lezione del 28-11-2023

ES. n° 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{\sin 3x^8}}{\operatorname{arctg} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{\underbrace{\boxed{\frac{\sin 3x^8}{3x^8}}}_{\to 1} 3x^8}}{\underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}}}_{1} x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{3}\,\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \sqrt[4]{3}$$

ES. n° 2

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x-3} - \sqrt{x^3+3x+5} \quad (= +\infty - \infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x-3} - \sqrt{x^3+3x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-3} + \sqrt{x^3+3x+5}\right)}{\sqrt{x^2+3x-3} + \sqrt{x^3+3x+5}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \cancel{3x} - 3 - (x^3 + \cancel{3x} + 5)}{\sqrt{x^2+3x-3} + \sqrt{x^3+3x+5}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3 + x^2 - 8}{\sqrt{x^2+3x-3} + \sqrt{x^3+3x+5}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = -\infty$$

$\boxed{\text{ES. N° 3}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3x^3 + 3x - 1} + x$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \left[\sqrt[4]{\frac{x^4 + 3x^3 + 3x - 1}{x^4}} + 1 \right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \left[\sqrt[4]{1 + \underbrace{\cancel{\frac{3}{x}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{3}{x^3}}}_{0} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{x^4}}}_{0}} + 1 \right] = -\infty$$

Derivata

XVII secolo

Analisi matematica → Calcolo differenziale

→ Calcolo integrale → antica Grecia

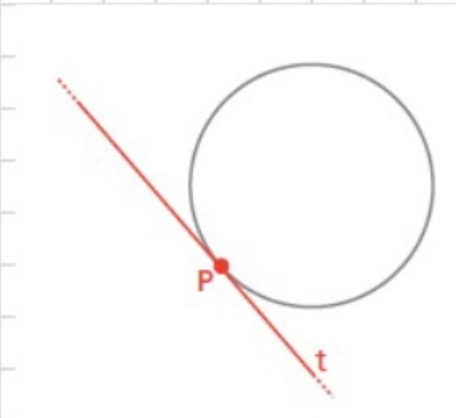
Newton

Leibniz

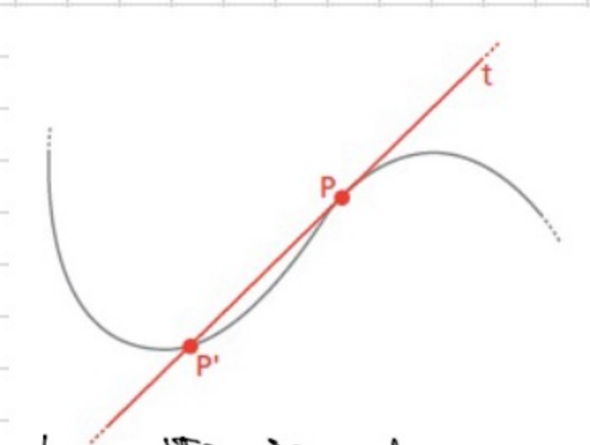
Cauchy

XIX secolo

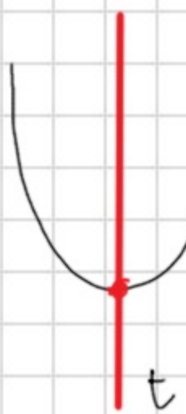
Retta tangente a una curva in un punto ?

