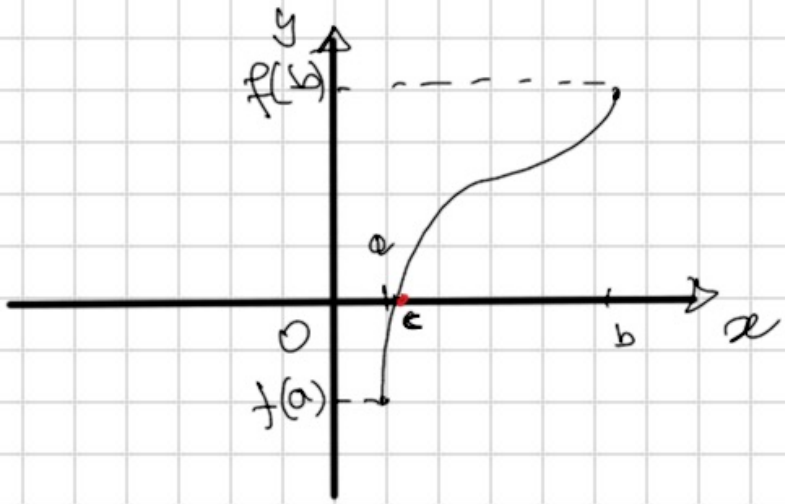
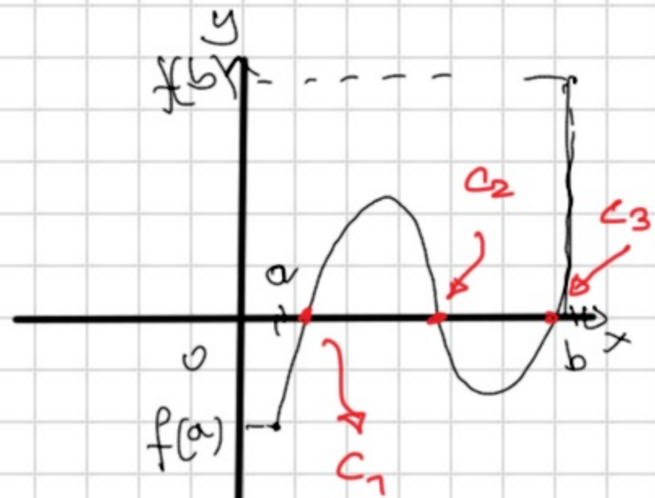
Lezione del 17-11-2023

TEOREMA DEGLI ZERI

Una funzione reale f continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b] che assume valori di segno opposto agli estremi di tale intervallo, si annulla in almeno un punto interno ad esso





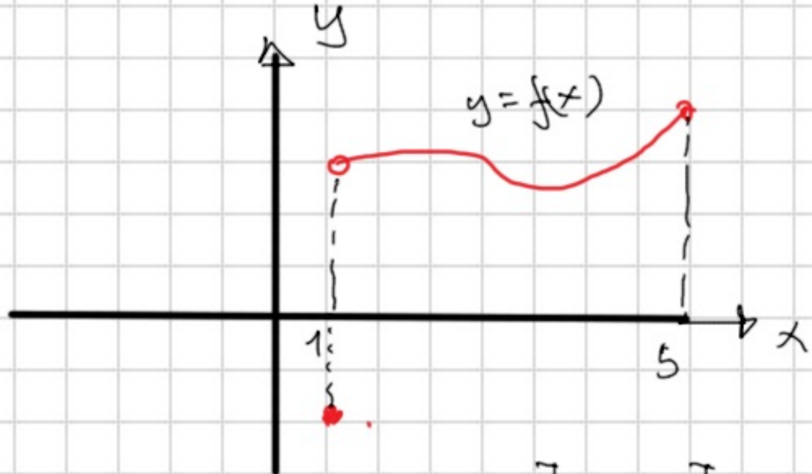
f continua in $[a,b]$
$f(a)<0$, $f(b)>0$ $\Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ t.c. $f(c)=0$

