Lezione del 06/11/2023

(7) $$\frac{2^{x-1}\cdot 4^{1+x}}{6^{1-x}} < 3$$

(16) $$\frac{4\cdot 7^{x-1}}{21+\sqrt{7^{x}}} \geq 1$$

(7) $$\frac{2^{x-1}\cdot 4^{1+x} - 3\cdot 6^{1-x}}{6^{1-x}} < 0$$

$$\begin{cases} 2^{x-1}\cdot 2^{2+2x} - 3\cdot 6^{1-x} > 0 \\ 6^{1-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$2^{x-1} \cdot 2^{2+2x} - 3 \cdot 6^{1-x} > 0$$

$$2^{1+3x} - 3 \cdot 6^{1-x} > 0$$

$$\log 2^{1+3x} > \log 3 \cdot 6^{1-x}$$

$$(1+3x)\log 2 > \log 3 + \log 6^{1-x}$$

$$(1+3x)\log 2 > \log 3 + (1-x)\log 6$$

$$\log 2 + \underline{3x\log 2} - \log 3 - \log 6 + \underline{x\log 6} > 0$$

$$x\left(3\log 2 + \log 6\right) > \log 3 + \log 6 - \log 2$$

$$x > \frac{\log 3 + \log 6 - \log 2}{3\log 2 + \log 6}$$

$$\frac{3\log 2 + \log 2 + \log 3}{4\log 2 + \log 3}$$

$$\frac{4\cdot 7^{x-1}}{21+\sqrt{7^x}} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\cdot 7^{x-1} - 21 - \sqrt{7^x}}{21+\sqrt{7^x}} \geq 0$$

$$\begin{cases} \frac{4}{7}(7^x) - 21 - 7^{\frac{x}{2}} \geq 0 \\ 21+\sqrt{7^x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$7^{\frac{x}{2}} = t$$

