COMPLEMENTI SULLO STUDIO DI UNA FUNZIONE

Prof. Roberto Capone
A.A. 2020/21
Corso di Studi in Ingegneria Aerospaziale/Meccanica

Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

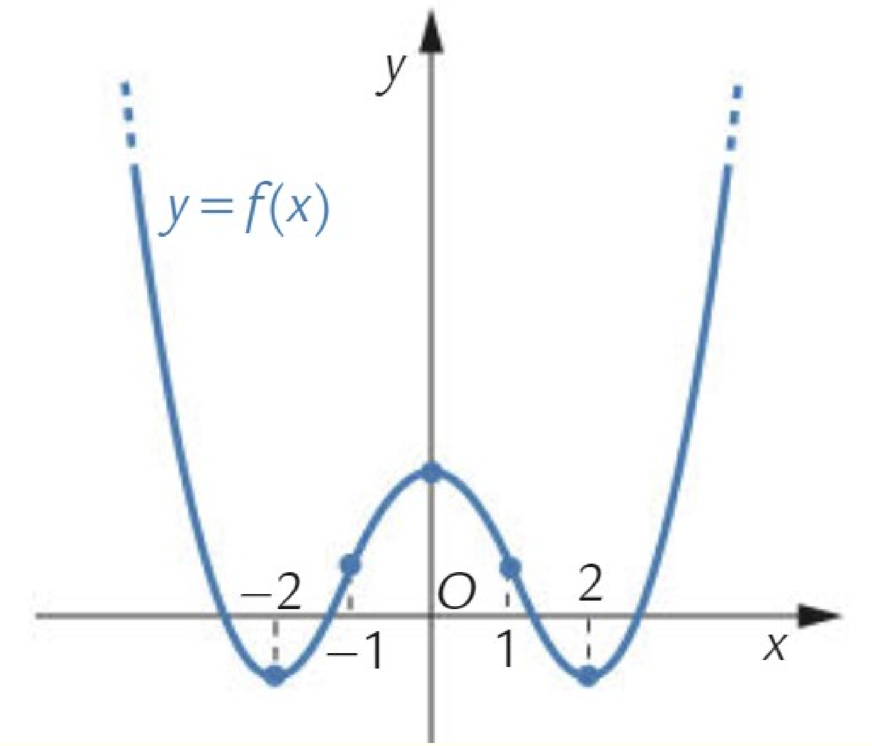
Il primo problema di cui ci occupiamo è quello di dedurre, a partire dal grafico di una funzione, quello della sua derivata. Per tracciare un grafico plausibile della derivata di una funzione $y = f(x)$ è sufficiente basarsi sulle seguenti considerazioni.

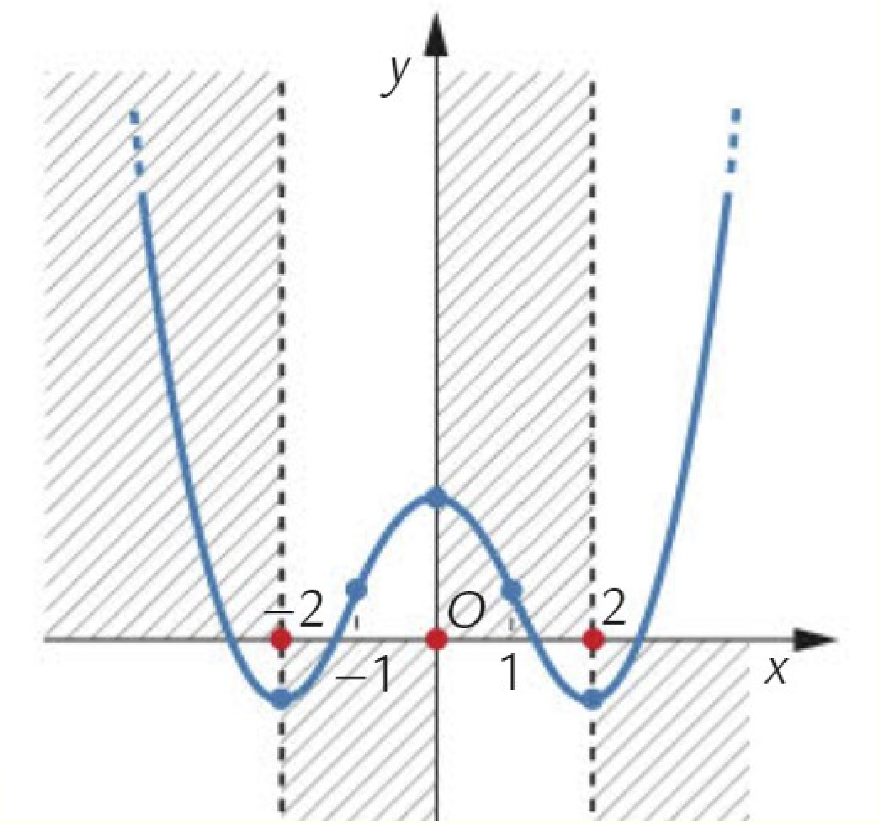
La funzione $y = f'(x)$:

A. ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui la funzione $y = f(x)$ è derivabile;
B. è pari se $y = f(x)$ è dispari, è dispari se $y = f(x)$ è pari (prova a dimostrarlo per esercizio);
A. interseca l'asse x nei punti stazionari di $y = f(x)$ (cioè nei punti di massimo o minimo relativo o di f lesso a tangente orizzontale di f);
B. è positiva (o nulla) negli intervalli in cui $y = f(x)$ è crescente e negativa (o nulla)negli intervalli in cui $y = f(x)$ è decrescente;
C. presenta asintoti verticali negli eventuali punti in cui $y = f(x)$ ha una cuspide o un flesso a tangente verticale;
D. presenta punti di massimo o minimo relativo in corrispondenza dei punti di flesso della funzione $y = f(x)$;
E. è crescente negli intervalli in cui $y = f(x)$ è convessa e decrescente negli intervalli in cui $y = f(x)$ è concava.

Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

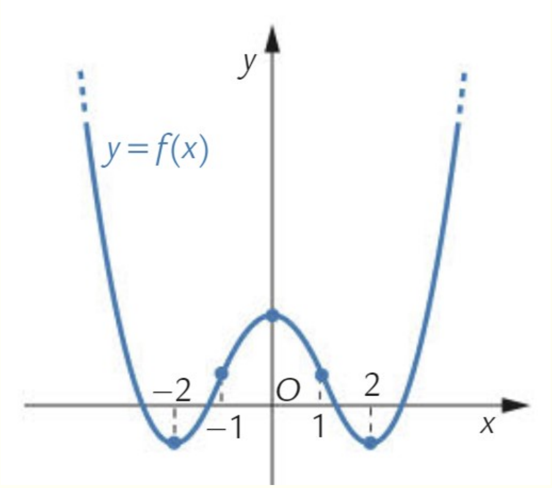
Deduciamo dal grafico della funzione $y = f(x)$, tracciato in Figura, il grafico della funzione $y = f'(x)$.