Dimostrazione: Si supponga, per fissare le idee, che $f(a)<0$ e $f(b)>0$.
Sia c l'estremo superiore dei punti $x \in [a,b]$ t.c. $f(x)<0$
Essendo f continua in a e in b, per il teorema di permanenza del segno

$c \neq a$, $c \neq b$ e perciò $c \in [a,b]$

Dovendo essere $f(x)<0$ in un opportuno intorno destro di a e $f(x)>0$ in un opportuno intorno sinistro di b allora nel punto c dovrà essere $f(c)=0$

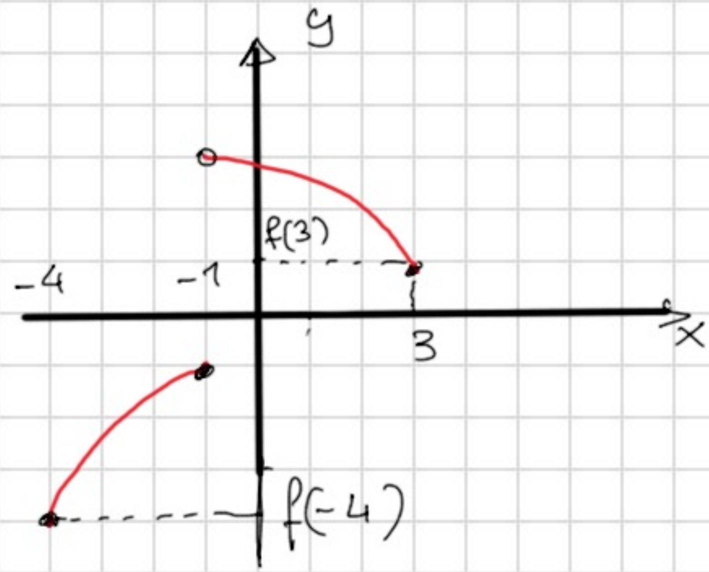
Se ciò non fosse vero, cioè se $f(c)<0$, per la permanenza del segno esisterebbe un intorno di c nel quale si avrebbe $f(x)<0$ in contrasto con l'ipotesi fatta.



$f(x)$ è continua in $]1,5]$

$f(1) < 0 \quad f(5) > 0$

Non esiste nessun punto interno a $]1,5]$ in cui essa si annulla.



$f(-4) < 0 \quad f(3) > 0$

$f \in [-4,3]$

f non è continua in $[-4,3]$

Fornire esempi e controesempi di validità del teorema degli zeri. (da fare a casa)

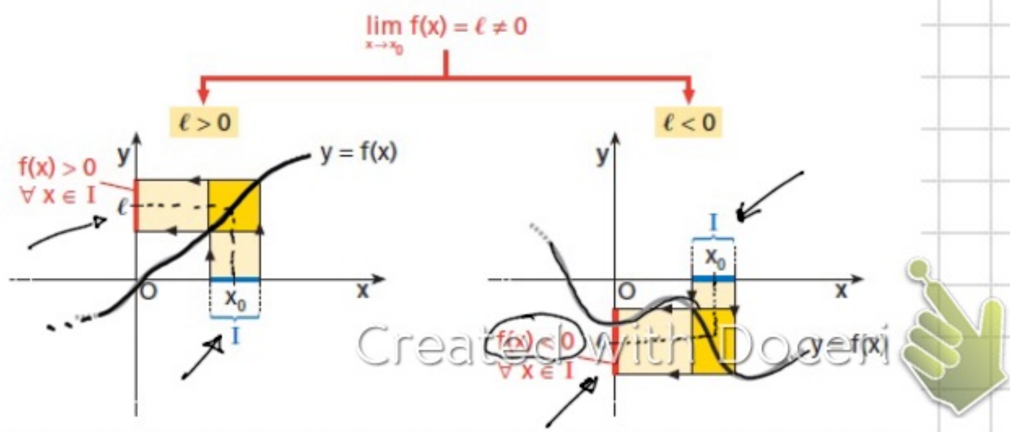
Teorema di permanenza del segno

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, regolare nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$, di accumulazione per X.
Allora se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$$

$\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x \in I \cap X$, con $x \neq x_0$, si ha $f(x) > 0$

In particolare, se la f è continua in $x_0 \in X$ e se il valore di f è positivo, esiste un intorno di x_0 in cui la $f(x)$ è positiva.