$$\frac{4}{7}t^2 - t - 21 \geq 0$$

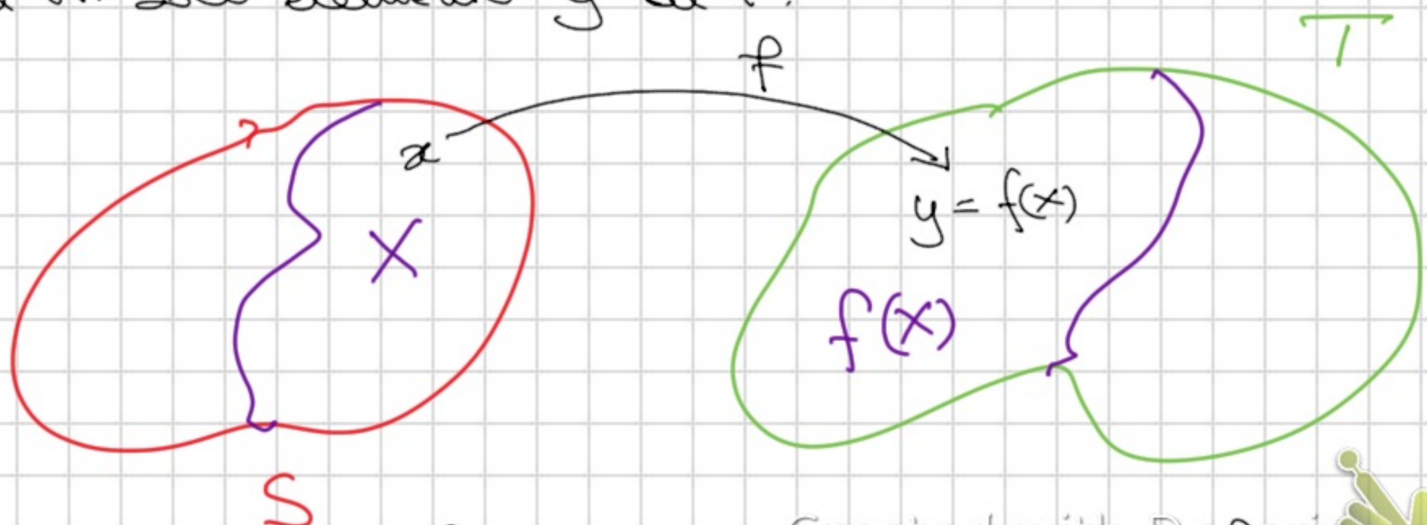
$$4t^2 - 7t - 147 \geq 0$$

$$t =$$

Verso il concetto di funzione

Leibniz

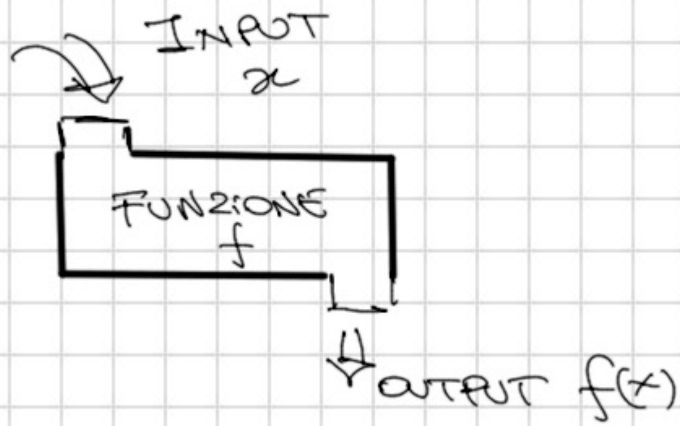
Dati due insiemi S e T e una parte di S, X.
Si chiama funzione da S verso T, definita in X (o anche funzione di X in T) una corrispondenza tra elementi di S ed elementi di T, la quale ad ogni elemento x di X fa corrispondere uno ed un solo elemento y di T.



X insieme di definizione o anche dominio di f

Il sottoinsieme di T costituito dagli elementi che sono corrispondenti per mezzo di f, di elementi di X si chiama insieme dei valori o codominio della funzione f

Si dice anche che f è una funzione definita nella parte X di S e a valori nell'insieme T.



$y = \log_2 x$ $\qquad X : \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$

FUNZIONI INIETTIVE

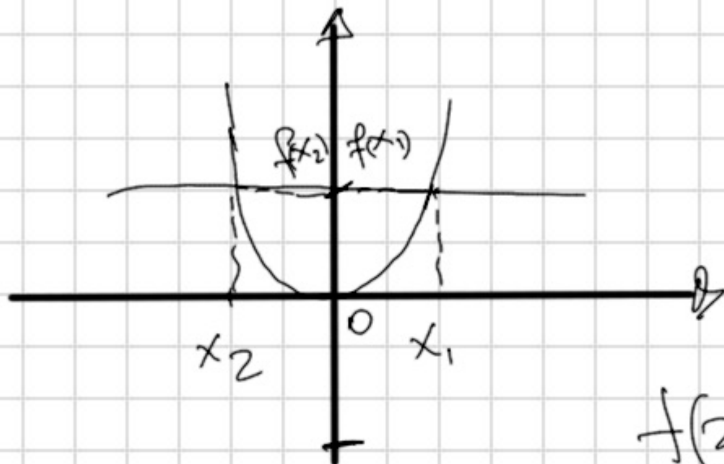
Una funzione $f : X \subseteq S \to T$ si dice INIETTIVA se, a due qualunque elementi x' e x'' distinti di X, fa corrispondere due elementi $f(x')$ e $f(x'')$ anch'essi distinti

$$\boxed{\forall x' \neq x'' \implies f(x') \neq f(x'')}$$

$f(x) = x^3$

$$(x')^3 = (x'')^3 \implies x' = x''$$

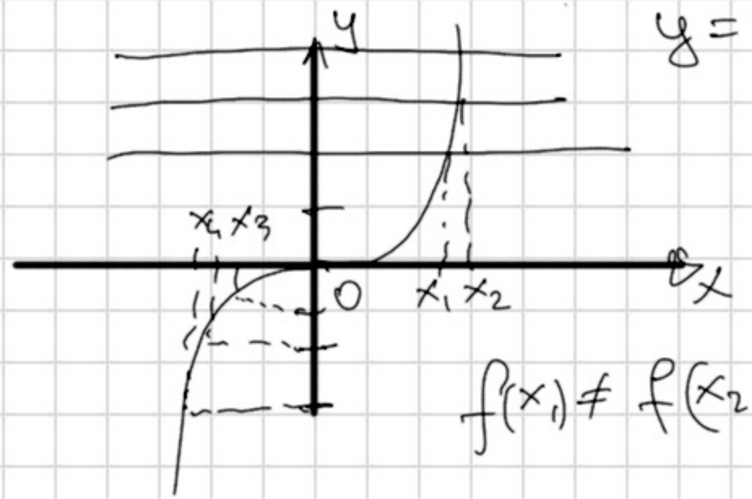
$f(x) = x^2 \qquad (x')^2 = (x'')^2 \implies x' = \pm x''$



