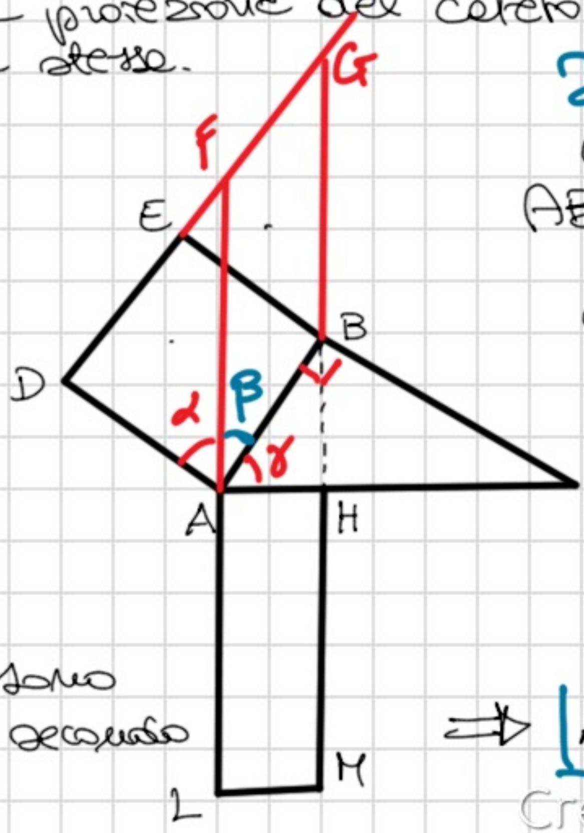
2 - Un triangolo è equivalente a un parallelogramma che ha per altezza la stessa altezza e per base metà della base del triangolo

3 - Un trapezio è equivalente a un triangolo che per altezza la stessa altezza e per base la somma delle basi del trapezio

4 - Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è equivalente alla metà di un rettangolo che ha per lati le diagonali del quadrilatero

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati uguali alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e all'ipotenusa stessa.



Dimostrazione

Considero i triangoli ABC e ADF

$\alpha = \gamma$ perché complem. di uno stesso angolo β

$\overline{AB} = \overline{AD}$ lati di un quadrato

$\hat{B} = \hat{D}$ retti

ABC e ADF sono uguali per il secondo criterio

$\Rightarrow \boxed{\overline{AC} = \overline{AF}}$

Consideriamo ADEB e AFGB. Essi hanno la stessa base AB e la stessa altezza AD, quindi sono equivalenti.

AFGB e AHML hanno le basi uguali $\overline{AF} = \overline{AC}$

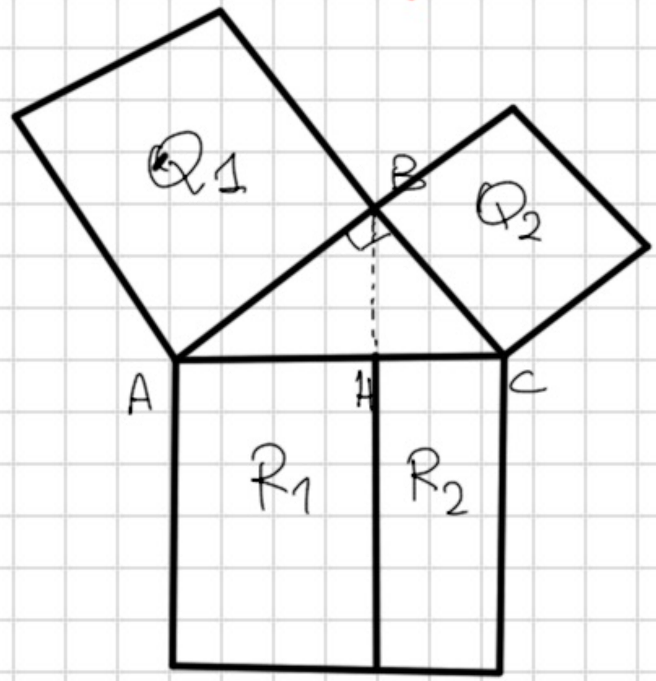
$AL = AC$ per ipotesi

$\Rightarrow AF = AL$

Inoltre hanno la stessa altezza AH $\Rightarrow$ sono equivalenti:

$$\begin{aligned} ADEB &\doteq AFGB \\ AFGB &\doteq AHML \end{aligned} \Rightarrow ADEB \doteq AHML$$