Dimostrazione

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, per la definizione di limite si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{x_0} \text{ t.c. } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ovvero

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε, posso porre $\varepsilon = |\ell|$

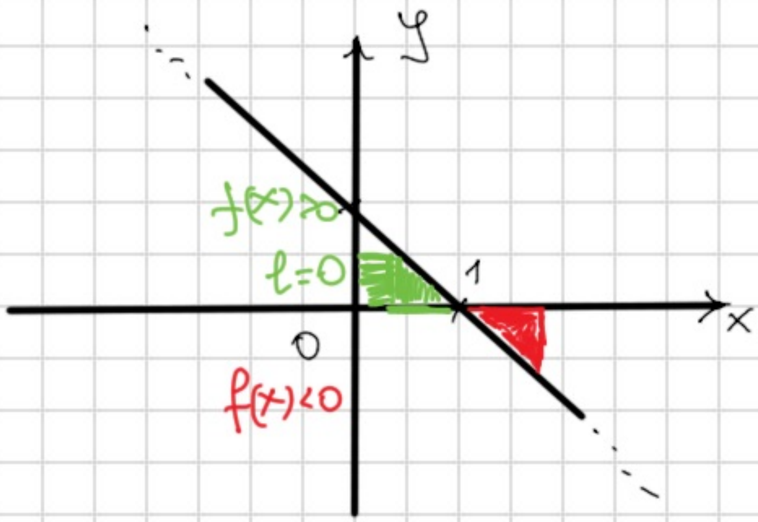
Da cui si ha

$$\ell - |\ell| < f(x) < \ell + |\ell|$$

Se $\ell > 0 \implies 0 < f(x) < 2\ell$

Se $\ell < 0 \implies 2\ell < f(x) < 0$ c.v.d.

Caso di $l = 0$ Il teorema non è valido



$$f(x) = 1 - x$$

I valori assunti dalla funzione $y = 1 - x$ sono sia parte positivi e sia parte negativi in un opportuno intorno del punto $x_0 = 1$.

TEOREMA INVERSO

Se una funzione ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno di x_0, I_{x_0}, escluso al più x_0, è positiva o nulla allora $l \geq 0$; se è negativa o nulla allora $l \leq 0$

Dimostrazione: Per assurdo, sia $l < 0$ allora

$$\exists\, I'_{x_0} \text{ t.c. } f(x) < 0, \quad \forall x \in I_{x_0} \text{ con } x \neq x_0$$

ma, per ipotesi, $f(x)$ è positiva o nulla in I_{x_0}. Ciò significa che per i punti x dell'intorno $I_{x_0} \cap I'_{x_0}$ la funzione assume valori sia positivi che negativi. Ma questo è assurdo!

TEOREMA DI REGOLARITÀ PER CONFRONTO
(dei CARABINIERI)

Siano f, g, h tre funzioni reali

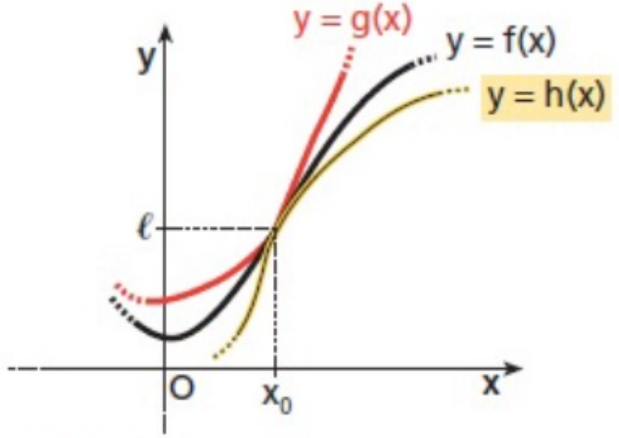
$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Sia x_0 di accumulazione per X. Allora esiste un intorno I_{x_0} t.c.