$y = x^2$ parabola

NON INIETTIVA

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$



$y = x^3$

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

FUNZIONE SURIETTIVA

Una funzione $f : X \subseteq S \to T$ si dice funzione di X su tutto T o anche funzione suriettiva, se il codominio della funzione $f(X)$ coincide con T; ovvero, equivalentemente, se ogni elemento y di T è corrispondente, per mezzo di f, di almeno un elemento x di X.

$$\forall y \in Y \Rightarrow \exists\, x \in X \text{ t.c. } y = f(x)$$

Definizione analoga di funzione iniettiva:

Una funzione $f : X \subseteq S \to T$ si dice iniettiva se ogni elemento di T ha al massimo una controimmagine in S o, ciò che è lo stesso, se manda elementi distinti in elementi distinti

Geometricamente dire che ogni elemento di R ha al massimo una controimmagine equivale a dire che ogni retta orizzontale deve intersecare il grafico della funzione al massimo in un punto.

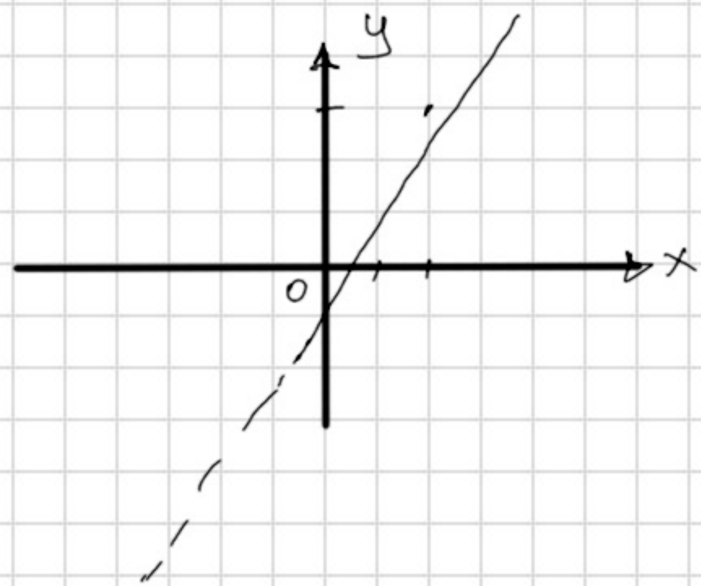
Definizione analoga di funzione suriettiva

Una funzione $f : X \subseteq S \to T$ si dice suriettiva se ogni elemento di T ha almeno una controimmagine in S ovvero se

$$\forall y \in T : \exists x \in X \mid f(x) = y$$

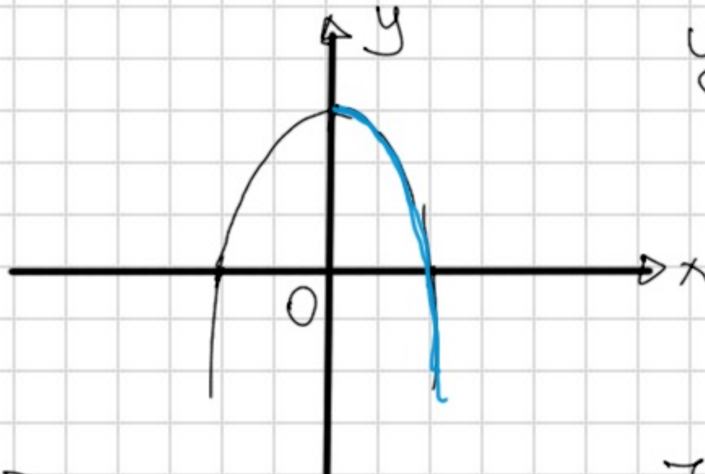
Geometricamente una funzione reale di variabile reale è suriettiva se e solo se ogni retta orizzontale deve intersecare il grafico della funzione in almeno un punto

