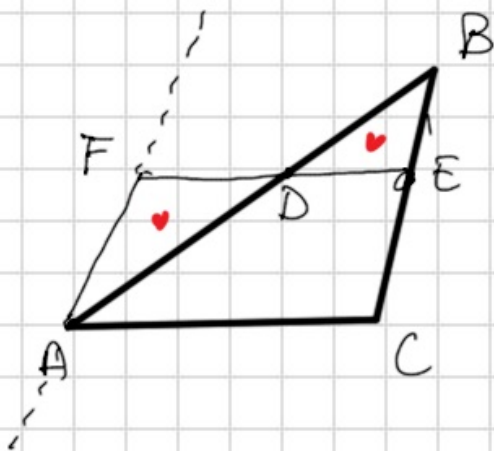
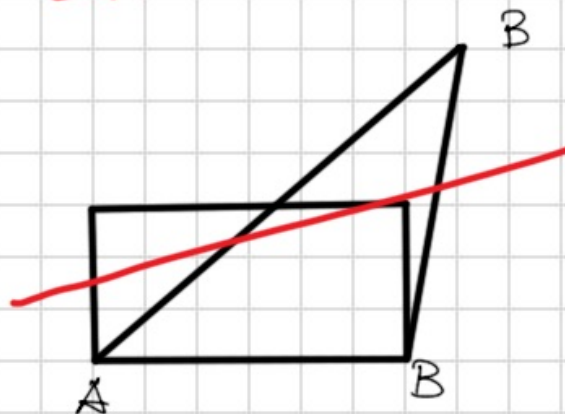
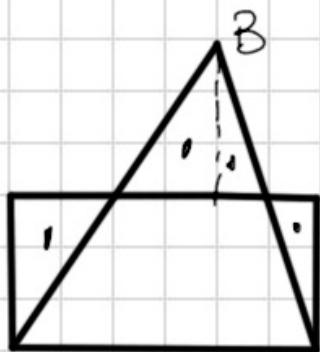


lezione del 25-10-2021

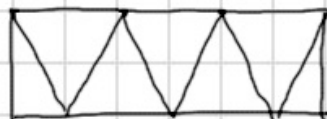
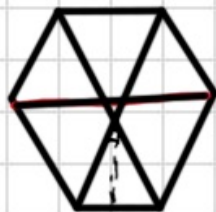


Considero $\triangle ADF$ e $\triangle DEB$. Essi
sono uguali perché "sostituibili".

Created with Doceri



Teorema: Un poligono regolare è equivalente ad un rettangolo che ha come base la metà del perimetro e come altezza l'apoteama



L'area di un poligono regolare è uguale al perimetro per l'apoteama diviso due.

Created with Doceri



Proposizione: L'equicomparabilità è una relazione di equivalenza, cioè verifica le proprietà di riflessiva, simmetrica e transitiva
 (da fare)

TEOREMA: Se Q_1 e Q_2 sono 2 figure piane allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

- 1) Q_1 e Q_2 sono equicomparabili
- 2) $Q_1 \sim Q_2$ sono equicomparabili
- 3) Q_1 e Q_2 hanno la stessa area.

1 \Rightarrow 2

Q_1 e Q_2 sono equicomparabili per ipotesi hanno la stessa area e quindi, poiché due figure piane che sono di eguale misura sono equicomparabili, allora sono equicomparabili.

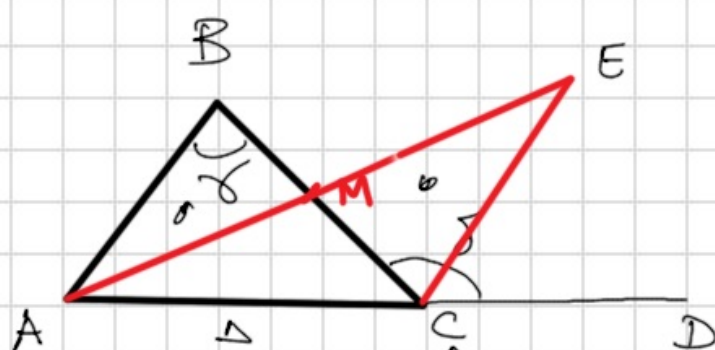
2 \Rightarrow 1

Detto Q_1 e Q_2 equicomparabili, detto Q un quadrato che contiene entrambe, sia $Q = Q_1 \cup Q_2$ e $Q - Q_1 = Q - Q_2$ hanno eguale area $\Rightarrow Q_1 \sim Q_2$ sono equicomparabili.



