NUMERI COMPLESSI

Eseguendo le operazioni indicate a primo membro, verificare le seguenti uguaglianze:

$(1+j)(4+j)=3+5j$, $(1-2j)(3+j)=5-5j$, $(1+3j)(-2+j)=-5-5j$, $(1+4j)(1-j)=5+3j$

$(1+j)(4+3j)=1+7j$, $(1+2j)(3-2j)=7+4j$, $(1+3j)(-2+3j)=-11-3j$, $(1-4j)(1+2j)=9-2j$,

$(2+j)(4+j)=7+6j$, $(2-3j)(3+j)=9-7j$, $(2+3j)(-2+j)=-7-4j$, $(2+3j)(1-j)=5+j$,

$\left(\frac{1}{3}-j\right)(3+j)=2-\frac{8}{3}j$, $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}j\right)\left(\frac{1}{2}+3j\right)=-\frac{11}{6}-\frac{7}{4}j$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}j\right)\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}j\right)=\frac{11}{30}+\frac{17}{120}j$,

$(1+j\sqrt{3})(\sqrt{2}-j)=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-1)j$, $(\sqrt[3]{2}+j\sqrt{3})(\sqrt{2}-j\sqrt{3})=(\sqrt[6]{32}+3)-(\sqrt[6]{108}-\sqrt{6})j$,

$(3+2j)(3-2j)=3^2-(2j)^2=13$, $(\sqrt{3}+j\sqrt{2})(\sqrt{3}-j\sqrt{2})=3+2=5$, $(1+j)(1-j)=1+1=2$

$(1+2j)(4+2j)=10j$, $(2+4j)(6+3j)=30j$, $(2-4j)(2-j)=-10j$, $(\sqrt{2}+2j)(3\sqrt{2}+3j)=9\sqrt{2}\,j$

$(\overline{1-j})(4+j)=3+5j$, $(1-2j)(\overline{3-j})=5-5j$, $(\overline{1+3j})(\overline{-2+j})=-5+5j$, $(1-4j)(\overline{1-j})=5-3j$,

$\mathrm{Re}(1-j)\,\mathrm{Re}(3+7j)=1\cdot 3=3$, $\mathrm{Re}(1-j)\,\mathrm{Im}(3+7j)=1\cdot 7=7$, $\mathrm{Im}(1-j)\,\mathrm{Im}(3+7j)=(-1)\cdot 7=-7$,

$\mathrm{Re}(2+3j)+\mathrm{Im}(5+7j)=2+7=9$, $\mathrm{Re}(2+3j)+j\,\mathrm{Im}(2+3j)=2+3j$, $\mathrm{Re}(2j)=0$, $\mathrm{Im}(3)=0$,

$|2+3j|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, $|2-3j|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, $|-2+3j|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, $|-2-3j|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$(2+3j)^2=4+(3j)^2+2\cdot 6j=-5+12j$, $(2-j)^2=4+j^2-4j=3-4j$, $(1+j)^2=2j$, $(1-j)^2=-2j$

$(2+3j)^3=2^3+3\cdot 2^2(3j)+3\cdot 2(3j)^2+(3j)^3=-46+9j$, $(2-3j)^3=-46-9j$

$\mathrm{Re}(2+3j)^3=-46$, $\mathrm{Im}(2+3j)^3=9$, $|\mathrm{Re}(2+3j)^3|=46$

$[\mathrm{Re}(2+3j)]^3=8$, $[\mathrm{Im}(2+3j)]^3=27$, $|(2+3j)^2|=13$, $|2+3j|^2=13$

$$\frac{(1+j)(4+j)}{(1+2j)(3-2j)}=\frac{3+5j}{7+4j}=\frac{(3+5j)(7-4j)}{(7+4j)(7-4j)}=\frac{41+23j}{65}=\frac{41}{65}+\frac{23}{65}j$$

$$\frac{(1+3j)(-2+j)}{(1+4j)(1-j)}=\frac{-5-5j}{5+3j}=-\frac{40}{34}-\frac{5}{17}j\ ,\quad \frac{(1+4j)(1-j)}{(1-4j)(1+2j)}=\frac{5+3j}{9-2j}=\frac{39}{85}+\frac{37}{85}j$$

$$\frac{(2+j)(4+j)}{(1+j)^2}=\frac{7+6j}{2j}=3-\frac{7}{2}j\ ,\quad \frac{1}{2+3j}=\frac{2-3j}{4+9}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}j\ ,\quad \frac{1}{1+j}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$$