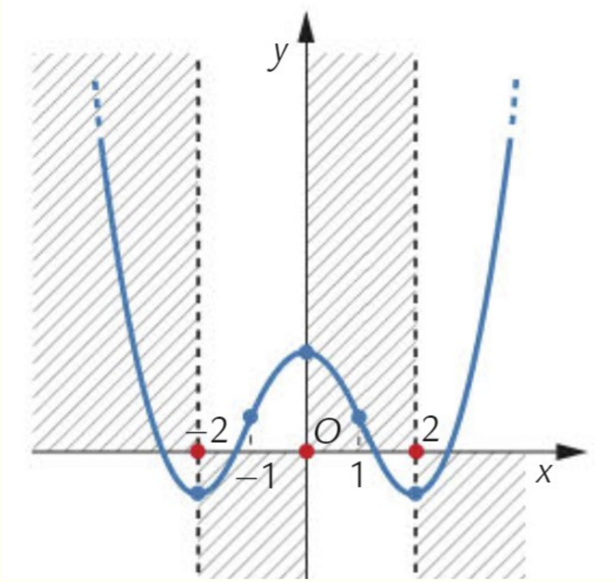


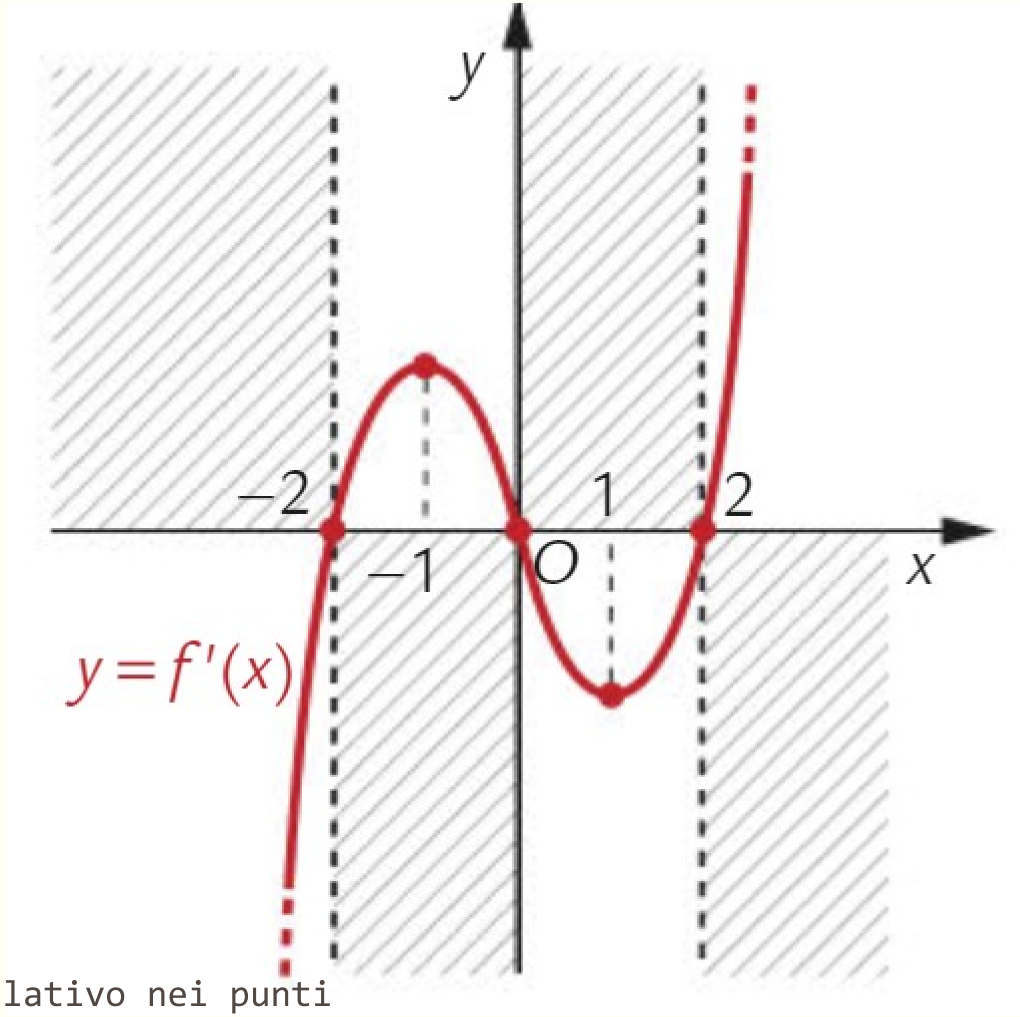


Rappresentiamo le regioni di piano cui appartiene il grafico di $y = f'(x)$ tenendo conto che $f'(x)$ è positiva dove $f(x)$ cresce e negativa dove decresce. Inoltre gli zeri di $y = f'(x)$ (in rosso) sono i punti di estremo relativo di $f(x)$

Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

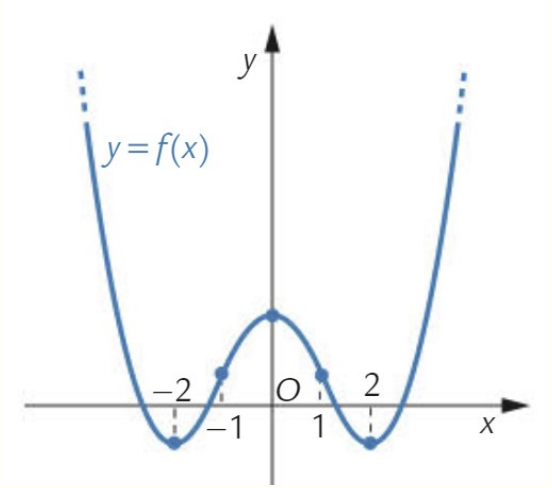


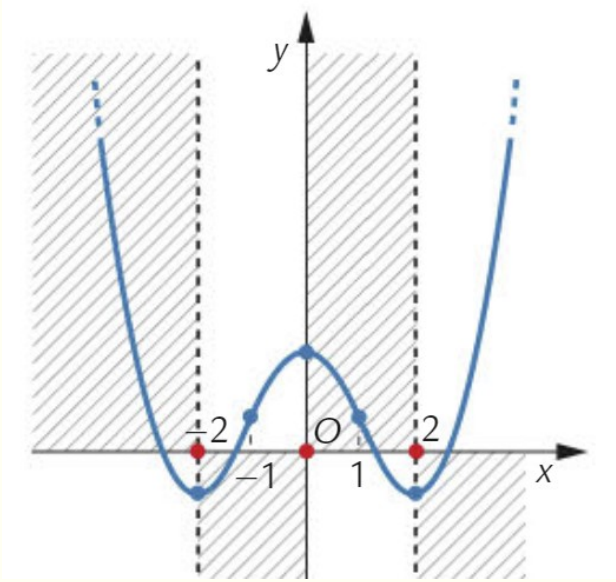


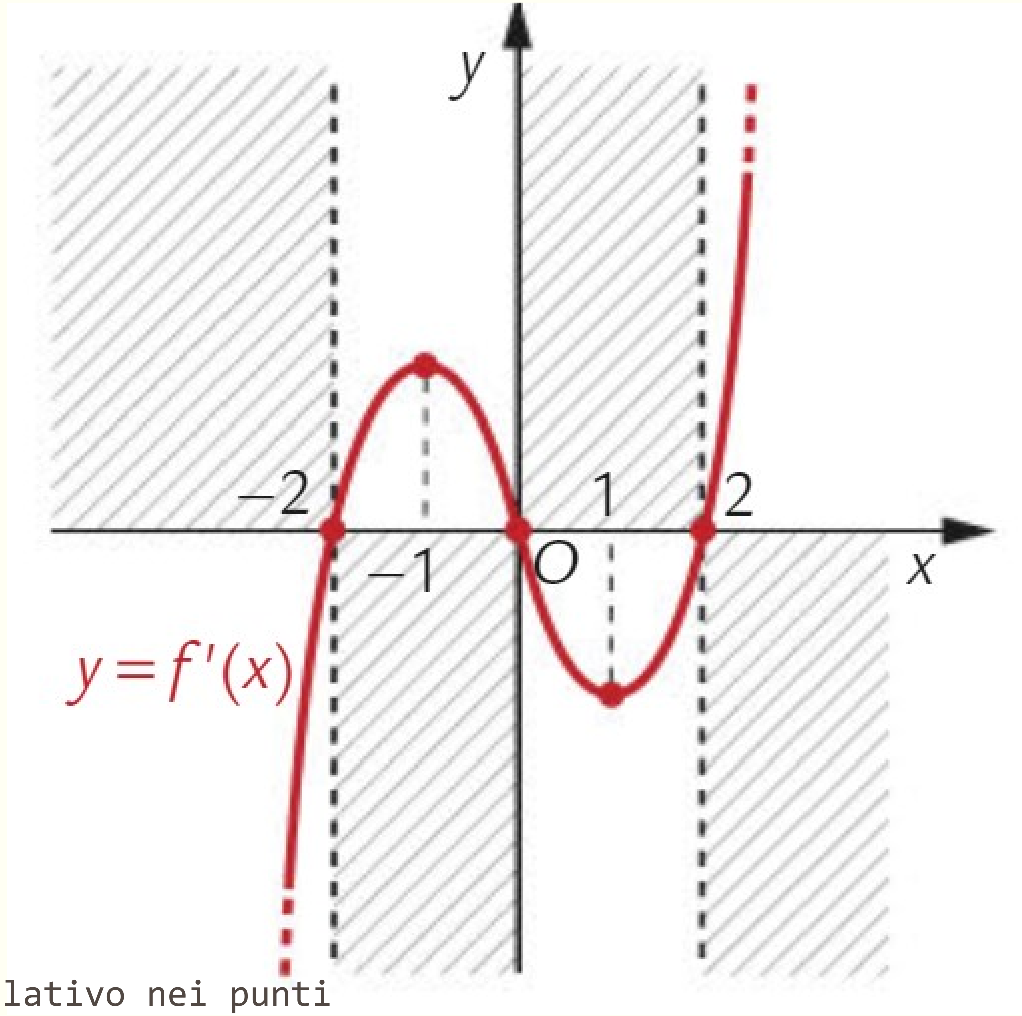


Tenendo conto che il grafico di y = f ’(x) ha punti di estremo relativo nei punti di flesso di f (x), possiamo tracciare il grafico di f ’(x) colorato in rosso.

Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata







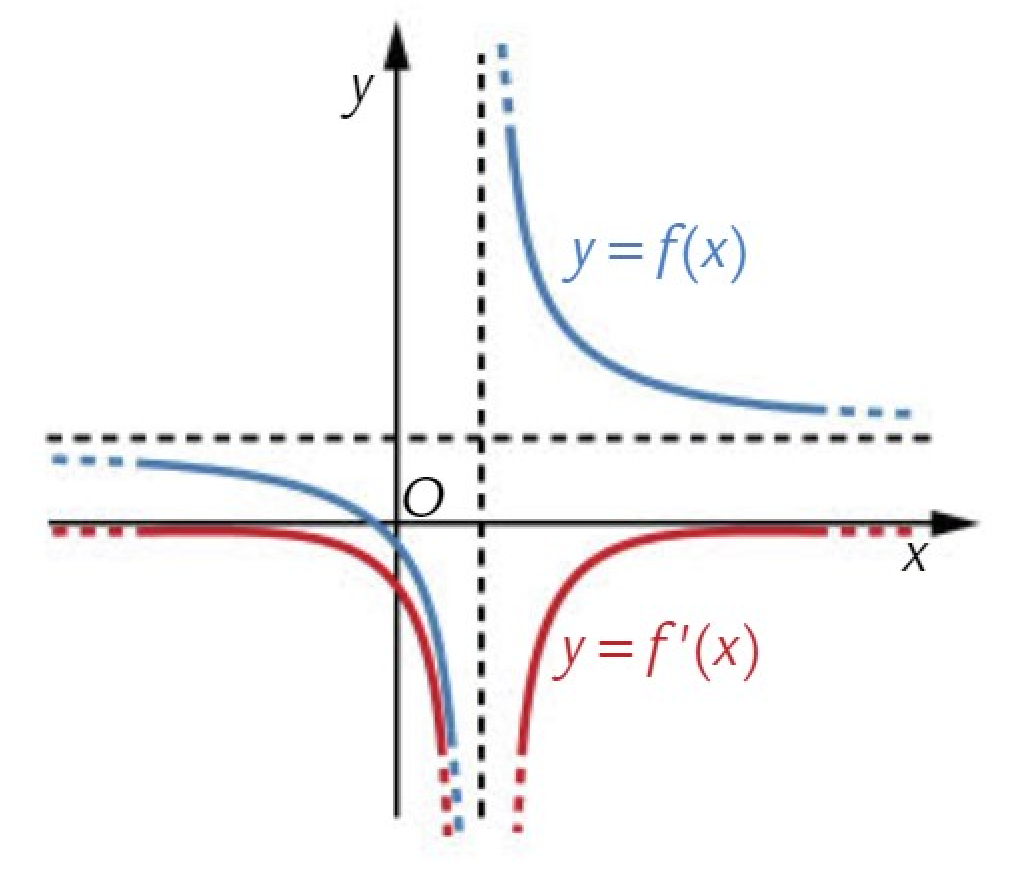
Tenendo conto che il grafico di y = f ’(x) ha punti di estremo relativo nei punti di flesso di f (x), possiamo tracciare il grafico di f ’(x) colorato in rosso.

Asintoti e limiti della derivata prima

È possibile dimostrare che:

A. se la funzione $y = f(x)$ ammette asintoto verti-cale per $x = x_0$ ed esiste il limite della funzione $y = f'(x)$ per $x \to x_0$, quest'ultimo deve essere $-\infty$ o $+\infty$ (quindi, in caso di esistenza del limite, anche la funzione f' presenta un asintoto verticale dove lo presenta la funzione f);

B. se la funzione $y = f(x)$ ammette asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ $(-\infty)$ ed esiste il limite della funzione $y = f'(x)$ per $x \to +\infty$ $(-\infty)$, quest'ultimo deve essere 0 (quindi, in caso di esistenza del limite, la funzione f' presenta come asintoto orizzontale l'asse x).



Grafici deducibili: la funzione reciproca

Il secondo problema di cui ci occupiamo è quello di dedurre, a partire dal grafico della funzione y = f (x), il grafico di una funzione ottenuta componendo la funzione f con una funzione elementare.
Il grafico della funzione reciproca.

lI grafico della funzione $y = 1/f(x)$, reciproca di $y = f(x)$, si può dedurre da $y = f(x)$ sulla base delle seguenti considerazioni.
La funzione $y = 1/f(x)$:

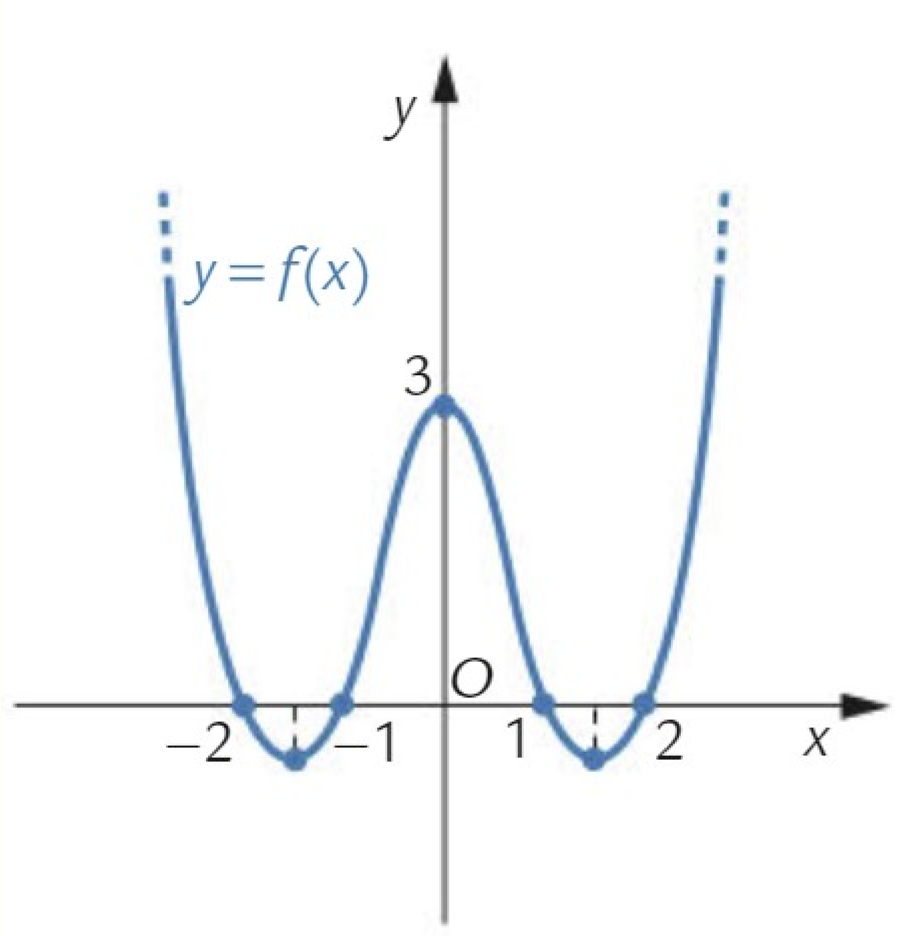
A. ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui $f(x) \neq 0$;
B. ha lo stesso segno di $y = f(x)$;
C. interseca il grafico di $y = f(x)$ nei punti in cui quest'ultimo interseca le rette $y = \pm 1$;
D. presenta asintoti verticali in corrispondenza dei punti di intersezione di $y = f(x)$ con l'asse x (infatti se $f(x) \to 0$ allora $1/f(x) \to \pm\infty$);
E. tende a 0 quando $f(x) \to \pm\infty$.

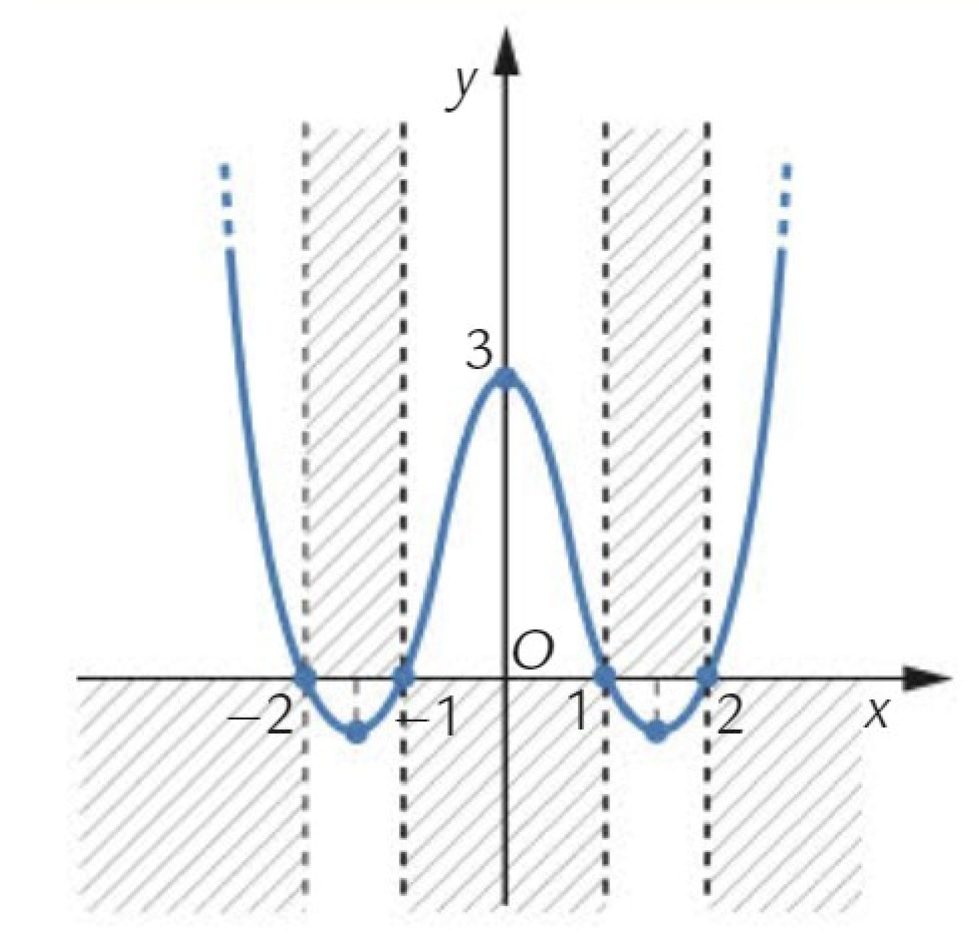
Inoltre, poiché la derivata di $y = 1/f(x)$ è $y' = -f'(x)/f^2(x)$, che ha segno opposto a quello di $y = f'(x)$, possiamo affermare che la funzione reciproca di $f(x)$:

F. è crescente (decrescente) negli intervalli dove $y = f(x)$ decresce (cresce);
G. ha punti di minimo dove $y = f(x)$ ha punti di massimo e, viceversa, ha punti di massimo dove y = f (x) ha punti di minimo, purché in tali punti risulti $f(x) \neq 0$

Grafici deducibili: la funzione reciproca

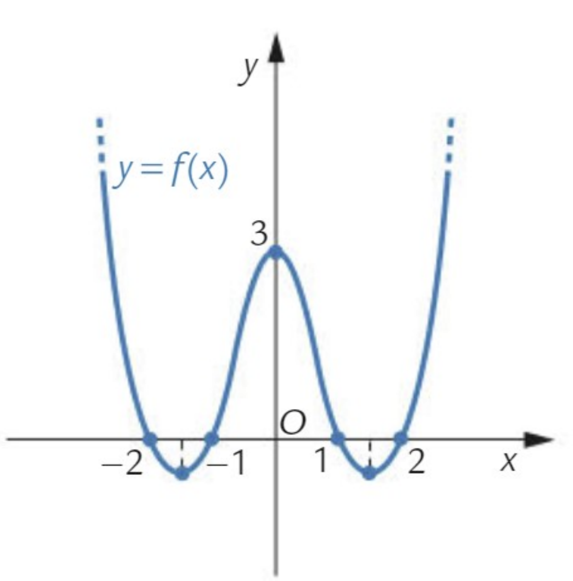
Deduciamo dal grafico della funzione $y = f(x)$, il grafico della funzione reciproca..

