lezione 1 19-10-2023

www.robertocapone.it

Gli insiemi numerici

I numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Peano ideò degli assiomi per definire i numeri naturali

1) Esiste un numero naturale, lo zero 0.

2) Ogni numero naturale ha un solo successore

$n \ , \ n+1$

3) Numeri diversi hanno successori diversi

4) Lo zero non è il successore di nessun numero naturale

5) Ogni insieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali.

Sono assiomi indipendenti, nessuno di essi può essere dimostrato a partire dagli altri

n $\quad n+1 \quad n-1 \quad 2n \quad 2n+1$

Un numero naturale $p \in \mathbb{N}$ si dice primo se è maggiore di 1 ed è divisibile solo per 1 e per se stesso.

$2n$, $2m$ numeri pari $\quad n, m \in \mathbb{N}$
la loro somma

$$2n + 2m = 2(n+m) \text{ è ancora pari}$$

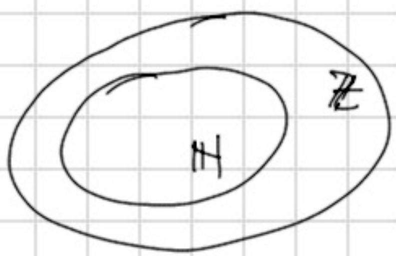
$2n+1$, $2m+1$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$

$$2n+1+2m+1 = 2n+2m+2$$
$$= 2(n+m+1) \quad \text{pari}$$

$2n, \ 2m \qquad 2n \cdot 2m = 2(2n \cdot m)$ pari

$2n+1, \ 2m+1 \qquad (2n+1)(2m+1) = \dots\dots$

I numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$



Teorema: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b > 0$. Allora esistono due unici interi, il quoziente q e il resto r tali che

$$a = q \cdot b + r \qquad 0 \leq r < b$$

$$43 = 5 \cdot 8 + 3$$

$$43 = 5 \cdot 9 - 2 \qquad \ldots$$

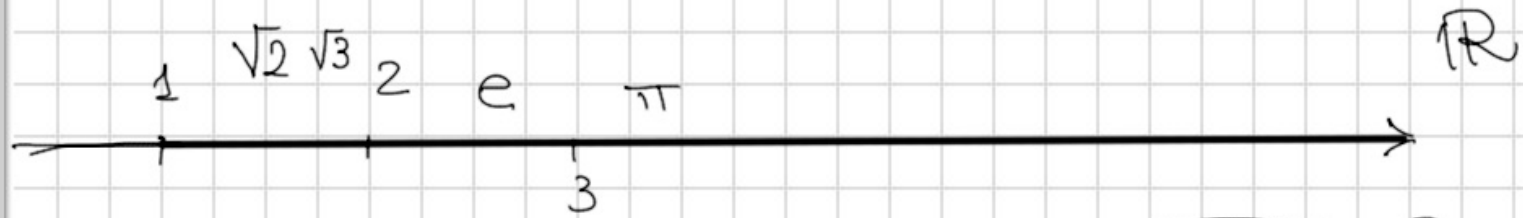
Si dice m.c.m. di due numeri interi a e b il più piccolo intero positivo che è multiplo sia di a che di b.

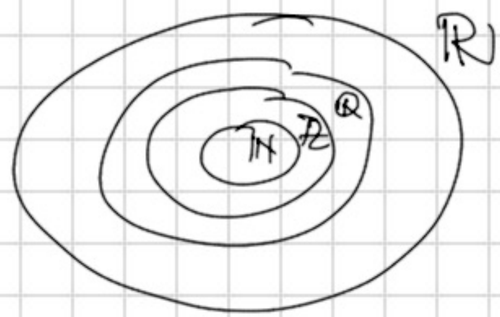
$15, 3 \in \mathbb{Z} \qquad \frac{15}{3} = 5 \in \mathbb{Z}$

