Lezione del 16-11-2023

$x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x)$ reale di variabile reale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \to \ell \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \to +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \to \ell \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to \ell \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}} = +\infty$$

per il principio di eliminazione degli infinitesimi

$\frac{\ell}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{\ell} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ F.I.
$\frac{0}{\ell} = 0$	$\frac{\ell}{0} = \infty$	$\frac{0}{0}$ F.I.
$0 \cdot \ell = 0$	$\infty \cdot \ell = \infty$	$0 \cdot \infty$ F.I.
$\ell + \infty = +\infty$	$\ell - \infty = -\infty$	$\infty - \infty$ F.I.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{2x^2-3x+1} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3+\cancel{\frac{2}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\cancel{\frac{3}{x}}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x^2 - 3x + 5} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(2 - \underbrace{\cancel{\frac{3}{x}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{5}{x^2}}}_{0}\right)} = 0$$

Regola pratica

Se grado $N(x)$ > grado $D(x)$ il limite è ∞

Il numeratore è infinito di ordine superiore rispetto al denom.

Se grado $N(x)$ < grado $D(x)$ il limite è 0

Il numeratore è infinito di ordine inferiore rispetto al denom.

Se grado $N(x)$ = grado $D(x)$ il limite è uguale al rapporto tra i coefficienti di grado massimo

Numeratore e denominatore sono infiniti dello stesso ordine

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+5x+2}\right) = \log\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2+5x+2}\right]$$

1

$$= \log 1 = 0$$

$\log(+\infty) = +\infty$

$\log(0) = -\infty$ ATT. la base è $a > 1$

$\log 1 = 0$

$\log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty$

base $0 < a < 1$

$\log_{\frac{1}{2}}(0) = +\infty$

$\log(-\infty)$ NON ESISTE $\forall a$

$a > 1$

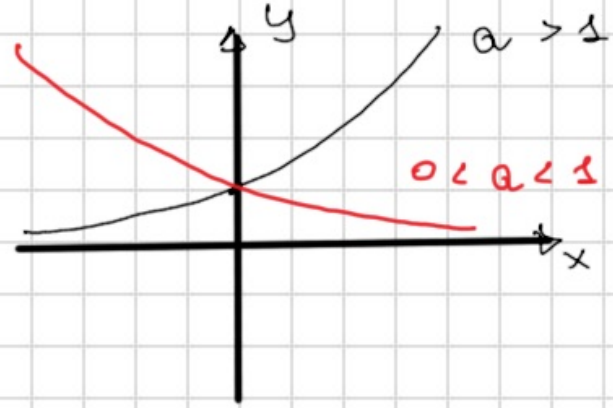
$$a^{+\infty} = +\infty$$

$$a^{-\infty} = 0$$

$0 < a < 1$

$$a^{+\infty} = 0$$

$$a^{-\infty} = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^2-2}{2x^2+5}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{2x^2+5}} = e^{1/2}$$

$1/2$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9} \left(= \frac{9-15+6}{9-18+9} = \frac{0}{0} \right)$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \to -3 \\ \to -2 \end{cases}$$

$$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{(x+3)^{\cancel{2}}} = \frac{-1}{0} = \pm \overset{?}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+x-1}{x^2+4x+3} = \cancel{\frac{4}{8}}\ \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+5}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to \infty} \frac{x\left(1+\overset{0}{\cancel{\frac{2}{x}}}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\underset{0}{\cancel{\frac{2}{x}}}+\underset{0}{\cancel{\frac{5}{x^2}}}\right)}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$\boxed{\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}}$$

Teorema di unicità del limite

Se la funzione f ha nel punto x_0 come limite ℓ (al finito o no) tale limite è unico

dimostrazione:

Per assurdo. Supponiamo che ℓ non sia unico. Allora esiste un numero reale ℓ', $\ell' \neq \ell$ t.c.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell'$$

Poiché ℓ è il limite di $f(x)$ si ha che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_{x_0}$ t.c. $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

Ma anche ℓ' è limite della funzione. Si ha

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I'_{x_0}$ t.c. $\ell' - \varepsilon < f(x) < \ell' + \varepsilon \quad \forall x \in I \cap I'$

Sia

$$\varepsilon < \frac{\ell' - \ell}{2}$$

Dalle due definizioni si ha che:

$$\ell' - \varepsilon < f(x) < \ell' + \varepsilon \rightarrow \ell' - \varepsilon < \ell + \varepsilon$$

$$\rightarrow \varepsilon > \frac{\ell' - \ell}{2}$$

contrariamente alla supposizione iniziale.

