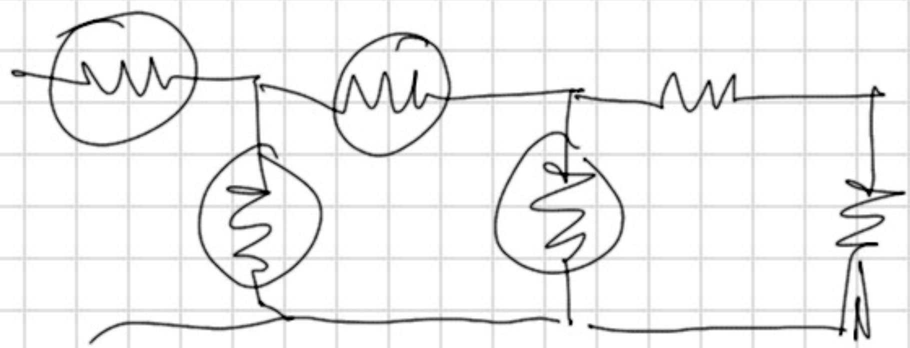
Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico. Einstein

Euclide Libri (capitoli) → Elementi

13 , 467 teoremi .

Proclo → Associa gli Elementi di Euclide alla filosofia Platonica.

Solidi platonici



I Definizioni, postulati, nozioni comuni, le proprietà dei triangoli; alcune costruzioni geometriche (la bisettrice, il punto medio, la perpendicolarità)

II Contiene l'algebra geometrica, ovvero problemi risolvibili con equazioni di I e II grado

III Cerchio

IV Poligoni regolari, inscrittibilità e circoscrittibilità in una circonferenza

V - VI Teoria delle proporzioni e della similitudine

VII - VIII - IX, libri aritmetici, dedicati alle proprietà dei numeri naturali (IX,20 infinità dei numeri primi)

X 115 proposizioni sulla incommensurabilità. (X, 1 afferma l'esistenza delle grandezze piccole a piacere)

XI Geometria solida elementare

XII Misure di superfici e volumi. Metodo di esaustione.

XIII Parla dei poliedri. Sezione aurea del segmento.

Libro I

Definizioni preliminari, postulati, assiomi o nozioni comuni, 48 teoremi

Definizioni preliminari

Si inizia poi con le seguenti quattro definizioni.

1. Il punto è ciò che non ha parti
2. Una linea è una lunghezza senza larghezza
3. Estremi di una linea sono punti
4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

Definizione ≠ Concetto attuale di Definizione

Postulati

P_1 Che si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi

P_2 Che si possa prolungare indefinitamente una linea retta

P_3 Che si possa descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi

P_4 Che gli angoli retti siano uguali

P_5 Che se una retta t, intersecando altre due rette r, s forma, dalla stessa parte, angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

Assiomi

Gli assiomi

1. Cose uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro
2. Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, le totalità sono uguali
3. Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali
4. Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;
5. Il tutto è maggiore della parte

Postulato = Assioma (GrGM)

postulo ἀξιόω

1. Proposizioni costruttive:

I,1: *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.*

I,2: *Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.*

I,3: *Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

I,23: *Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo dato.*

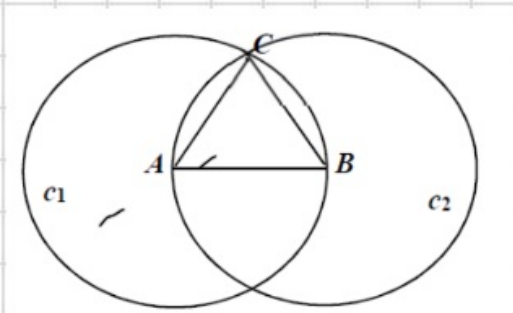
(I, 4-8-26) Criteri di congruenza dei triangoli
(I, 7-24-25) le loro dimostrazione.
(I, 11-12) Relazioni fra gli angoli formati da due rette incidenti
(I, 27-31) Parallelismo

Proposizione (I,1)

È possibile, dato un segmento AB, costruire un triangolo equilatero, di lato uguale ad AB.

dim.

Tracciamo una circonferenza C_1 di centro A e apertura AB e la circonferenza C_2 di centro B e apertura BA.
Sia C il punto di incontro delle 2 circonferenze



Il triangolo ABC è equilatero

$AC = AB$ perché raggi di C_1

$CB = AB$ raggi di C_2.

Dimostrazione semplice, elegante!!

Proposizione: La dimostrazione della prop. (I,1) di Euclide è sbagliata. Inoltre, nel sistema di assiomi di Euclide non possono esistere dimostrazioni corrette della (I,1)

dim. L'errore consiste nell'aver supposto che le due circonferenze si incontrano nel punto C. (Per poterlo affermare è necessario il postulato di continuità).

Consideriamo un modello geometrico in cui i punti sono elementi del prodotto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, cioè le coppie di numeri razionali. Una retta è l'insieme dei punti che soddisfano una eq. di primo grado a coeff. razionali. Questo modello lo chiamiamo PIANO RAZIONALE.