$$h(x) \le f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in I \cap X, \ x \ne x_0$$

Nell'ipotesi che g e h sono regolari in x_0 ed abbiano lo stesso limite, anche f è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$



$$\left.\begin{array}{l} h(x) \le f(x) \le g(x) \\ \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Dimostrazione

g e h sono dotate di limite in x_0 e tale limite vale ℓ.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I'_{x_0}$ t.c. $|h(x)-\ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I''_{x_0}$ t.c. $|g(x)-\ell| < \varepsilon$

Per hp

$h(x) \le f(x) \le g(x)$

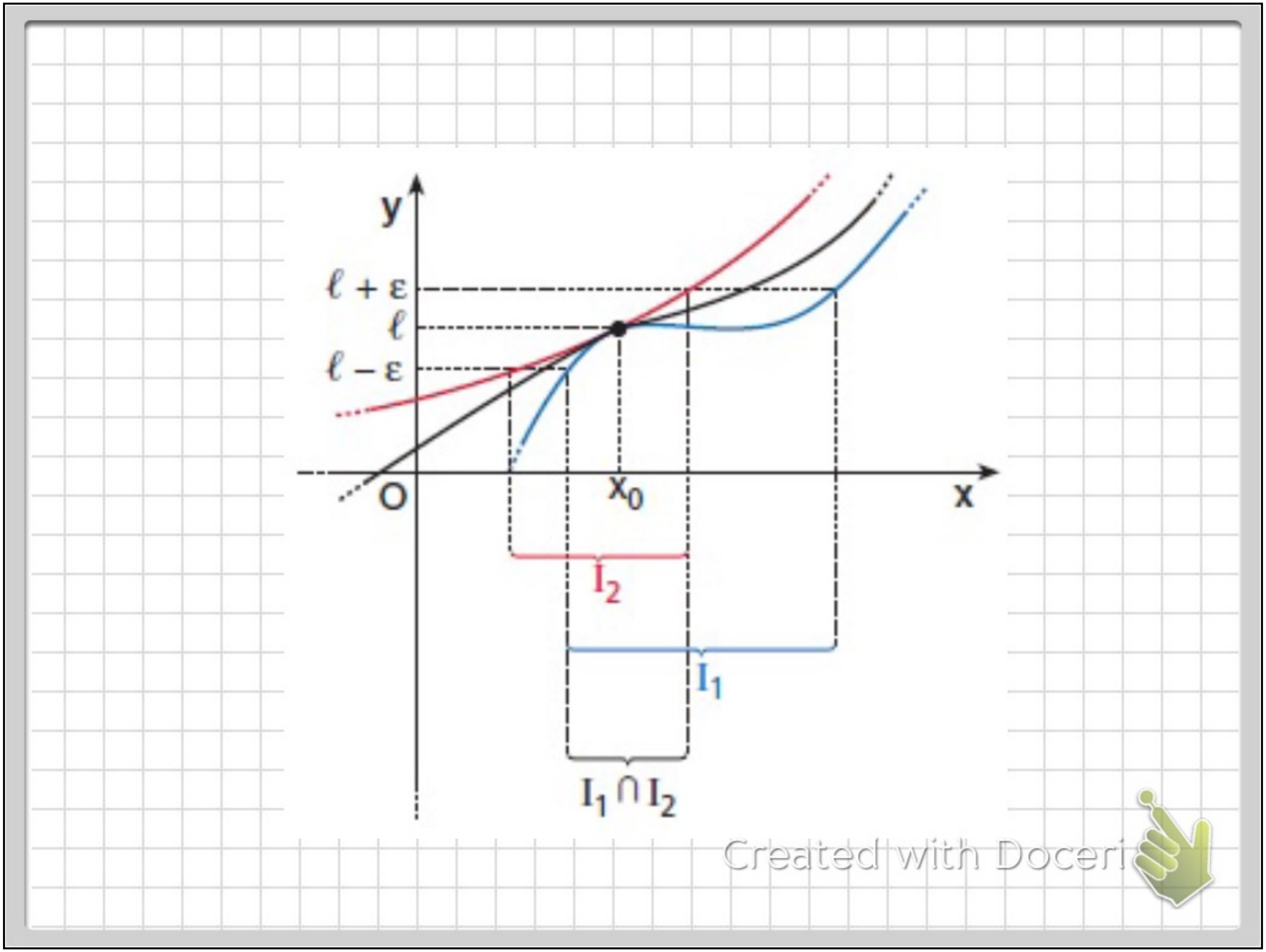