$$\frac{(2+j\sqrt{3})(\sqrt{3}+j)}{j\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+5j}{j\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}j\ ,\quad \frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{3})^2}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}+2j\sqrt{3}\ ,\quad \frac{1}{j}=-j\ ,$$

$$j^{737}=j\left[\begin{array}{r|l}737 & 4\\ 1 & 184\end{array}\right],\ j^{738}=j^2=-1\left[\begin{array}{r|l}738 & 4\\ 2 & 184\end{array}\right],\ j^{739}=j^3=-j\left[\begin{array}{r|l}739 & 4\\ 3 & 184\end{array}\right],\ j^{740}=j^4=1$$

$$j^{-n}=\left(\frac{1}{j}\right)^n=(-j)^n\ ,\quad j^{-737}=(-j)^{737}=-j^{737}=-j\ ,\quad j^{-738}=(-j)^{738}=j^{738}=-1\ ,\quad j^{-740}=1$$

Verificare che l'espressione:

$$\frac{2z_1+3z_2+(z_3+z_4)^2}{z_1z_3-z_4}$$

per $z_1=-2-j$, $z_2=1+j$, $z_3=1+2j$, $z_4=1-2j$ assume il valore $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}j$.

Verificare poi che, a norma del teor. (14.3) di pag. 60, sostituendo nell'espressione i coniugati dei precedenti numeri, si ottiene $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}j$ (coniugato del risultato precedente).

Effettuare la verifica del citato teorema anche con altri valori di z_1, z_2, z_3, z_4 scelti ad arbitrio.

Scrivendo in forma trigonometrica i numeri complessi al primo membro, verificare le seguenti uguaglianze, constatando poi che il passaggio dal secondo membro al primo membro è "automatico" (1).

$1+j=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ (ossia $=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+j\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$), $1-j=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$, $-1+j=\left[\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi\right]$, $-1-j=\left[\sqrt{2},-\frac{3}{4}\pi\right]$,

$3+3j=\left[3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$, $5+5j=\left[5\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}j=\left[\frac{2}{3}\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$, $\sqrt{2}+j\sqrt{2}=\left[2,\frac{\pi}{4}\right]$

$3-3j=\left[3\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$, $-3+3j=\left[3\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi\right]$, $-3-3j=\left[3\sqrt{2},-\frac{3}{4}\pi\right]$,

$\sqrt{3}+j=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$, $\sqrt{3}-j=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]$, $-\sqrt{3}+j=\left[2,\frac{5}{6}\pi\right]$, $-\sqrt{3}-j=\left[2,-\frac{5}{6}\pi\right]$

$5\sqrt{3}+5j=\left[10,\frac{\pi}{6}\right]$, $5\sqrt{3}-5j=\left[10,-\frac{\pi}{6}\right]$, $-5\sqrt{3}+5j=\left[10,\frac{5}{6}\pi\right]$, $-5\sqrt{3}-5j=\left[10,-\frac{5}{6}\pi\right]$

$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}j=\left[\frac{2}{3},\frac{\pi}{6}\right]$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}j=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{6}\right]$, $3\sqrt{3}+3j=\left[6,\frac{\pi}{6}\right]$, $3+j\sqrt{3}=\left[2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right]$,

(1) A proposito delle uguaglianze del primo rigo, cfr. teor. (14.2) pag. 60, constatando anche che due numeri coniugati hanno argomenti opposti. A proposito delle uguaglianze del secondo rigo, cfr. teor. (16.1) pag. 64.

$1+j\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$, $1-j\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$, $-1+j\sqrt{3}=\left[2,\frac{2}{3}\pi\right]$, $-1-j\sqrt{3}=\left[2,-\frac{2}{3}\pi\right]$

$\sqrt{2}+j\sqrt{6}=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{3}\right]$, $\sqrt{3}+3j=\left[2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}-j=\left[\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{\pi}{3}\right]$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}-j=\left[\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{3}\pi\right]$,

$5=[5,0]$, $-5=[5,\pi]$, $\sqrt{3}=[\sqrt{3},0]$, $-\sqrt{3}=[\sqrt{3},\pi]$, $1=[1,0]$, $-1=[1,\pi]$.