ALTRA DIM. del TEOREMA DI PITAGORA



$Q_1 \doteq R_1$

$Q_2 \doteq R_2$ $\longrightarrow$ $Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2$

LEMMA Se c è un quadrato perfetto, allora ogni numero primo presente nella sua fattorizzazione ha un esponente pari

Dim. $c = m^2$ e dove n si possa scomporre come

$$m = p_1^{n(1)}, \dots, p_s^{n(s)}$$

con $p_1, \dots p_s$, primi

Allora $c = m^2 = p_1^{2n(1)} \cdots p_s^{2n(s)}$

Es. $c = 12^2 = 144$ $\quad 12 = 2^2 \cdot 3$

$144 = 12^2 = 2^4 \cdot 3^2$

LEMMA. Sia p un numero primo, allora un quadrato perfetto non può essere p volte un altro quadrato perfetto. Ciò significa che l'equazione

$$p \cdot n^2 = m^2$$ non ammette soluzioni intere

Dim. Per assurdo esistano 2 interi n ed m tali che

$$p \cdot n^2 = m^2$$

- m^2 (e quindi m) è divisibile per p
- dall'equazione $c = m^2$ si deduce che il fattore p compare in c un numero pari di volte
- $c = n^2$ ci dice che p è presente in c un numero dispari di volte. Ma ciò è assurdo!

Proposizione: la radice di un numero primo non è un razionale.

Teorema: (paradosso dell'esistenza di grandezze non commensurabili).

Dato un triangolo rettangolo isoscele, qualunque sia l'unità di misura scelta, cateto e diagonale non possono avere entrambi misura intera.

Dim. Per assurdo, esista un segmento u tale che sia il lato che la diagonale siano multipli, secondo gli interi m ed n.
I quadrati costruiti sui cateti sono n^2 quadratini unitari mentre il quadrato costruito sull'ipotenusa è costituito da m^2 quadratini unitari

$$n^2 + n^2 = m^2 \Rightarrow 2n^2 = m^2 \quad \text{Assurdo!}$$

TEOREMA sull' esistenza dei triangoli impossibili *

* Un triangolo impossibile è un triangolo rettangolo isoscele con i tre lati interi.

Dato un triangolo impossibile possiamo costruirne un altro con area dimezzata.

dim. Sia DBC un triangolo impossibile, sia d la lunghezza della sua ipotenusa e c quella dei cateti.

Per Pitagora $d^2 = 2c^2$, d è pari.

⇒ Se D' è il punto di mezzo di DB, la lunghezza di D'B è un intero.
Ne segue che D'BC è un triangolo impossibile.

Dimostrare e dimostrare per assurdo

Nel t. di Pitagora si prova che vale una certa equazione e quindi la dimostrazione consiste nel mettere in evidenza che valgono una serie di uguaglianze.

Diverso è la dim. dell'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato.

B , $-B$, $\wedge$

$B \wedge (-B)$ la forma logica di una contraddizione

1) Si suppone A

2) Si ricava una contraddizione $B \wedge (-B)$

3) Non potendo valere $A \Rightarrow$ vale $-A$

Talete

Diogene Laerzio ne "Le vite" racconta di Talete che riuscì a determinare l'altezza della piramide di Cheope attraverso la misura dell'ombra da essa proiettata.

T. di Talete ⟶ (libro V, prop. 2) degli Elementi di Euclide

Proclo attribuisce a Talete 5 teoremi di geometria elementare

1) Un cerchio è diviso in due superfici di uguale area da qualunque diametro

2) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali

3) Gli angoli opposti al vertice sono uguali

4) Due triangoli eguali hanno un lato e i due angoli adiacenti eguali.

5) Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo

Teorema: L'insieme P dei numeri primi è infinito

dim. Sia A l'enunciato "P è infinito". Neghiamolo.
Supponiamo che l'insieme dei numeri primi sia finito.

Sia $P = \{p_1, \dots, p_n\}$

Sia $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Vogliamo dimostrare che q è primo.

Se per assurdo non fosse primo ammetterebbe un divisore primo $p \neq 1$.

Tutti i possibili numeri primi stanno in P e quindi deve coincidere con uno dei p_i.
Allora p_i dividendo q $p_1, \dots, p_n$ dovrà dividere anche $q \cdot p_1 \cdots p_n$. Ciò è assurdo!
$\Rightarrow$ q è primo.