Dunque se

$\ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon$

$\ell-\varepsilon < g(x) < \ell+\varepsilon$

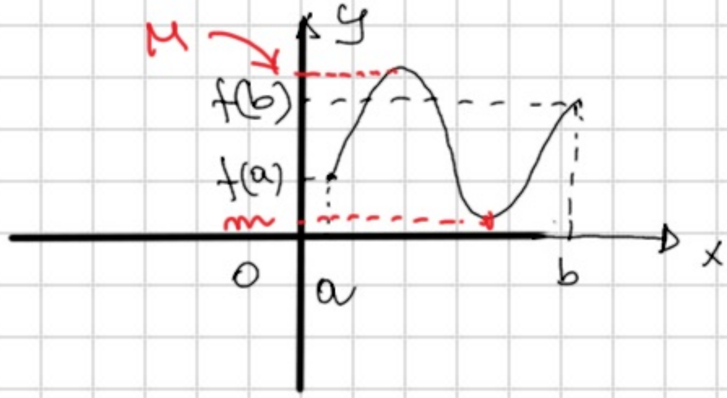
$\Rightarrow \boxed{\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon} \quad \forall x \in I' \cap I''$

$|f(x)-\ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

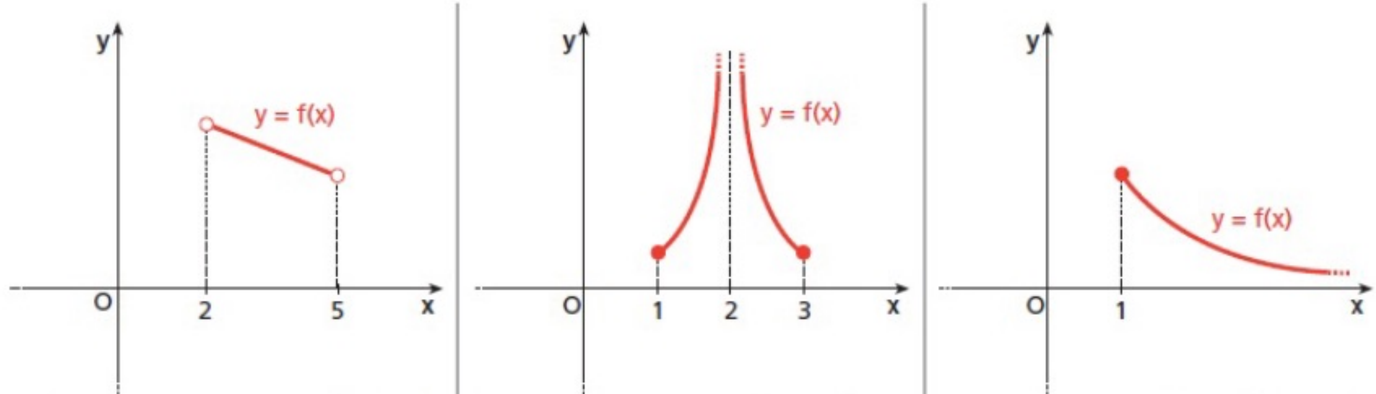

y
ℓ + ε
ℓ
ℓ − ε
O
x_0
x
I_2
I_1
$I_1 \cap I_2$
Created with Doceri

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se una funzione f è continua in un insieme compatto [a, b] ha come codominio un insieme anch'esso compatto e conseguentemente esso è dotato in X di minimo e di massimo.