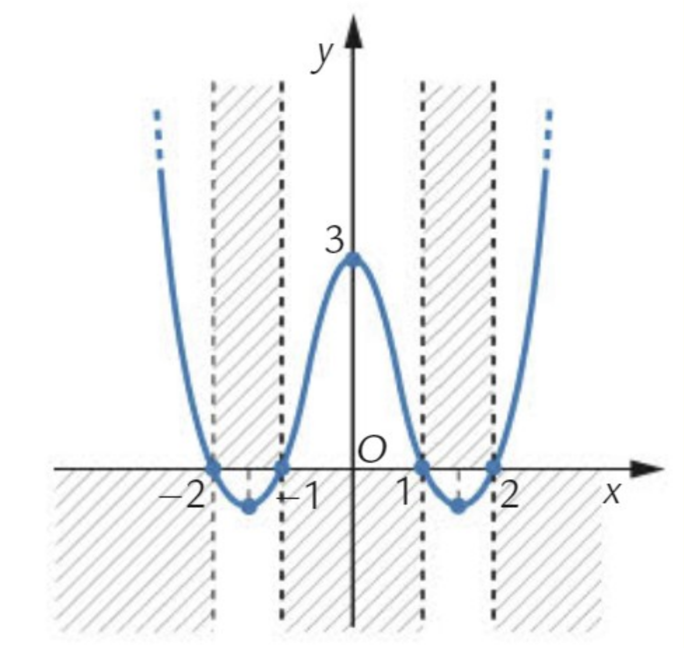


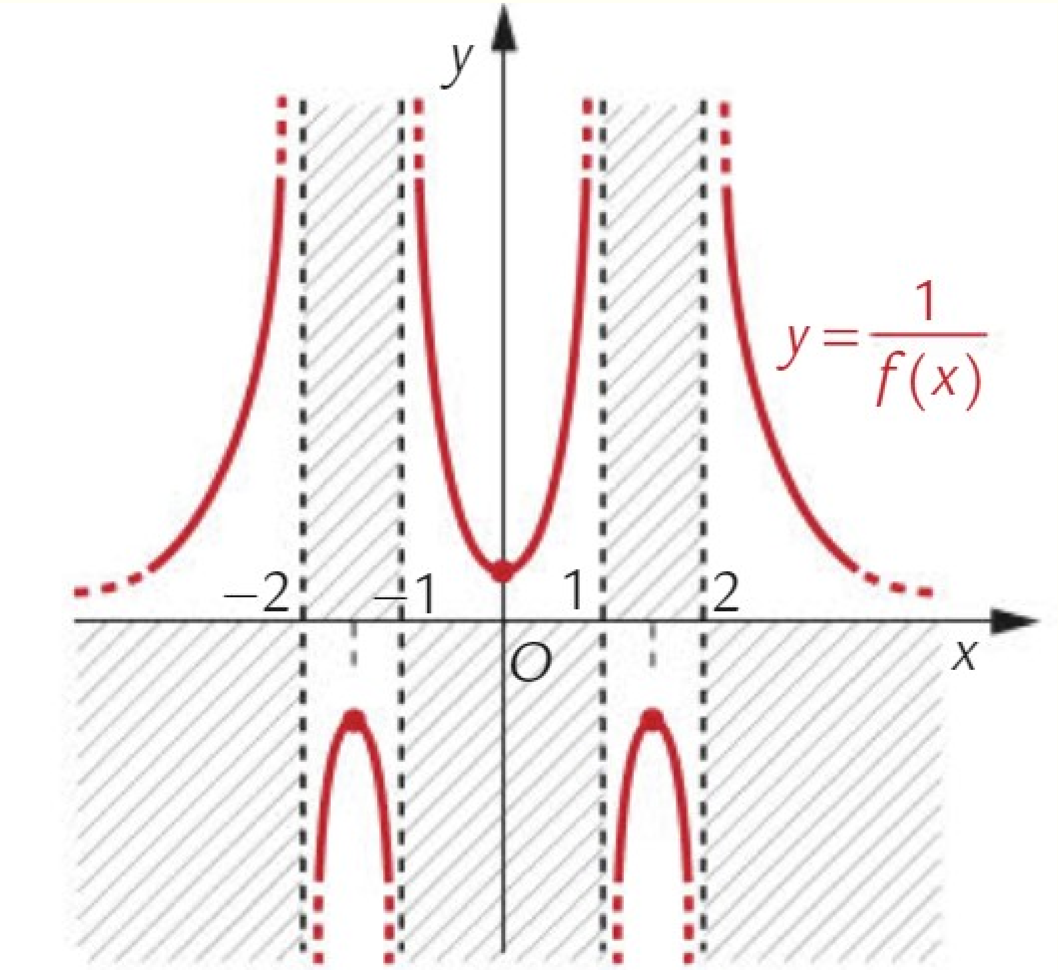


Rappresentiamo le regioni di piano cui appartiene il grafico di $y = 1/f(x)$ tenendo conto che il suo segno è uguale a quello di $f(x)$ e tracciamo gli asintoti verticali della funzione reciproca, tracciando le rette parallele all’asse y passanti per gli zeri di $f(x)$.

Grafici deducibili: la funzione reciproca

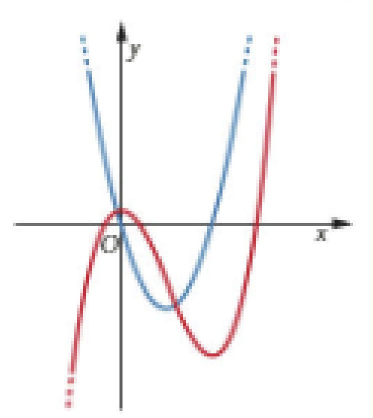




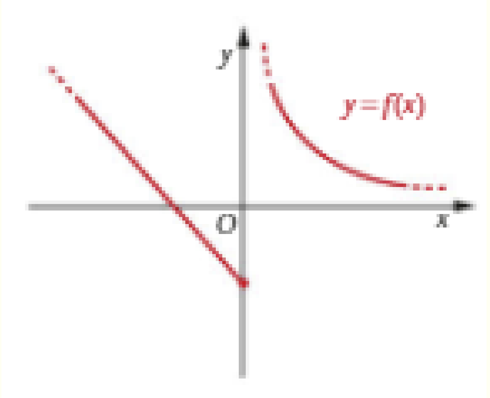


Tenendo conto che i minimi di una funzione si trasformano in massimi per la reciproca (e viceversa) e che se una funzione tende a infinito, la reciproca tende a zero, concludiamo che un grafico plausibile della reciproca è quello colorato in rosso (l’asse x è asintoto orizzontale)

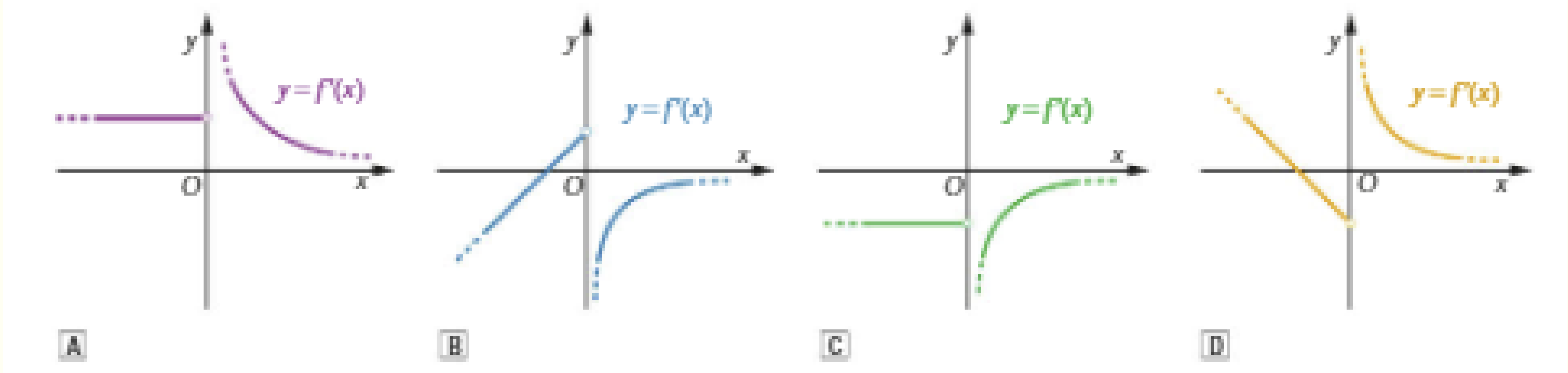
Grafici deducibili: esercizi



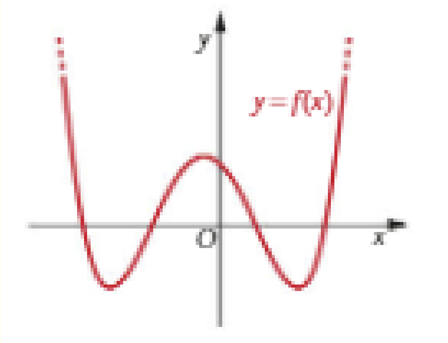
In figura sono stati tracciati il grafico della funzione $y = f(x)$ e quello della sua derivata $y = f'(x)$. Individua qual è il grafico di f e qual è quello di f'