Calcolando con la formula di Moivre le potenze a primo membro, verificare le seguenti uguaglianze:

$$(1+j)^{32}=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]^{32}=\left[2^{16},8\pi\right]=2^{16}(\cos 8\pi+j\,\mathrm{sen}\,8\pi)=2^{16}$$

$$(1+j)^{65}=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]^{65}=\left[2^{32}\sqrt{2},\frac{65}{4}\pi\right]=\left[2^{32}\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=2^{32}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)=2^{32}(1+j)$$

$$(\sqrt{3}+j)^{157}=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]^{157}=\left[2^{157},\frac{157}{6}\pi\right]=\left[2^{157},\frac{\pi}{6}\right]=2^{157}\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)=2^{156}(\sqrt{3}+j)$$

$$(\sqrt{3}-j)^{206}=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]^{206}=\left[2^{206},-\frac{206}{6}\pi\right]=\left[2^{206},-\frac{\pi}{3}\right]=2^{206}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+j\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^{205}(1-j\sqrt{3})$$

$$(1+j\sqrt{3})^{47}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]^{47}=\left[2^{47},\frac{47}{3}\pi\right]=\left[2^{47},\pi+\frac{2}{3}\pi\right]=2^{47}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+j\,\mathrm{sen}\frac{5}{3}\pi\right)=2^{46}(1-j\sqrt{3})$$

$$(\sqrt{3}+j)^{215}=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]^{215}=\left[2^{215},\frac{215}{6}\pi\right]=\left[2^{215},\pi+\frac{5}{6}\pi\right]=2^{215}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+j\,\mathrm{sen}\frac{11}{6}\pi\right)=2^{214}(\sqrt{3}-j)$$

$$(\sqrt{3}+j)^{-215}=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]^{-215}=\left[2^{-215},-\frac{215}{6}\pi\right]=2^{-215}\left(\cos\left(-\frac{11}{6}\pi\right)+j\,\mathrm{sen}\left(-\frac{11}{6}\pi\right)\right)=2^{-216}(\sqrt{3}+j)$$

$$(1+j\sqrt{3})^{-47}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]^{-47}=\left[2^{-47},-\frac{47}{3}\pi\right]=2^{-47}\left(\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right)+j\,\mathrm{sen}\left(-\frac{5}{3}\pi\right)\right)=2^{-48}(1+j\sqrt{3})$$

$$(-\sqrt{3}-j)^{215}=-(\sqrt{3}+j)^{215}=-2^{214}(\sqrt{3}-j)\,,\quad (-1-j)^{32}=(1+j)^{32}=2^{16}$$

$$(-1-j\sqrt{3})^{-47}=-(1+j\sqrt{3})^{-47}=-2^{-48}(1+j\sqrt{3}),\quad (-1-j)^{-32}=(1+j)^{-32}=2^{-16}$$

$$(\sqrt{3}+j)^{16}(\sqrt{3}-j)^{16}=\left[(\sqrt{3}+j)(\sqrt{3}-j)\right]^{16}=\left[(\sqrt{3})^2-j^2\right]^{16}=4^{16}=2^{32}.$$

N.B. Negli ultimi tre righi abbiamo utilizzato la proprietà delle potenze $(z_1 z_2)^m=z_1^m\cdot z_2^m$ (con $z_1=-1$). Ritrovare i risultati applicando direttamente la formula di Moivre; si noti l'economia di calcoli realizzata per l'ultimo esercizio.

A proposito del calcolo delle potenze dei numeri complessi, osserviamo infine che non sempre è utile applicare la formula di Moivre. Ad es., siccome non è noto l'argomento del numero complesso $2-3j$ [che è un numero θ tale che $\cos\theta=2/\sqrt{13}$, $\mathrm{sen}\,\theta=-3/\sqrt{13}$], per calcolare $(2-3j)^m$ con $m\in N$ occorre utilizzare la formula di Tartaglia-Newton. In particolare per $m=4$ si ha:

$$(2-3j)^4=2^4-\binom{4}{1}2^3\cdot 3j+\binom{4}{2}2^2(3j)^2-\binom{4}{3}2\cdot(3j)^3+(3j)^4=-119+120j\,.$$

Verificare che nelle uguaglianze seguenti le radici a primo membro, intese nel campo complesso (1), rappresentano gli insiemi di numeri complessi a secondo membro:

$\sqrt[4]{16} = \{2, 2j, -2, -2j\}$ [dall'espressione $16^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + j \operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{4})$ per $k=0,1,2,3$],

