Lezione del 29-10-2021

Geometrie non euclidee

Una geometria non euclidea è costruita negando o non accettando alcuni postulati di Euclide.
Si parla anche METAGEOMETRIA

Tentativi di dimostrazione il V postulato di Euclide
- Proclo ci riferisce delle dimostrazioni di Posidonio e di Tolomeo, proponendone anche una sua.

- Nasir al-Din al-Tusi mette in relazione il V postulato con la somma degli angoli interni di un triangolo
- Omar Khayyām "Commenti sui difficili postulati del libro di Euclide". Accidentalmente dimostrò alcune proprietà delle figure ~~nelle~~ geometrie non euclidee.

- Girolamo Saccheri, nel 1733, tentò una dimostrazione del V postulato procedendo per assurdo.
  Pubblicò Euclides ab omni naevo vindicatus.

- Gauss, Lagrange, Legendre

Riemann

Nella Geometria riemanniana, il problema delle parallele non si pone, sostituendo il concetto di retta con il concetto metrico di curva geodetica, ossia il percorso di minor distanza fra due punti.
Si possono così costruire geometrie a curvatura costante oppure che varia in ogni punto, in qualunque numero di dimensioni, ognuna corrispondente a una superficie della varietà riemanniana n-dimensionale.
In questa ottica, la geometria euclidea è la geometria naturale del piano.

Sostituisce il V postulato con l'assioma di Riemann

"Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune".

Da ciò deriva che non esistono rette parallele e quindi cadono tutti i teoremi dimostrati facendo uso del V postulato

Affinché l'assioma di Riemann produca una teoria assiomatica coerente, è necessario che non possa essere più dimostrata la prop. 31 di Euclide ("per un punto passa almeno una retta parallela alla data")

- Eugenio Beltrami, a partire dai risultati di Riemann dimostra la consistenza di questa nuova geometria e costruisce un modello in carta di una superficie a curvatura costante negativa, la pseudosfera iperbolica.

Riemann ripropone gli assiomi di Euclide così come classificati da Hilbert.

- Assiomi di appartenenza
- Assiomi di ordinamento
- Assiomi di congruenza
- Assioma di Riemann
- Assioma di continuità (di Dedekind)

I modelli della geometria ellittica sono modelli sintattici della geometria euclidea che hanno come conseguenza la non contraddittorietà della geometria ellittica piana, supposta la non contraddittorietà della geometria euclidea piana

Dato un punto O dello spazio euclideo, chiamiamo stella di centro O l'insieme di tutte le rette e di tutti i piani passanti per O.

piano	insieme delle rette della stella di centro O
punto	retta della stella di centro O
retta	piano della stella di centro O
segmento	angolo euclideo fra le rette che sono i punti estremi del segmento
angolo fra due rette	angolo diedro formato dai piani che rappresentano le due rette

Appartenenza di un punto a una retta	usuale appartenenza tra le rette e i piani euclidei
Congruenza fra segmenti e angoli	come in geom. euclidea tra angoli diedri

---

La circonferenza è definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro.

Si dimostra che una circonferenza può anche essere definita come il luogo dei punti equidistanti da una retta data.

L'area di un triangolo Dato un triangolo sferico costruito su una sfera di raggio R di angoli α, β e γ l'area del triangolo $A = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$

La somma degli angoli interni di un triangolo

Dalla relazione precedente si vede che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di π.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2$$

Criteri di congruenza dei triangoli

Sono uguali due triangoli sferici che abbiano ordinatamente uguali:

1 - Due lati e l'angolo compreso
2 - Due angoli e il lato in comune
3 - I tre lati
4 - I tre angoli

Il teorema di Pitagora

Se ABC è un triangolo sferico retto in A con ipotenusa a e con b e c le lunghezze dei suoi lati. Allora il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{R}\right)$$

Se facciamo lo sviluppo in serie al secondo ordine delle funzioni trigonometriche si ottiene l'espressione del teorema di Pitagora.

La geometria iperbolica

Il V postulato viene rimpiazzato dal cosiddetto postulato iperbolico
Saccheri l'ha studiato e l'ha creduto inconsistente.
Lobacevski e Bolyai e Gauss ne danno una formalizzazione più concreta (chiamandola geometria astrale.

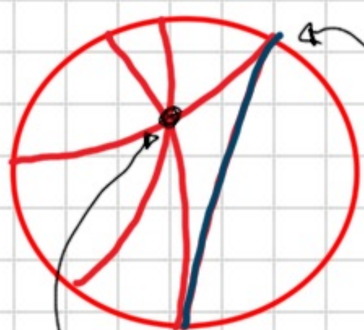
DEF. Due rette nel piano che non si intersecano in nessun punto sono dette parallele

DEF. Data una retta r e un punto disgiunto da r
- esistono almeno due rette distinte passanti per P e parallele ad r.

Da ciò nasce lo spazio iperbolico.

Nessuno aveva modelli per giustificare questa geometria fino con il modello del DISCO di POINCARÉ.

In questo modello, lo spazio iperbolico è formato dai punti interni a un cerchio C.
Le rette sono archi di circonferenze che intersecano il bordo del cerchio perpendicolarmente.



Dati una retta e un punto disgiunti

esistono almeno due rette passanti per il punto che non secano la retta.
(In realtà esse sono infinite)

I 5 assiomi della geometria iperbolica che sono soddisfatti da questo modello.

1) Dati due punti interni a C, esiste effettivamente un unico arco di circonferenza perpendicolare al bordo del cerchio passante per i due punti.