$6, 7 \in \mathbb{Z} \qquad \frac{6}{7} \notin \mathbb{Z}$

I numeri razionali

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$





Fissati a e $b \in \mathbb{R}$ $\quad a \leq b$

Si definiscono intervalli limitati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$ Int. chiuso

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$ Int. aperto

$\longrightarrow (a, b)$

$$[a, b[\,: \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

chiuso a sx e aperto a dx

$$]a, b] : \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

aperto a sx e chiuso a dx

Fissato $a \in \mathbb{R}$ si definiscono i seguenti intervalli illimitati

Int. chiuso $[a ; +\infty[\,: \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

Int. aperto $]a ; +\infty[\,: \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Int. chiuso $]-\infty ; a]$

Int. aperto $]-\infty ; a[$

Disequazioni

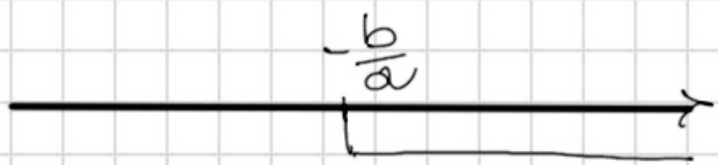
$\rightarrow$ razionali intere di I grado

$\rightarrow$ razionali intere di II grado

$>$, $<$, $\geq$, $\leq$

$$ax + b > 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \rightarrow x < -\frac{b}{a} \rightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$$



$$x \in \left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$$

$$7x - 5 \geq 0 \iff x \geq \frac{5}{7}$$

$$x \in \left[\frac{5}{7}; +\infty\right[$$

$ax^2+bx+c > 0 \qquad \geq 0$

$ax^2+bx+c < 0 \qquad \leq 0$

ax^2+bx manca c

ax^2+c manca b

ax^2 mancano b, c

$1x^2 - 8x + 3 > 0$

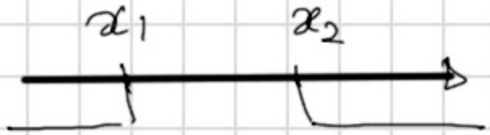
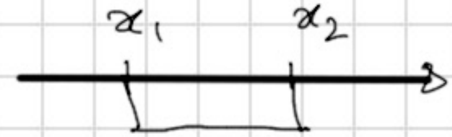
$x^2 - 8x + 3 = 0$ eq. associata

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ 2 soluzioni reali e distinte

$\Delta = 0$ 2 soluzioni reali e coincidenti

Non ho soluzioni reali $\leftarrow$ $\Delta < 0$ 2 soluzioni complesse coniugate

	Segno concorde	Segno discorde
$\Delta > 0$ 2 sol. reali dist. x_1, x_2 con $x_1 < x_2$	Valori esterni  $x < x_1 \cup x > x_2$	Valori interni  $x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$ x_0	$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$	$x = x_0$
$\Delta < 0$ non ha sol. reali	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$ $x \in \emptyset$

- $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$ b pari

$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 100 - 100 = 0$

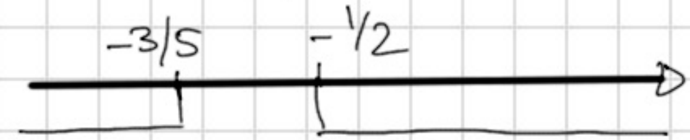
$x = 5/2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \in]-\infty ; +\infty[$

- $10x^2 + 11x + 3 > 0$

$10x^2 + 11x + 3 = 0$

$\Delta = 121 - 120 = 1$ $\Delta > 0$

$x = \frac{-11 \pm 1}{20} \begin{cases} -3/5 \\ -1/2 \end{cases}$ $x < -\frac{3}{5} \cup x > -\frac{1}{2}$



$x \in]-\infty ; -\frac{3}{5}[\cup]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 & (1) \\ x^2 - 3x - 4 < 0 & (2) \end{cases}$$