CASI di NON VALIDITÀ del TEOREMA DI WEIERSTRASS



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto]2; 5[. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.

b. La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo [1; 3] essa assume minimo, ma è priva di massimo.

c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato [1; +∞[. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

STUDIO DI UNA FUNZIONE

1. Insieme di definizione
2. Studio del segno di $f(x)$
3. Intersezione con gli assi
4. Comportamento della funzione agli estremi dell' I.D.

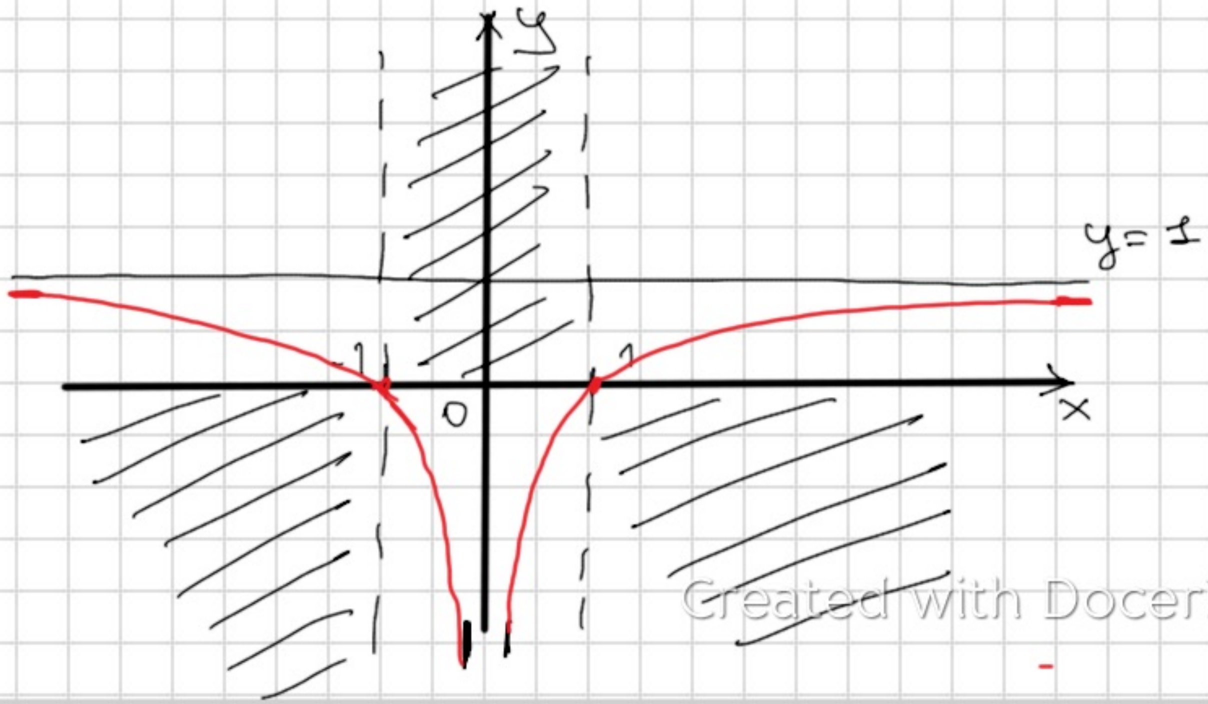
---

5. Proprietà di monotonia della $f(x)$
6. Concavità, convessità e flessi
7. Grafico di $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