2) Un arco di circonferenza può essere prolungato indefinitamente: il fatto che la distanza tenda a infinito all'avvicinarsi del bordo di C implica che tale bordo non è raggiunto mai e quindi il prolungamento non si interrompe.

3) È possibile disegnare un cerchio con centro e raggio fissati

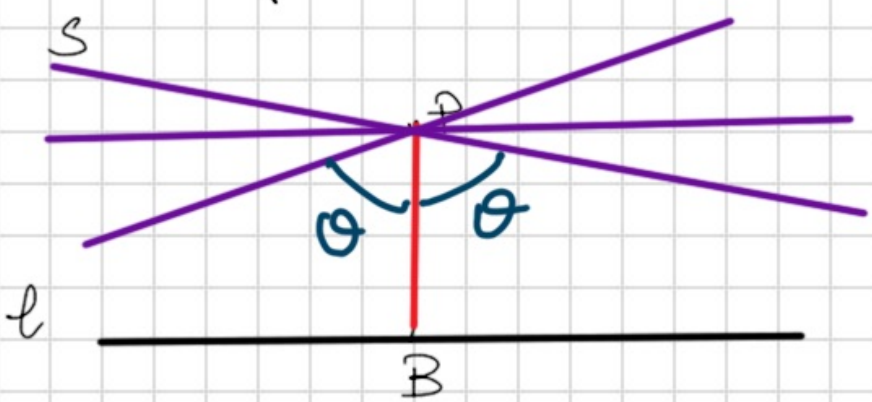
4) Gli angoli retti sono congruenti

5) Dato un punto P e una retta r che non lo contiene, esistono due rette passanti per P e disgiunte da r.

Parallelismo

La nozione di parallelismo nella g. iperb. differisce molto da quella della geom. euclidea

Dal punto di vista iperbolico risulta che esistono infinite rette parallele a una retta data



Sia l una retta, sia P un punto fuori da essa.
Sia B il punto di l più vicino a P. Il segmento PB è $\perp$ a l. Ogni retta S passante per P è identificata dall'angolo θ che essa forma col segmento PB.
θ viene detto angolo di parallelismo tra l e S.

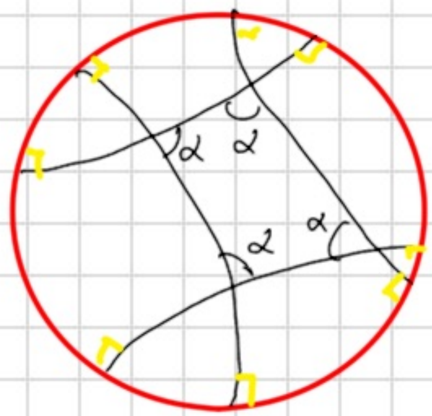
Se ho due rette s_1 e s_2 parallele ad l esse formano angoli θ_1 e θ_2 e ogni retta con un angolo compreso tra θ_1 e θ_2 è parallela a l.

Le rette parallele a l passanti per P sono tutte e sole le rette con angolo di parallelismo appartenente a un intervallo chiuso $[\theta, \pi - \theta]$

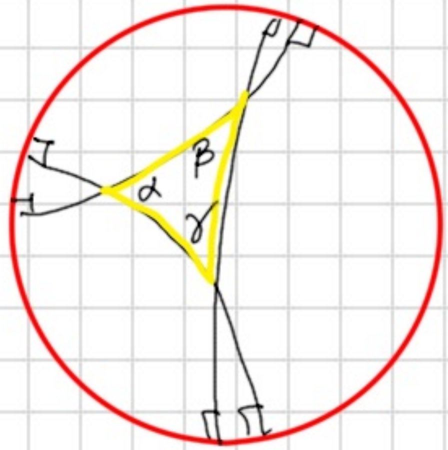
Le rette con angolo θ e $\pi - \theta$ sono dette anche asintoticamente equivalenti a l perché in una direzione queste si avvicinano sempre di più a l senza mai intersecarla.
Due rette che non sono asintoticamente equivalenti vengono dette IPERPARALLELE. Queste si distanziano in entrambe le direzioni in modo esponenziale.

Poligoni

Un quadrato è un poligono con 4 lati di uguale lunghezza e 4 angoli uguali α. α può essere un qualunque angolo dato



Un segmento è una porzione di retta delimitata da due punti ed un poligono è una figura delimitata da una successione di segmenti, tali che due segmenti consecutivi si intersecano agli estremi.



Ad esempio, la somma degli interni di un triangolo (iperbolico) è strettamente minore di π.

Ciò si estende a tutti i poligoni di n lati.

La somma degli angoli interni varia fra 0 e $(n-2)\pi$.

Dall'approccio sintetico all'approccio analitico

Cartesio (Renè Descartes) 1637

Discorso sul metodo del ben ragionare per condurre gli uomini a conoscere la verità.

In una appendice del terzo libro viene dato spazio alla geometria

"Dei problemi che si possono costruire col solo uso di cerchi e di linee rette".

Geometria analitica

Geometria $\longleftrightarrow$ Algebra

Punto $\longrightarrow$ (x, y) coppia di numeri

retta $\longrightarrow$ eq. di I grado

Appartenenza di un punto a una retta $\longrightarrow$ Algebricamente le coordinate del punto soddisfano l'eq. della retta.

Intersezione $\longrightarrow$ Risolvere un sistema

Moltiplicare 2 segmenti d e c significa trovare una costruzione geometrica per cui valga una proporzione del tipo

$$1 : d = c : x$$

Il segmento $x = d \cdot c$