$\sqrt[4]{3} = \{\sqrt[4]{3}, j\sqrt[4]{3}, -\sqrt[4]{3}, -j\sqrt[4]{3}\}$, $\sqrt{9} = \{3, -3\}$, $\sqrt{3} = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, $\sqrt[4]{9} = \{\sqrt{3}, j\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -j\sqrt{3}\}$

$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $\sqrt[3]{5} = \{\sqrt[3]{5}, -\frac{\sqrt[3]{5}}{2}+j\frac{\sqrt[3]{5}\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{5}}{2}-j\frac{\sqrt[3]{5}\sqrt{3}}{2}\}$

$\sqrt[3]{-1} = \{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $\sqrt[3]{-8} = \{1+j\sqrt{3}; -2, 1-j\sqrt{3}\}$

---

(1) Ricordiamo che ad es. il simbolo $\sqrt{4}$ rappresenta la radice quadrata <u>aritmetica</u> di 4, ossia 2 [cfr. pag. 32]; il simbolo $\sqrt[3]{-8}$ rappresenta l'unica radice cubica reale di -8, ossia -2. Analogamente dicasi per i simboli $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{-5}$, ecc. E' in questo senso che tali simboli si adoperano, come abbiamo fatto finora, salvo esplicito avviso contrario [Invece ad es. $\sqrt[4]{-5}$ ha senso solo nel campo complesso].

Quando gli stessi simboli si vogliono intendere nel campo complesso, ciò deve essere precisato esplicitamente: essi denotano allora <u>degli insiemi</u>, costituiti da numeri complessi (si veda la conclusione del n. 17 a pag. 70). Ad esempio nel secondo dei precedenti esercizi il simbolo $\sqrt[4]{3}$ a primo membro rappresenta un insieme di numeri complessi (perché inteso nel campo complesso): appunto l'insieme scritto a secondo membro. Tra gli elementi di questo insieme figura lo stesso simbolo $\sqrt[4]{3}$, che non va inteso nel campo complesso, e rappresenta un numero reale (come ricordato all'inizio di questa nota): gli elementi dell'insieme in questione sono i numeri complessi $\sqrt[4]{3}+0j$, $0+j\sqrt[4]{3}$, $-\sqrt[4]{3}+0j$, $0-j\sqrt[4]{3}$, dove $\sqrt[4]{3}$ rappresenta la parte reale, o il coefficiente della parte immaginaria, o l'opposto di tali numeri.

Ciascun elemento dell'insieme è una <u>determinazione</u> della radice quarta di 3 nel campo complesso.

Verificare le seguenti uguaglianze, determinando le radici dei numeri complessi a primo membro:

$$\sqrt{1+j\sqrt{3}} = \sqrt{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\sqrt{2}, \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right] \text{ con } k=0,1 = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\sqrt{1-j\sqrt{3}} = \sqrt{\left[2, -\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\sqrt{2}, \frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right] \text{ con } k=0,1 = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\sqrt[4]{1+j\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right] \text{ con } k=0,1,2,3.$$

$$\sqrt[4]{2+2j\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\left[4, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\sqrt{2}, \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right] \text{ con } k=0,1,2,3.$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{\left[1, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[1, \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right] \text{ con } k=0,1,2,3.$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{3}+j} = \sqrt[5]{\left[2, \frac{\pi}{6}\right]} = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right] \text{ con } k=0,1,2,3,4.$$

$$\sqrt[8]{\sqrt{3}-j} = \sqrt[8]{\left[2, -\frac{\pi}{6}\right]} = \left[\sqrt[8]{2}, \frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{8}\right] \text{ con } k=0,1,\dots,7.$$

$$\sqrt[8]{-\sqrt{6}-j\sqrt{2}} = \sqrt[8]{\left[2\sqrt{2}, -\frac{5}{6}\pi\right]} = \left[\sqrt[16]{8}, \frac{-\frac{5}{6}\pi+2k\pi}{8}\right] \text{ con } k=0,1,\dots,7.$$

$$\sqrt[15]{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}j} = \sqrt[15]{\left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{6}\right]} = \left[\sqrt[15]{\frac{2}{3}}, \frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{15}\right] \text{ con } k=0,1,\dots,14.$$

$$\sqrt[7]{1+j} = \sqrt[7]{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt[14]{2}, \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}\right] \text{ con } k=0,1,\dots,6.$$

$$\sqrt{j} = \sqrt{\left[1, \frac{\pi}{2}\right]} = \left[1, \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right] \text{ con } k=0,1 = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\sqrt[3]{j} = \sqrt[3]{\left[1, \frac{\pi}{2}\right]} = \left[1, \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] \text{ con } k=0,1,2 = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}j, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}j, -j \right\}$$