S_1

S_2

$$S = S_1 \cap S_2$$

(1) $\Delta = 9 - 8 = 1 \qquad \Delta > 0$

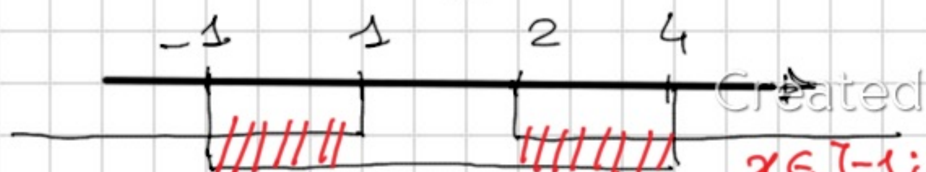
$$x = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{x < 1 \cup x > 2}$ S_1

(2) $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$\boxed{-1 < x < 4}$ S_2



$x \in]-1;1[\cup]2;4[$

$$\begin{cases} x-5>0 \\ x^2-5x+6>0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$$

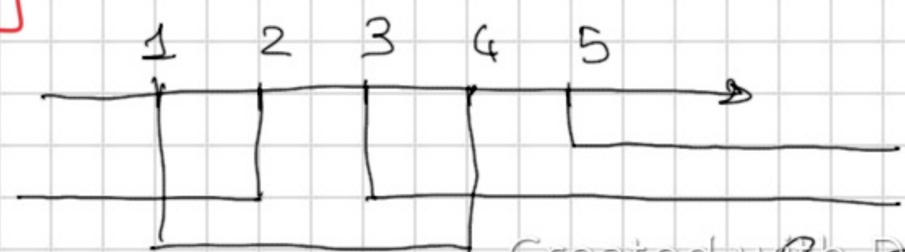
① $\boxed{x>5}$ S_1

② $\Delta = 25-24=1 \quad \Delta>0 \qquad x=\frac{5\pm1}{2}$ → $x_1=2$, $x_2=3$

$\boxed{x<2 \cup x>3}$ S_2

③ $\Delta = 25-16=9 \quad \Delta>0 \qquad x=\frac{5\pm3}{2}$ → $x_1=1$, $x_2=4$

$\boxed{1<x<4}$ S_3



$S: \emptyset$

Disequazioni fratte

$$\frac{x^2+x-2}{2x^2-9x+4} \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 2x^2-9x+4 > 0 \end{cases}$$

(1) $\Delta = 1+8=9 \quad \Delta>0$

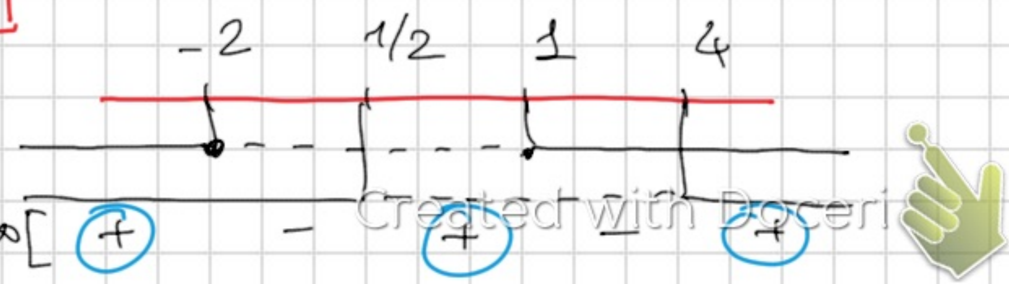
$x = \frac{-1\pm 3}{2}$ → $x_1=-2$, $x_2=1$

$\boxed{x \leq -2 \cup x \geq 1}$

(2) $\Delta = 81-32 = 49 > 0$

$x = \frac{9 \pm 7}{4}$ → $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$