Teorema

In un triangolo, un angolo esterno è strettamente maggiore del ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.



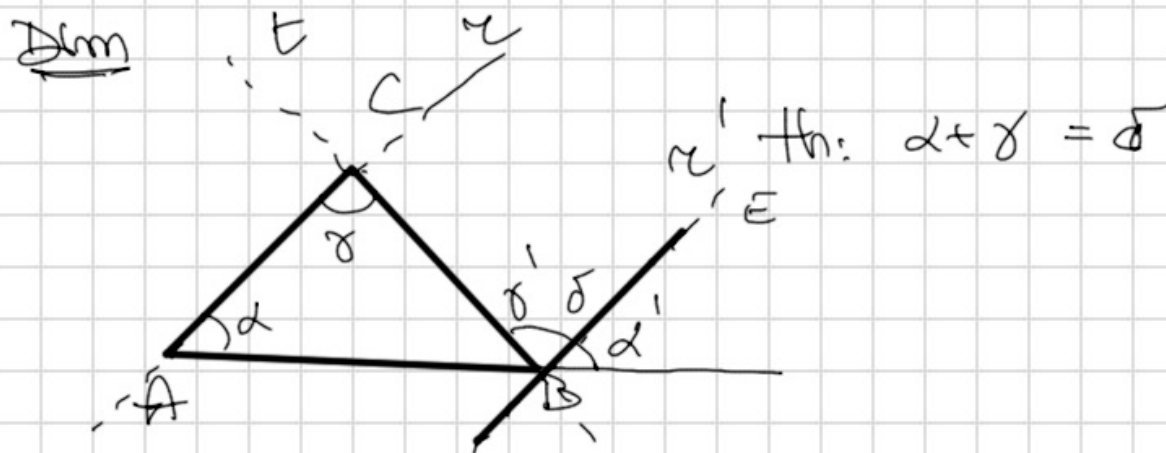
$$\hat{BCD} > \hat{B} \quad \text{(Theor)}$$

Considero $\triangle ABM$ e $\triangle CEM$. Essi sono uguali perché hanno $BM = MC$, $AM = ME$, $\hat{BMA} = \hat{EMC}$ perché opposti al vertice. In particolare amiamo l'angolo \hat{B} (oppure all'angolo \hat{MCE}). Dunque γ deve essere minore di δ perché è uguale a una parte di δ .

Created with Doceri



Teorema: Un angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti.



Considero la retta parallela ad AC e passante per B.
 δ rimane suddiviso in due parti.
 Prolungo ed individuo 2 rette parallele r ed r' tagliate dalla trasversale t .

So che $\gamma = \gamma'$ perché angoli alterni interni
 $\alpha = \alpha'$ perché angoli corrispondenti

$$\alpha + \gamma = \alpha' + \gamma' = \delta \quad \text{per la tesi.}$$

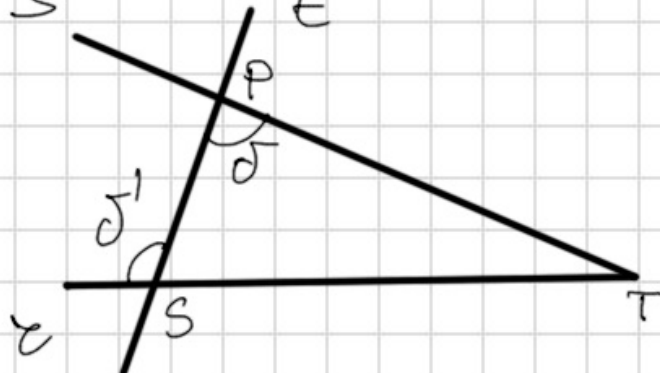
Created with Doceri



Teorema : Data una retta r ed un punto $P \notin r$,
esiste sempre una retta passante per P e
parallela ad r .