Una funzione si dice biettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva



$y = 2x - 1$

- suriettive
- iniettive
- biettiva



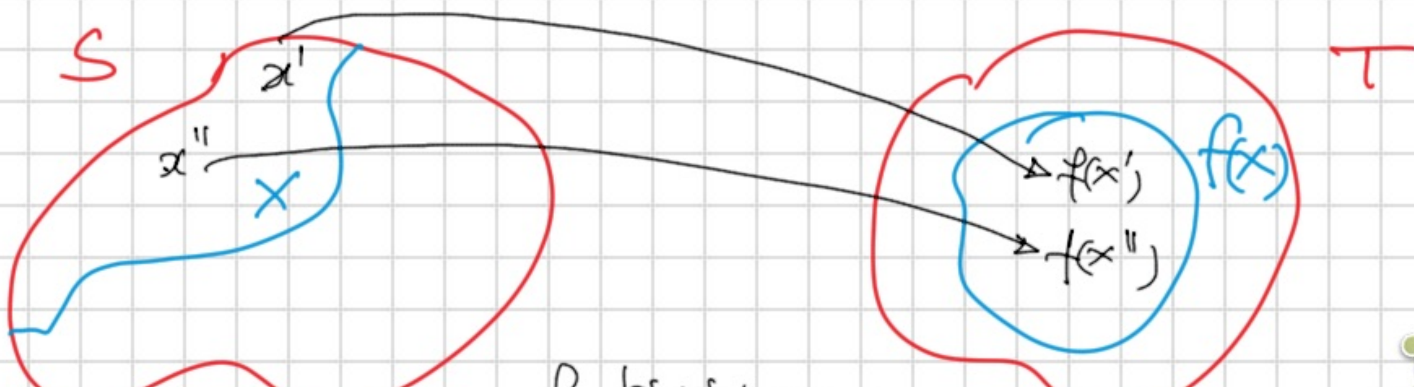
$y = -x^2 + 4$

NO INIETTIVA
NO SURIETTIVA
NO BIETTIVA

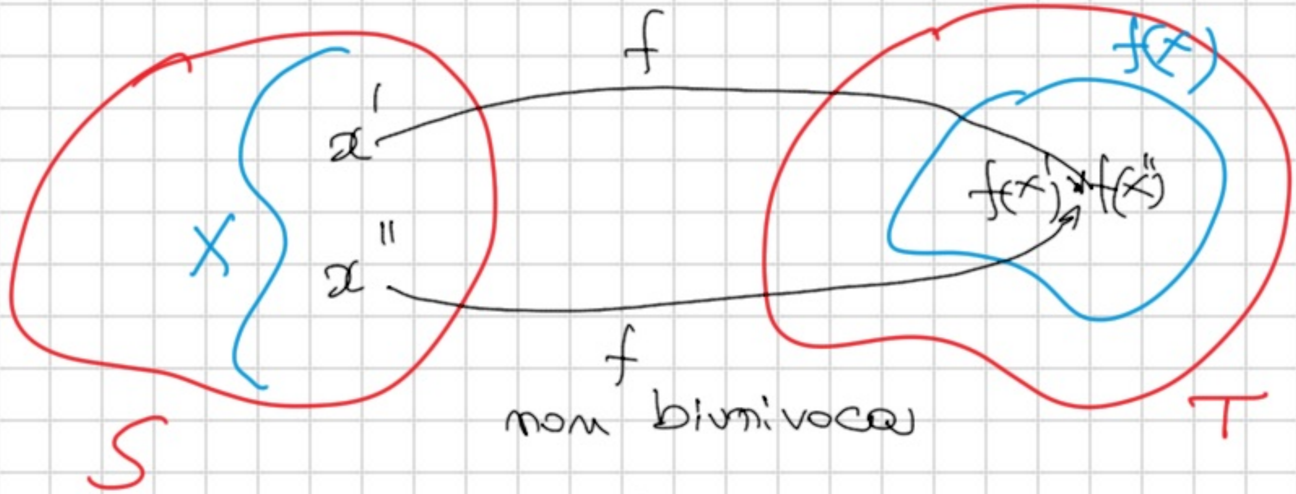
È suriettiva se $y \in]-\infty; 4[$

È iniettiva se $x \in]0; +\infty[$

Si può dire che una funzione $f: X \subseteq S \to T$
è biunivoca se ogni elemento y del codominio di f
è il corrispondente per mezzo di f di un solo elemento
x di X. Ovvero, equivalentemente, se $\forall\, y \in T$
o non esiste nessun elemento $x \in X$ tale che
$y = f(x)$ oppure, se ne esiste uno, questo è unico.