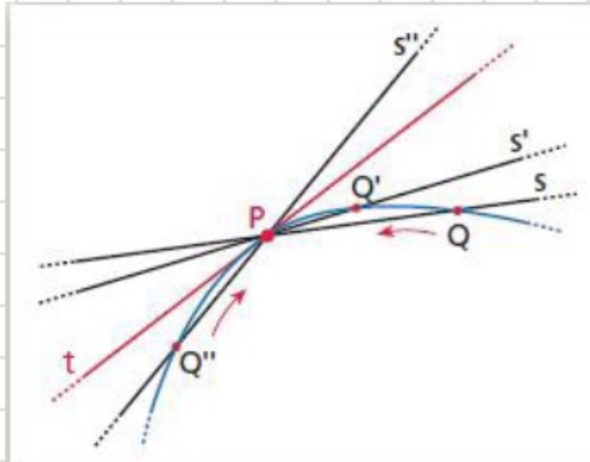


t retta tangente

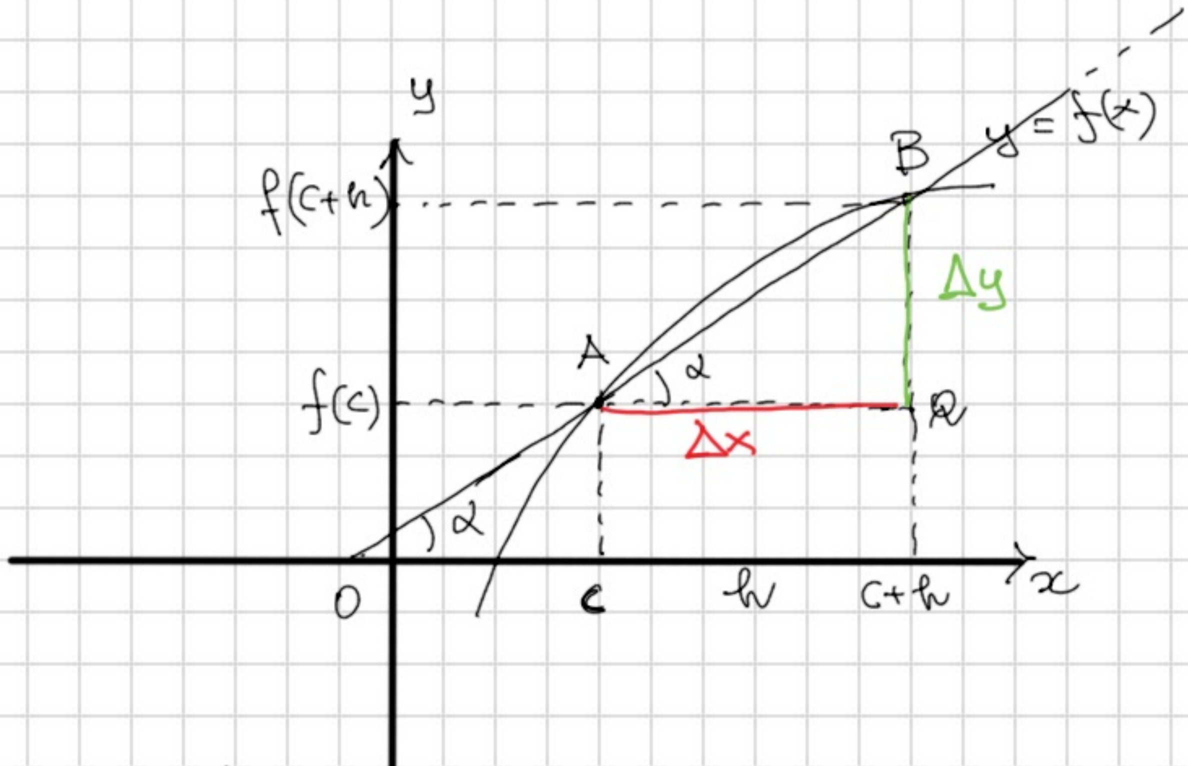


t retta secante





La retta tangente t ad una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della retta secante PQ al tendere di Q a P.



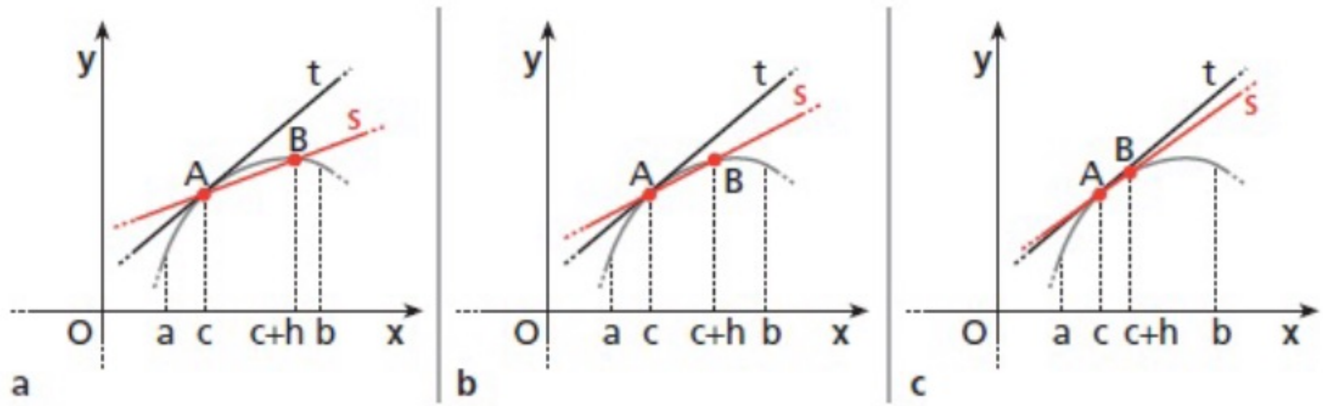
Dato una funzione $y=f(x)$ definita su $[a,b]$. Sia A un punto del grafico della funzione. $A(c, f(c))$
Incrementiamo l'ascissa di A di una quantità h
Otteniamo un altro punto sul grafico $B(c+h, f(c+h))$.