$\boxed{x < \frac{1}{2} \cup x > 4}$



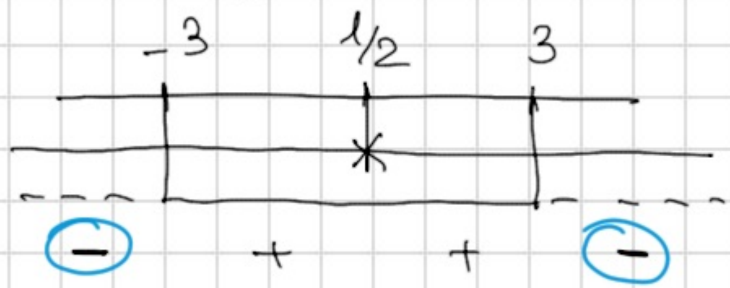
$x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left]\frac{1}{2}; 1\right] \cup \left]4; +\infty\right[$

$$\frac{4x^2-4x+1}{9-x^2} < 0$$

$$\begin{cases} 4x^2-4x+1 > 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \quad ax^2+c=0 \qquad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

① $\forall x \in \mathbb{R}-\{1/2\}$

② $x=\pm 3 \qquad -3<x<3$



$x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

1.2.2 Esercizi proposti

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

1. $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{5}+\dfrac{1}{8}<\dfrac{6x+7}{8}-\dfrac{x+1}{2} \\ 2x+2+\dfrac{3x-1}{5}<\dfrac{10x+1}{3} \end{cases}$ $]2,3[$

2. $\begin{cases} 7(3x+9)>4(5x+16) \\ 9\left(\dfrac{7x}{2}-3\right)<5-\dfrac{x}{2} \end{cases}$ $\emptyset$

3. $\begin{cases} 3x-2>2(x-1)+3 \\ x-3(x+2)<2x-2 \end{cases}$ $]3,+\infty[$

4. $\begin{cases} \dfrac{5}{3}+\dfrac{x-6}{2}<\dfrac{x}{3}+\dfrac{8-x}{6} \\ 2+\dfrac{x-4}{5}>\dfrac{4+x}{3}-\dfrac{3x-1}{15} \end{cases}$ $]3,8[$

5. $\begin{cases} 3(x+1)-7>x+3 \\ 2(x-5)<3-x \end{cases}$ $]\frac{7}{2},\frac{13}{3}[$

6. $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ 2x-6<0 \end{cases}$ $]-\infty,1[\cup]2,3[$

7. $\begin{cases} 15-x-2x^2>0 \\ 17x-6x^2-5>0 \end{cases}$ $]\frac{1}{3},\frac{5}{2}[$

8. $\begin{cases} 2x^2-10x+12>0 \\ x^2-1\leq 0 \end{cases}$ $[-1,1]$

9. $\begin{cases} 4x-1>3x^2 \\ 6(4x^2+3x)<4(3+4x) \\ 3x^2+1>0 \end{cases}$ $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$

4. $\dfrac{9+3x^2}{x^2-4x+4} > 0$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{2\}$

5. $\dfrac{x-10}{x-4} + \dfrac{4x+2}{x+3} \leq 2$ $\quad]-3, -\frac{2}{3}] \cup]4, 7]$

6. $\dfrac{63x^2-7}{x^2-14x+49} > 0$ $\quad]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, 7[\cup]7, +\infty[$

7. $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{4}{x+2} > \dfrac{8}{x^2-4}$ $\quad]-\infty, -2[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

8. $\dfrac{x}{x-3} > \dfrac{4}{x^2-9}$ $\quad]-\infty, -4[\cup]-3, 1[\cup]3, +\infty[$

9. $\dfrac{x^6 (x-2)^2}{x+3} \geq 0$ $\quad]-3, +\infty[$

10. $(6x^2+11x-2)(x^2+3) > 0$ $\quad]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{6}, +\infty[$

Usando la

Si può oss
dove si a

e, com
$\mathbb{R}^+$.

Esem

1.4 Disequazioni di grado superiore al secondo

Le disequazioni di grado superiore al secondo del tipo $p(x) \gtrless 0$ e $\frac{q(x)}{r(x)} \gtrless 0$ possono essere risolte purché $p(x)$ e i polinomi della fu...

Tras
$27x$