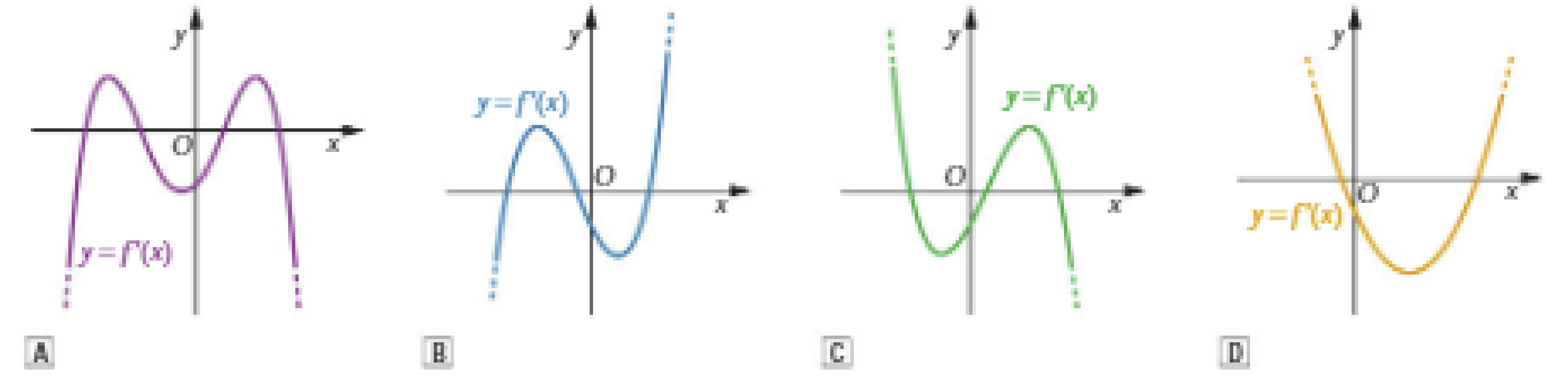
Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?

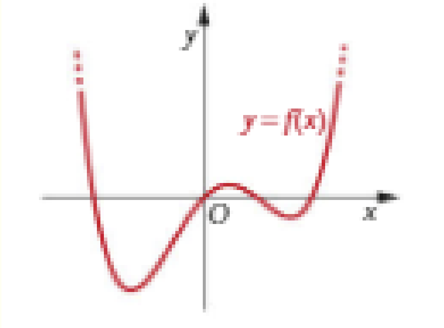


Grafici deducibili: esercizi

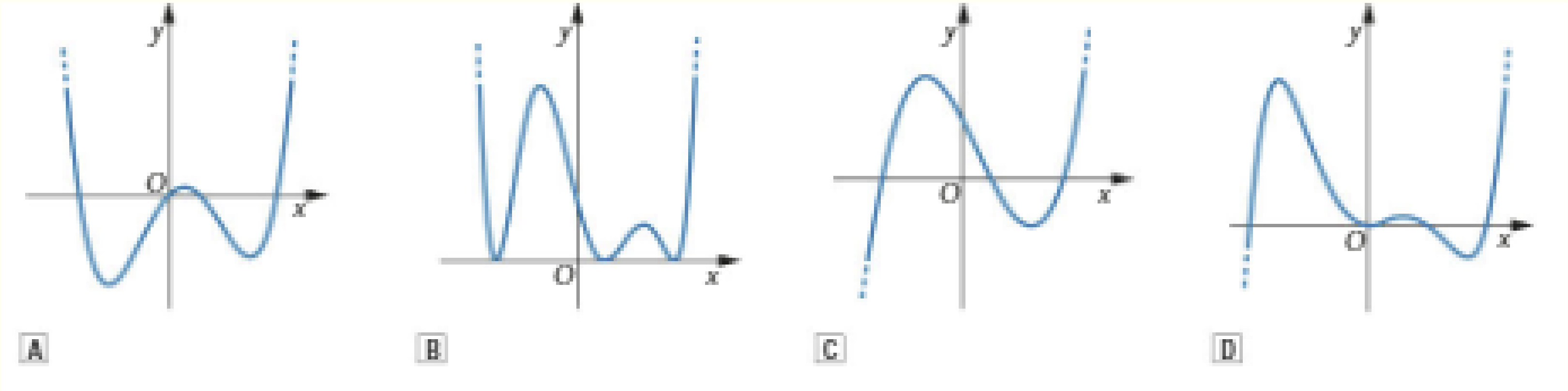


Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?

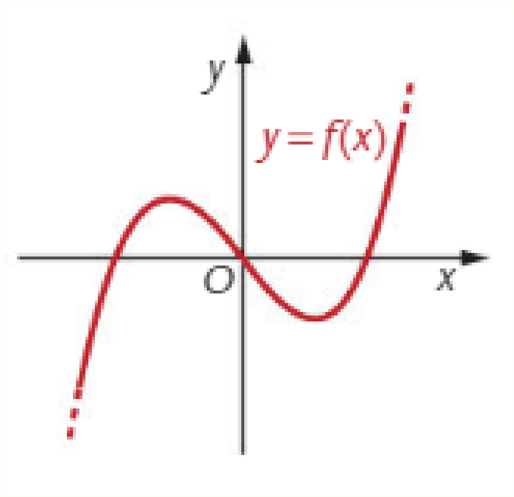




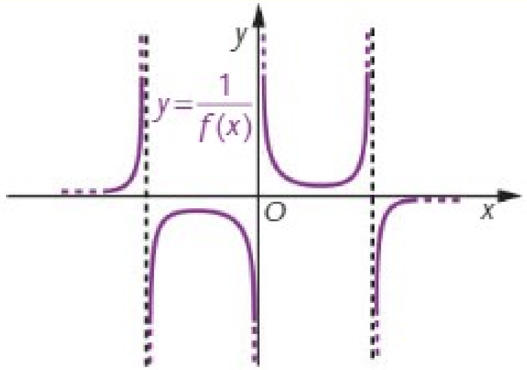
Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = f'(x)$?