$$x' \neq x'' \xrightarrow{f \text{ biunivoca}} f(x') \neq f(x'')$$



non biunivoca

$$\exists\ x', x'',\ \text{con}\ x' \neq x'' \mid f(x') = f(x'')$$

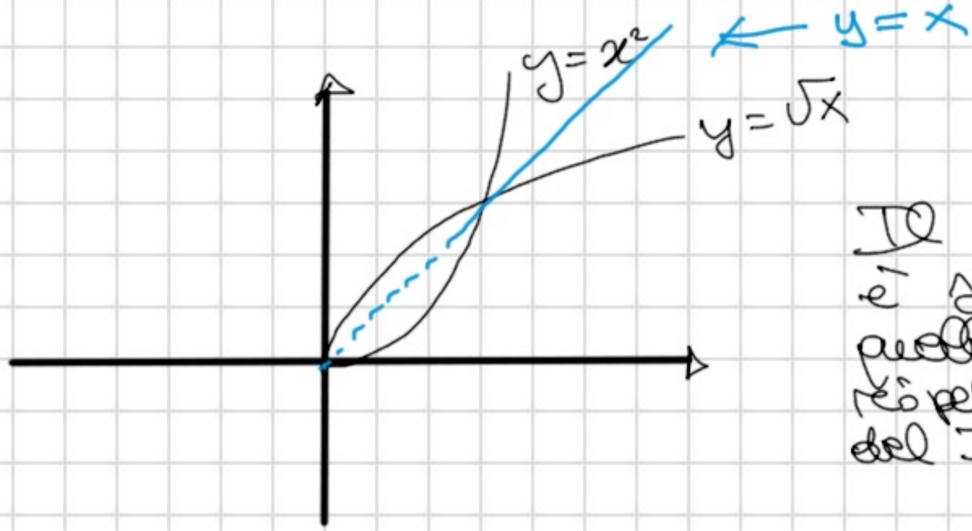
La funzione inversa

Data la funzione biettiva $f : X \subseteq S \to T$ si chiama funzione inversa di f la funzione definita in $f(X)$ e a valori in S che ad ogni elemento y di $f(X)$ fa corrispondere quell'elemento x di X al quale la f fa corrispondere y, cioè l'elemento x di X t.c. $y = f(x)$.

$$f^{-1}(x) : f(X) \subseteq T \to S$$

NB

La funzione inversa di una funzione biunivoca è anch'essa biunivoca.



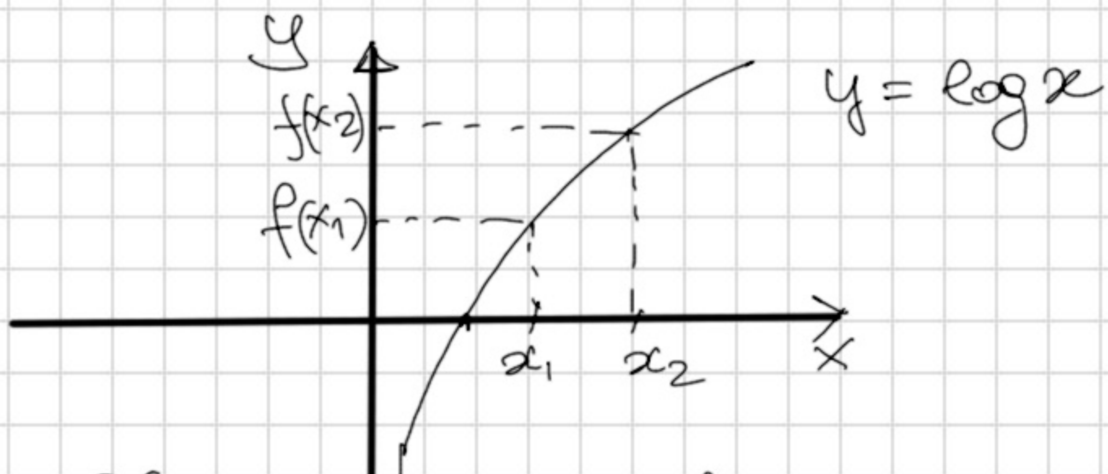
Il grafico di $y=\sqrt{x}$ è simmetrico di quello di $y=x^2$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Una funzione è invertibile se e solo se è biunivoca.