dim

Siano r ed s , per assurdo, rette parallele



esse si incontrano in T . Nel triangolo PST
l'angolo δ è minore di δ' caso l'ipotesi che
 $\delta = \delta'$ perché alterni interni.

Created with Doceri



In geometria moderna

Teorema 1 Se due rette r e s tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali, corrispondenti uguali, coniugati supplementari, allora r e s sono parallele.

Teorema inverso 2

Se due rette r e s sono parallele, esse, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali, corrispondenti uguali, coniugati supplementari.

Insieme T_1 e T_2 costituiscono la condizione necessaria e sufficiente per il parallelismo.

←

Created with Doceri



Crisi della Geometria Euclidea

Per tutto il diciassettesimo ed il diciottesimo secolo la geometria rimase, nella guerra contro l'empirismo, una fortezza inespugnabile degli idealisti. Coloro i quali credevano (come in generale si credeva sul continente) che fosse possibile una conoscenza del mondo reale certa ed indipendente dall'esperienza non avevano che da indicare la geometria: soltanto un pazzo avrebbe messo in dubbio la sua validità, e soltanto uno sciocco ne avrebbe negato il riferimento oggettivo. (Bertrand Russell)

Lobacevskij Bolyai 1800
Gauss

Negano la validità del primo postulato.

Created with Doceri



*Secondo la mia più profonda convinzione, la teoria dello spazio ha nei confronti del nostro sapere una posizione completamente diversa da quella della pura teoria delle grandezze (aritmetica); infatti, viene assolutamente a mancare alla nostra conoscenza della prima quella completa convinzione della sua necessità (e quindi anche della sua assoluta verità), che invece inerisce alla seconda; dobbiamo umilmente ammettere che, mentre il numero è puramente un prodotto del nostro spirito, lo spazio possiede una realtà anche al di fuori del nostro spirito, alla quale noi non possiamo prescrivere le sue leggi completamente a priori.
(Lettera di Gauss a Bessel del 9 aprile 1830)*

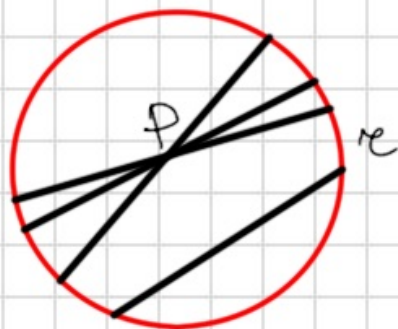
Created with Doceri



Modelli di geometrie non euclidee

Il modello di Klein

- i punti sono interni ad un cerchio S di centro C .
- le rette sono le corde del cerchio (esclusi gli estremi).



Per un punto P fuori di una retta r possono infinite rette parallele ad r .

Verifico che valgono tutti i postulati di Euclide escluso il V .

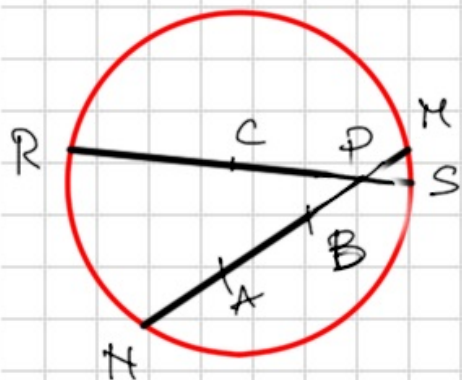
Per esempio: per due punti passa una ed una sola retta.