Teorema sulla esistenza del limite di una funzione monotona.

Ogni funzione monotona nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ è in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione a sinistra per X dotata di limite sinistro e in ogni punto di accumulazione a destra per X dotata di limite destro e si ha:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x < x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \inf\limits_{\substack{x < x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{\substack{x > x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente} \\ \sup\limits_{\substack{x > x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente} \end{cases}$$

Nozione di Continuità

DEFINIZIONE - Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X, $x_0 \in X$. Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero se il limite di f in x_0 esiste ed è uguale al valore che la funzione assume in x_0.

Dire che tale limite esiste equivale a dire che
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. non appena $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$

si ha che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La nozione di funzione continua in x_0 precisa quella più intuitiva di funzione per la quale a valori della variabile x via via sempre più vicini a x_0 corrispondono valori $f(x)$ via via sempre più vicini a $f(x_0)$

DEFINIZIONE – Una funzione reale f si dice continua in una parte Y del suo insieme di definizione X se è continua in ogni punto di Y.

DEFINIZIONE – Se il punto x_0, oltre che appartenere all'insieme di definizione X della funzione reale f, è di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per X, si dice che la funzione f è continua a sinistra (risp. a destra) in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \left[\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\right]$$

Teorema di Bolzano sulla continuità di una funzione monotona.

Ogni funzione reale monotona (crescente o decrescente) nel suo insieme di definizione X, il cui codominio sia un intervallo (di qualunque tipo) è una funzione continua in X.

dimostrazione - Esaminiamo il caso di f monotona crescente in X. Si tratta di provare, se x_0 è di accumulazione per X, che il limite di f in x_0 è $f(x_0)$ ovvero che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

se x_0 è di accumulazione sia a sinistra che a destra.
(Ma può valere anche solo la prima o solo la seconda se x_0 è di accumulazione risp. solo a sinistra o solo a destra)
Proviamo che valga la prima.

Per il teorema di esistenza del limite di una funzione monotona si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in X}} f(x)$$

Chiamiamo l questo limite sinistro e si ha $l \leq f(x_0)$
Essendo $f(x_0)$ un maggiorante dell'insieme numerico di cui l è estremo superiore.

Non può essere $l < f(x_0)$ perché, se ciò fosse, nessun punto dell'intervallo $]l, f(x_0)[$ farebbe parte del codominio di f.

Ciò contrasta con l'ipotesi che questo è un intervallo.
Dunque deve essere

$$l = f(x_0)$$

c. v. d.

Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione:
la funzione potenza, ...

la funzione esponenziale, logaritmo, ...

Tali funzioni o sono strettamente monotone e hanno per codominio un intervallo o sono strettamente monotone a tratti e relativamente a ciascun tratto il codominio è sempre un intervallo.

Esempio 1 Ogni funzione costante è continua in X

$$f : x \in X \to c \in \mathbb{R}$$

Infatti $\lim_{x \to x_0} f(x) = c = f(x_0)$

Esempio 2 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f: x \in \mathbb{R} \to ax+b \quad \text{è continua in } \mathbb{R}$$

Infatti $\lim_{x \to x_0} ax+b = ax_0+b = f(x_0)$

Esempio 3 La funzione

$$f: x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0

Infatti $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(x_0)$

Esempio 4

La funzione di Dirichlet

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

non continua in x_0, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

Infatti, se prendo $\varepsilon = 1/2$, qualunque sia $\delta > 0$

se $x_0 \in \mathbb{Q}$ per la densità di $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$,

$\exists\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \ |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| < 1 \not< \varepsilon$

Analogamente

se $x \in \mathbb{Q} : \ |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| = 1 \not< \varepsilon$