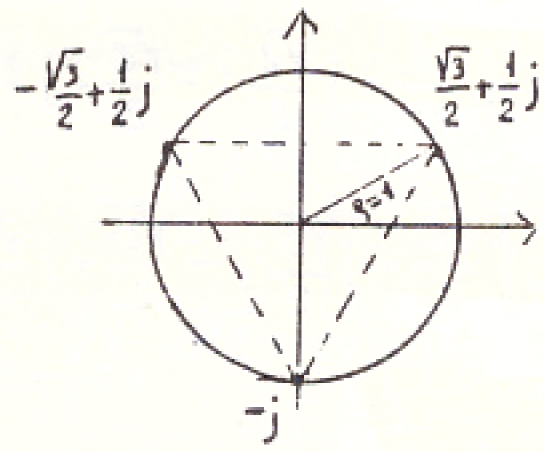
$$\sqrt{-j} = \sqrt{\left[1, \frac{3}{2}\pi\right]} = \left[1, \frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2}\right] \text{ con } k=0,1 = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

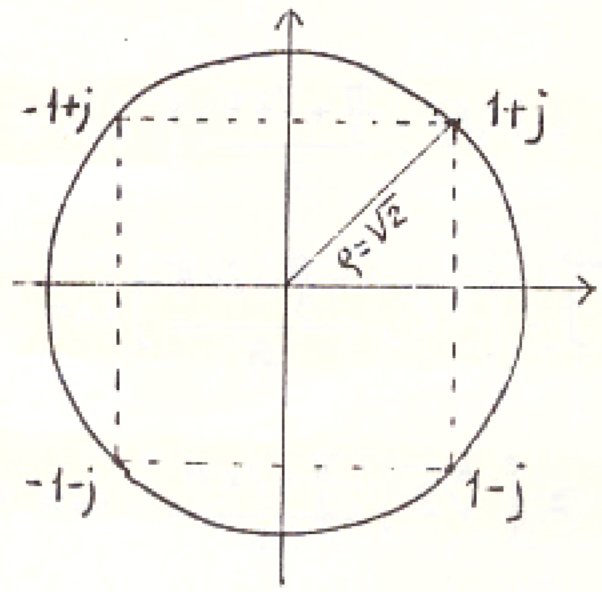
$$\sqrt[8]{j} = \sqrt[8]{\left[1, \frac{\pi}{2}\right]} = \left[1, \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{8}\right] \text{ con } k=0,1,\dots,7.$$

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{[2, \pi]} = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\pi+2k\pi}{4}\right] \text{ con } k=0,1,2,3 = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{[4, \pi]} = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi+2k\pi}{4}\right] \text{ con } k=0,1,2,3 = \pm 1 \pm j.$$

Le figure seguenti mostrano la rappresentazione geometrica rispettivamente delle radici cubiche di j e delle radici quarte di -4.





Verificare che risulta:

$$\frac{3+j+\sqrt[4]{-4}}{2}=\{1,\,2,\,1+j,\,2+j\},$$

tenuto conto che l'espressione considerata rappresenta un insieme di 4 numeri complessi, che si ottengono sostituendo alla radice quarta che vi figura rispettivamente le sue 4 determinazioni. Se alla stessa espressione si aggiunge formalmente $\sqrt{-1}$, che ha 2 determinazioni, si ottiene un'espressione che rappresenta 4×2 numeri complessi; verificare che risulta:

$$\frac{3+j+\sqrt[4]{-4}}{2}+\sqrt{-1}=\{1+j,\,2+j,\,1+2j,\,2+2j,\,1-j,\,2-j,\,1,\,2\}$$

Verificare inoltre l'uguaglianza:

$$\frac{3+j+\sqrt[4]{-4}}{2\sqrt{-2j}}=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j,\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j,\,1+j,\,-1-j,\,j,\,-j,\,\frac{1}{2}+\frac{3}{2}j,\,-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j\right\}.$$

Si osservi che risulta:

$$\frac{1+\sqrt[4]{16}}{j}=-3j$$

mentre, se il radicale si intende nel campo complesso, si ha:

$$\frac{1+\sqrt[4]{16}}{j}=\{-3j,\,j,\,2-j,\,-2-j\}.$$