Created with Doceri



La distanza tra due punti A e B si definisce ponendo

$$d(A, B) = -\log \left(\frac{MB \cdot NA}{MA \cdot NB} \right)$$



Supponiamo che la circonferenza abbia equazione $x^2 + y^2 = 1$

Calcoliamo la distanza di un punto $P(x, 0)$ dal centro C.

$$d(C, P) = -\log \left(\frac{PS \cdot 1}{1 \cdot RP} \right) = -\log \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

Da questa formula stabiliamo che la distanza diventa infinita quando P si avvicina al bordo della circonferenza

Created with Doceri



Partendo dal centro del cerchio, si allontanano a passi regolari che diventano sempre più piccoli senza che ce ne accorgiamo.

Si può osservare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180° .

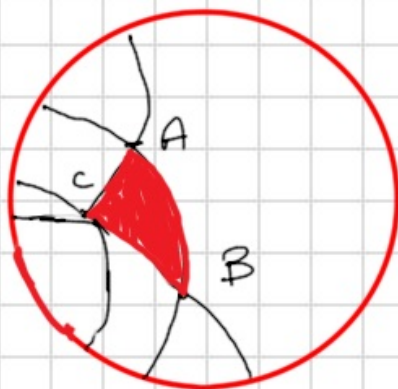
Modello di Poincaré

Consideriamo un insieme di punti interni a una circonferenza S . Consideriamo le zone di retro.

DEF. Chiameremo "rette" tutti i diametri e tutte le circonferenze perpendicolari ad S .

Created with Doceri





La nozione di lunghezza si
definisce in modo analogo al
modello di Klein.
La nozione di uguaglianza di
angoli è quella usuale del piano
euclideo

Nel triangolo ABC, è facile vedere che la somma
degli angoli interni è sempre di un retto

TEOREMA: Esiste un modello che verifica tutti gli
assiomi di Euclide tranne il quinto postulato.
Il quinto postulato non può essere dimostrato
a partire dai precedenti assiomi.

Created with Doceri



dim

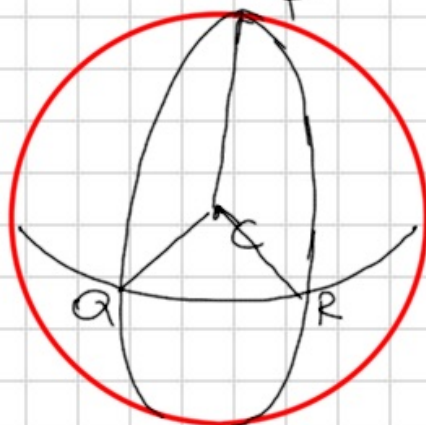
Indichiamo con T la teoria costruita da tutti gli assiomi proposti da Euclide escluso il V postulato. Se tale postulato fosse dimostrabile a partire da T sarebbe vero in tutti i modelli di T . Ma questo non è vero perché esistono almeno due modelli che non verificano tale postulato.

Created with Doceri



ALTRE GEOMETRIE

Riemann, Helmholtz sviluppano geometrie basate
 sulla somma degli angoli interni di un triangolo e
 strettamente maggiore di un angolo piatto.



Non solo è negato il 5° postulato ma anche che una
 retta possa essere prolungata e procreare.
 Ad esempio sulla sfera appare naturale chiamare
 segmento la linea più breve che congiunge due
 punti -

Created with Doceri



Si può dimostrare che tra le linee che uniscono due punti P e Q la più corta è quella che si ottiene intersecando la superficie della sfera con il cerchio di centro C e passante per P e Q .

Tra i due archi per P e Q devo scegliere quello più corto. Allora è opportuno considerare solo una parte della sfera in modo che non vi siano punti diametralmente opposti.

In questo modello non vale il teorema di Proposizione 1 infatti, se esso valere, avremmo, essendo tutti i lati uguali:

$$a^2 = 2a^2 \Rightarrow 1 = 2$$

Created with Doceri