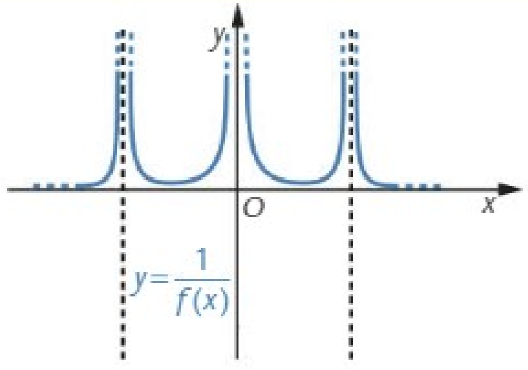
Grafici deducibili: esercizi



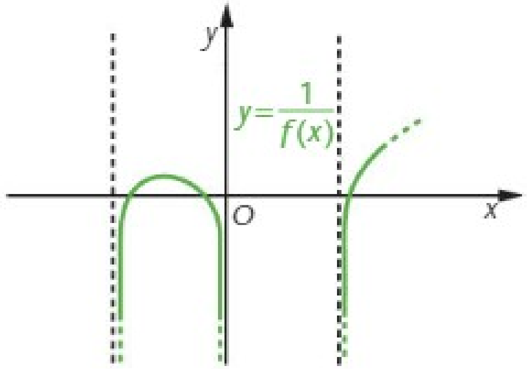
Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = 1/f(x)$?