Nel piano razionale tutti i postulati di Euclide sono verificati e dunque anche i teoremi. Se allora si potesse dimostrare la (I,1) tale prop. dovrebbe essere verificata anche nel piano razionale. Ma ciò non è vero. Infatti, se metto i punti

$A(-1,0)$ $B(1,0)$ e suppongo che esiste C

tale che ABC sia equilatero. Allora tale punto dovrebbe essere del tipo $(0,q)$ e per il teorema di Pitagora $q^2 = 3$.

Ma un razionale il cui quadrato sia 3 non esiste.

I Criterio di congruenza LAL

Va preso come postulato. Euclide ne dà una dimostrazione effettuata tramite il trasporto (I, 4)
Hilbert ha ritenuto non valida questa dimostrazione.

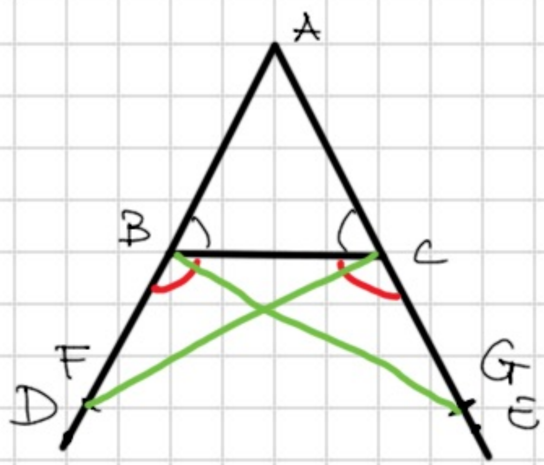
II Criterio di congruenza ALA

Facile la dimostrazione se si ricorre al V postulato.
Nella versione originale la dimostrazione non fa riferimento al quinto postulato

III Criterio di congruenza LLL

Proposizione (I,5) Teorema del pons asinorum

Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono uguali fra loro e prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto alla base sono uguali tra loro



ABC è isoscele

$AB = AC$

th: $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

$C\hat{B}D = B\hat{C}E$

Sia F un punto su AD, si sottragga dalla retta maggiore AE una retta $AG = AF$.

Congiungo F con C e G con B.

$AF = AG$, $AB = AC \Rightarrow$ i due lati FA e AC
sono uguali rispettivamente AGA e AB
ed hanno l'angolo FAG in comune.

La base FC è uguale a GB $\Rightarrow$ il triangolo $AFC = AGB$
e i restanti angoli sono uguali rispettivamente
ai restanti angoli cioè quelli opposti ai lati uguali
Quindi

$$A\hat{C}F = A\hat{B}G$$ e

e $$A\hat{F}C = A\hat{G}B$$

Perché $\overline{AF} = \overline{AG}$, in questi $AB = AC$, il restante
$BF = CG$.
Per $\overline{FC} = \overline{GB} \Rightarrow$ i due lati $\overline{BF} = \overline{CG}$, $\overline{FC} = \overline{GB}$

e $B\hat{F}C = C\hat{G}B$ mentre BC è comune tra loro.

Il triangolo $BFC = CGB$, l'angolo $F\hat{B}C = G\hat{C}B$
e $B\hat{C}F = C\hat{B}G$

L'angolo $A\hat{B}G = ACF \Rightarrow$

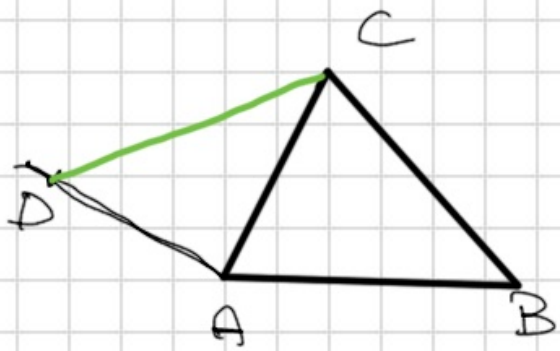
$\Rightarrow C\hat{B}G = B\hat{C}F$.

Il restante $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

Sono uguali dunque gli angoli alla base e i restanti angoli sotto la base

Teorema I,48

Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l'angolo contenuto fra essi è retto.



L'ipotesi è che

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

La tesi $B\hat{A}C$ è retto

Si tracci la perp. ad AC dal punto A. Si prenda un punto D t.c. $AD = AB$.
Si congiunge D con C

$\overset{\triangle}{ADC}$ è rettangolo $\Rightarrow AD^2 + AC^2 = DC^2$

Poiché $AD = AB$ $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AD^2 + AC^2 = BC^2$

$$\begin{aligned} AD^2 + AC^2 &= BC^2 \\ AD^2 + AC^2 &= DC^2 \end{aligned} \Rightarrow BC^2 = DC^2 \Rightarrow BC = DC$$

I due triangoli sono congruenti e in particolare l'angolo $C\hat{A}B$ è retto.