Considero la restrizione di $y=x^2$ nell'intervallo $[0;+\infty[$. In questo intervallo $y=x^2$ è biunivoca e quindi invertibile

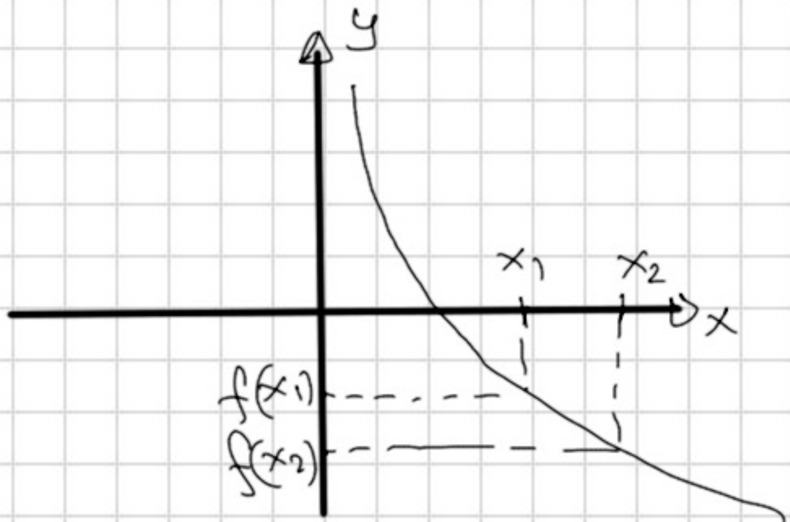
Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione $y = f(x)$ si dice crescente in senso stretto in un intervallo $I \subseteq X$ se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$



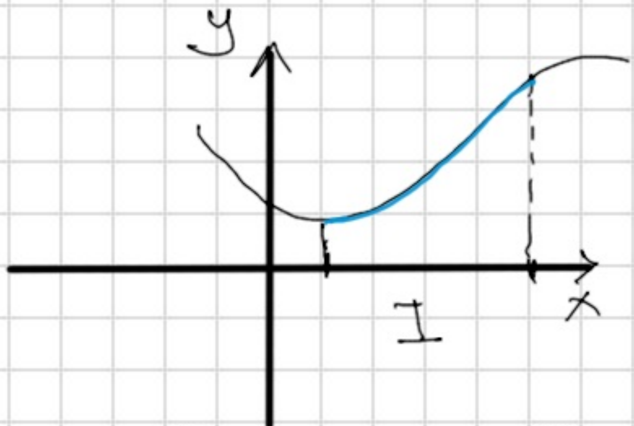
Se $f(x_1) \leq f(x_2)$ la funzione è crescente in senso lato o non decrescente

Una funzione si dice decrescente in un intervallo $I \subseteq X$ se, comunque scelti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$

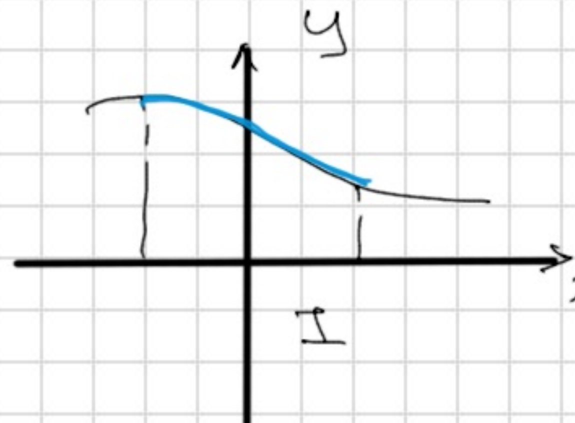


$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Una funzione $f : X \subseteq S \to T$ si dice monotona in senso stretto in un intervallo $I \subseteq X$ se, in quell'intervallo, è sempre crescente o decrescente in senso stretto



monotona crescente



monotona decrescente

Funzioni: reali di una variabile reale

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \in X \to f(x) \in X$$

reali