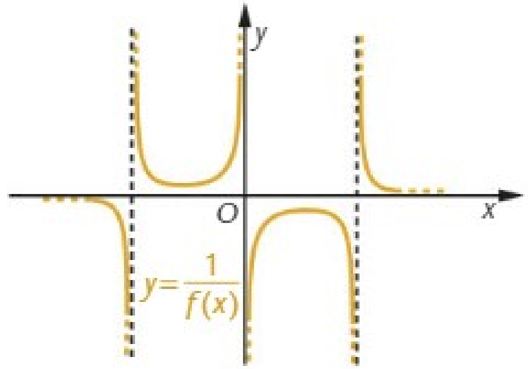
A



B

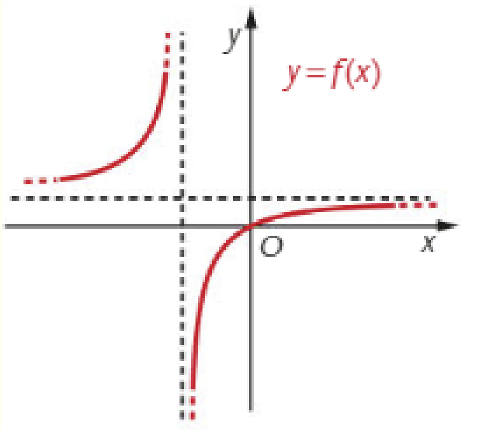


C

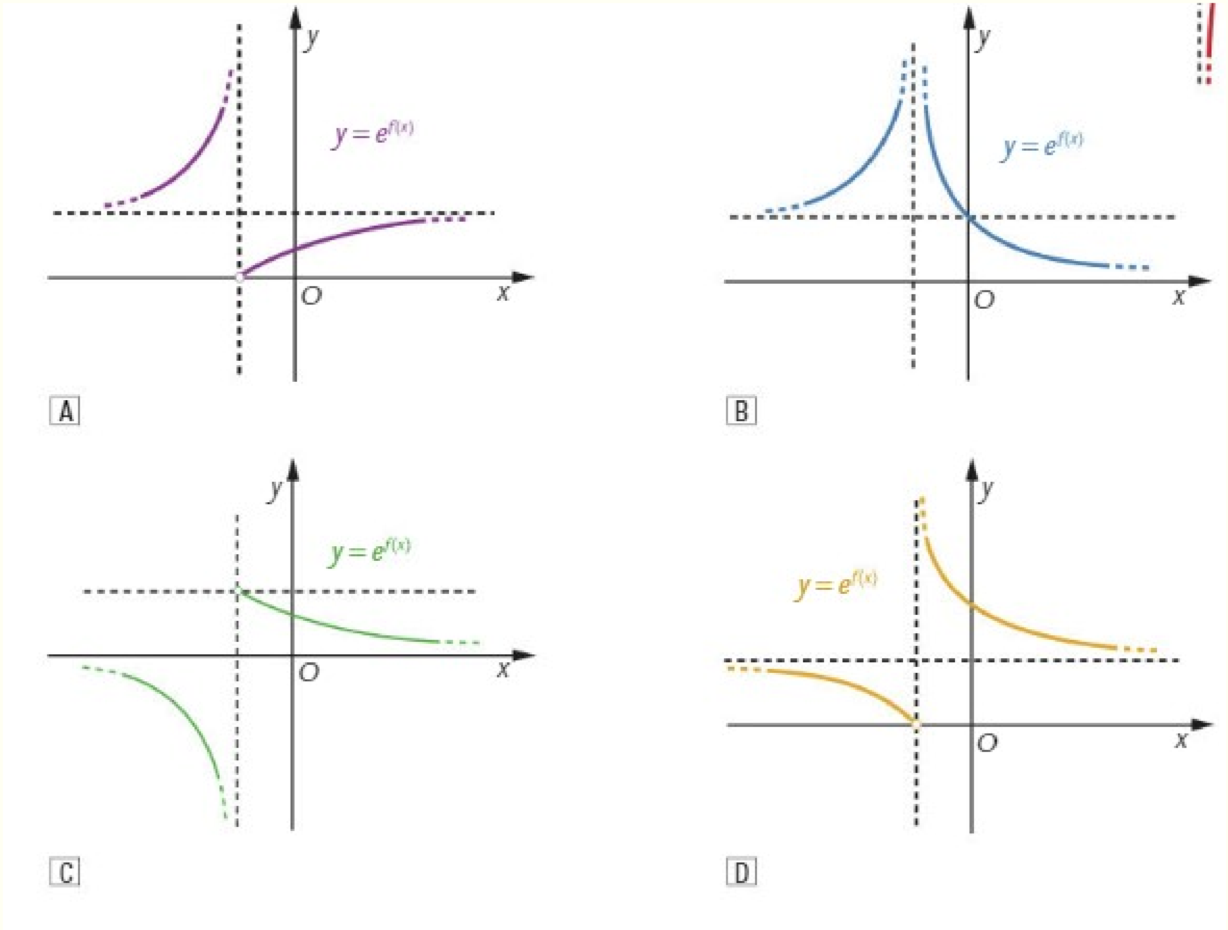


D

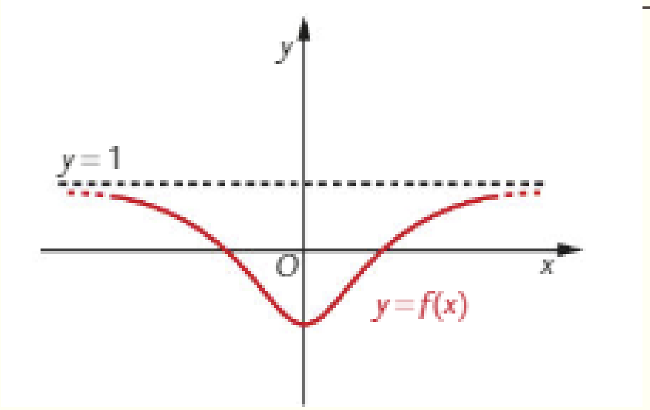
Grafici deducibili: esercizi



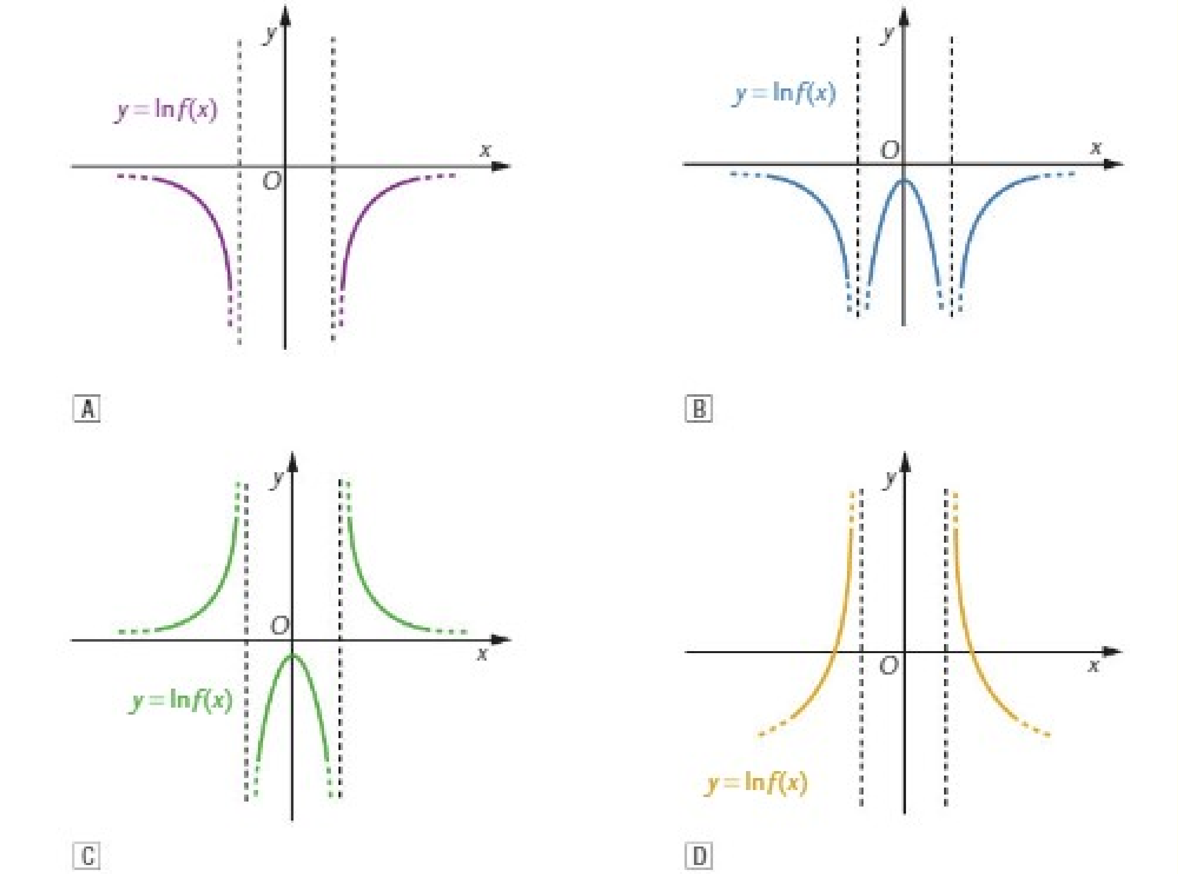
Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = e^{f(x)}$?



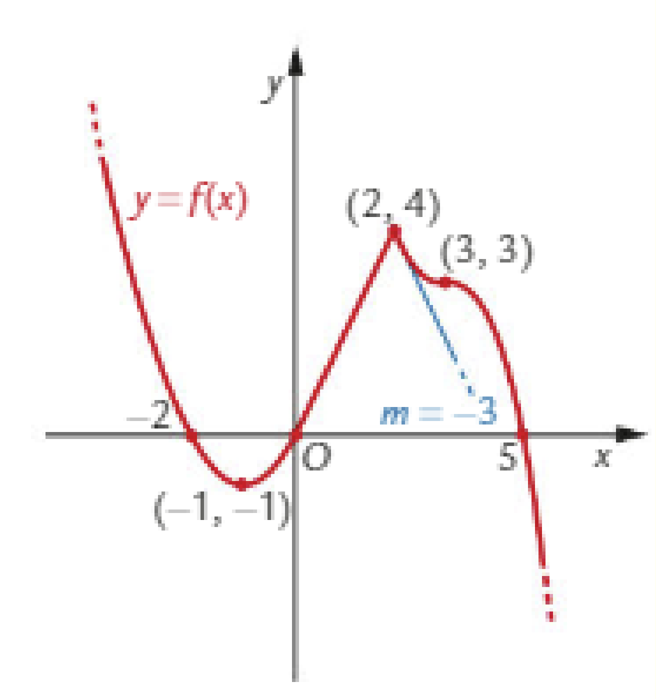
Grafici deducibili: esercizi



Nella figura a lato è tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$. Quale dei seguenti rappresenta un grafico plausibile di $y = \ln(f(x))$?

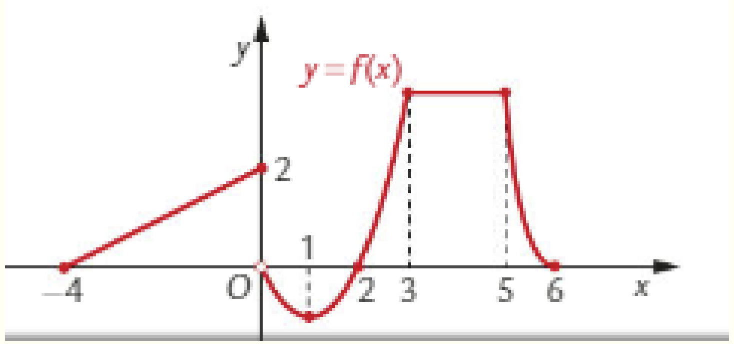


Grafici deducibili: esercizi



In figura è tracciato il grafico di una funzione y = f (x).
Traccia un grafico plausibile per y=f'(x) sapendo che:

a. il tratto per x < 0 è una parabola;
b. in x = 0 la funzione è derivabile;
c. il tratto per 0 < x < 2 è un segmento;
d. in x = 2 la funzione presenta un punto angoloso e la tangente da destra ha coefficiente angolare −3;
e. in x = 3 la funzione presenta un punto di f lesso a tangente orizzontale.



In figura è tracciato il grafico di una funzione y = f (x).
Traccia un grafico plausibile per y = f '(x) sapendo che:

a. i tratti per −4 ≤ x ≤ 0 e 3 ≤ x ≤ 5 sono segmenti;
b. il tratto per 0 ≤ x ≤ 3 è un arco di parabola;
c. nel punto x = 1 la funzione presenta un minimo relativo;
d. nel punto x = 5 la funzione presenta un punto angoloso e latangente da destra è verticale;
e. nel punto x = 6 la tangente è orizzontale

Grafici deducibili: esercizi

Considera la funzione:

$$y = f(x) = \ln\left(\frac{kx}{1+x^2}\right), \text{ con } k > 0$$

a. Determina per quale valore di k il suo punto di massimo relativo ha ordinata uguale a $-\ln 2$.
b. Traccia il grafico della funzione in corrispondenza del valore di k individuato al punto precedente.
c. Deduci il grafico della funzione $y = f(|x|)$.
d. Discuti, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(|x|) = k$.

[a. $k = 1$; b. asintoti: $x = 0$, max $(1, -\ln 2)$, flesso per $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$; d. quattro soluzioni per $k \leq -\ln 2$]

Considera la funzione $y = f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2-x-x^2}{x^2}}$.

a. Studiala e traccia il suo grafico, tralasciando lo studio di y'', ma stabilendo il minimo numero di punti di flesso compatibile con le proprietà della funzione individuate fino allo studio di y'.
b. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto d'intersezione con il suo asintoto orizzontale.
c. Deduci dal grafico di $y = f(x)$ quello di $y = f'(x)$.
d. Stabilisci, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

[a. Asintoti: $x = 0$, $y = -1$; min $\left(4, -\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}\right)$; flessi a tangente verticale: $(-2, 0)$ e $(1, 0)$, complessivamente devono esserci cinque punti di flesso; b. $y = -\frac{1}{12}x - \frac{5}{6}$; d. due soluzioni per $k \geq -\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} \wedge k \neq -1$