I.D. $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

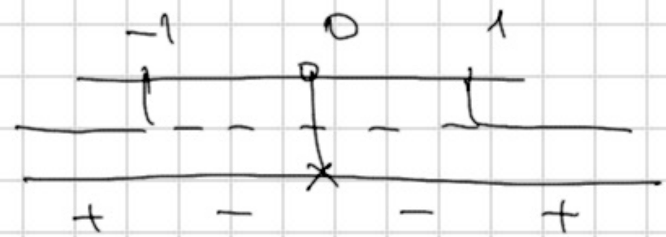
$x \in \left]-\infty ; 0\right[\cup \left]0 ; +\infty\right[$



② Studio del segno di $f(x)$

$f(x) > 0 \qquad \dfrac{x^2-1}{x^2} > 0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2-1 \geq 0 \\ x^2 > 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x < -1 \cup x > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}\right.$



③ Intersezioni con gli assi

$\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} \end{cases} \quad \notin \text{I.D.} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2-1}{\cancel{x^2}} = 0 \end{cases} \quad x = \pm 1$

$A(-1;0) \quad B(1;0)$

④ Comportamento di f agli estremi dell' I D.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = 1$$

N e D sono infiniti dello stesso ordine

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

$\boxed{y = 1}$ ASINTOTO ORIZZONTALE COMPLETO

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2} = -\infty$$

$\boxed{x = 0}$ ASINTOTO VERTICALE COMPLETO

CALCOLO DELL'EVENTUALE ASINTOTO OBLIQUO

$$y = mx + q$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

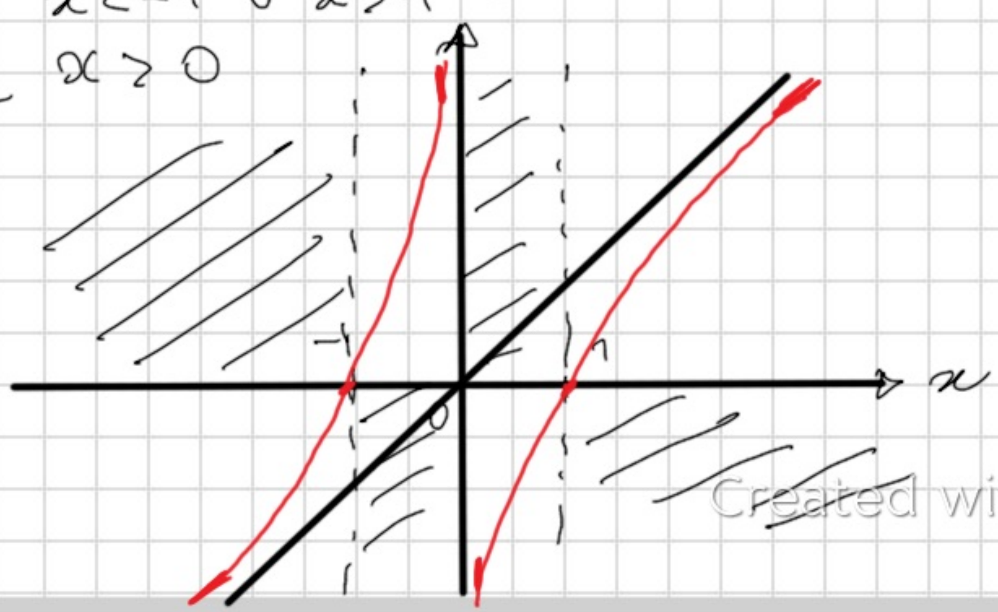
$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

I.D. $x \neq 0$ $\quad \boxed{x \in \,]-\infty;0[\, \cup \,]0;+\infty[}$

STUDIO DEL SEGNO $\quad \dfrac{x^2-1}{x} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \ \cup \ x > 1 \\ x > 0 \end{array}\right.$$



(4) Comportamento di f agli estremi dell' I.D.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ Asintoto verticale completo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$$

CALCOLO DELL' EVENTUALE $\boxed{\text{ASINTOTO OBLIQUO}}$

$y = mx+q$ $\quad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$ $\quad \boxed{Y=X}$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{x} = 0$$

$y = \sqrt{x^2 - 1}$ da fare a casa