$$\Delta x = x_B - x_A = h$$
$$\Delta y = y_B - y_A = f(c+h) - f(c)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \rightsquigarrow$$ coefficiente angolare della retta secante

Cosa succede man mano che il punto B si avvicina ad A fino a sovrapporsi ad A.



La retta secante per AB diventa tangente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = m$$

Derivata della funzione in un punto c interno ad [a;b]

$f'(x_0)$ Lagrange

$Df(x_0)$ Cauchy

$\dot{f}$ Newton

$\frac{df}{dx}$ Leibnitz $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

derivate parziali

Equazione della retta tangente

Una funzione reale f è derivabile in un punto x_0 del suo insieme di definizione se e solo se il suo diagramma è dotato nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$ di retta tangente non verticale.
Quando una di queste condizioni è soddisfatta, la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente in P_0 al diagramma di f e la tangente ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad P(x_0, y_0)$$

$$y_0 = f(x_0) \qquad m = f'(x_0)$$

Legame tra continuità e derivabilità

Ogni funzione reale derivabile in un punto del suo insieme di definizione è necessariamente continua in quel punto.

Dimostrazione

Sia x_0 il punto in cui f è derivabile, $\forall x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Passando al limite per $x \to x_0$

$$f'(x_0) \cdot 0$$

$$0$$

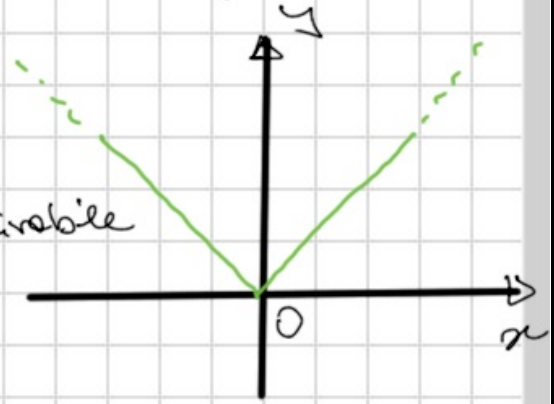
$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ dunque f è continua in x_0

La proposizione inversa non vale

Infatti, una funzione continua in un punto può non essere ivi derivabile

$$f(x) = |x|$$



Nel punto $(0,0)$ questa f. non è derivabile

ma è continua in $(0,0)$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Il limite del rapporto incrementale nel punto $(0,0)$ non esiste

C funzioni continue

D funzioni derivabili

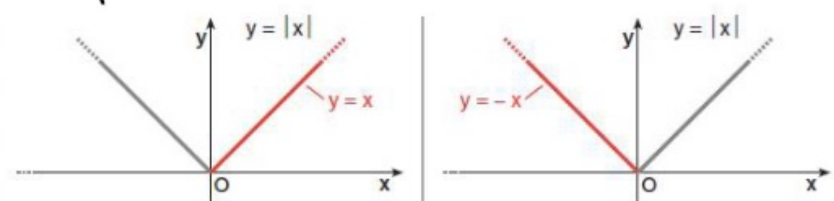
Derivata sinistra e derivata destra

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, sia x_0 un punto di accumulazione a sinistra.
Supposto che esista, finito o no, il limite sinistro in x_0 del rapporto incrementale di f relativo a x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tale limite si chiama derivata sinistra in x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$

Analogamente, per la derivata destra



a. Se consideriamo la funzione a destra di $x = 0$, il suo grafico coincide con la retta $y = x$. Anche la tangente coincide con la retta e il suo coefficiente angolare è 1, quindi $f'_+(0) = 1$.

b. Se consideriamo la funzione a sinistra di $x = 0$, il suo grafico (e quello della tangente) coincide con la retta $y = -x$. Il coefficiente angolare è -1, quindi $f'_-(0) = -1$.

Punti di non derivabilità

Se una funzione f è non derivabile in un punto, possono verificarsi i seguenti 3 casi:

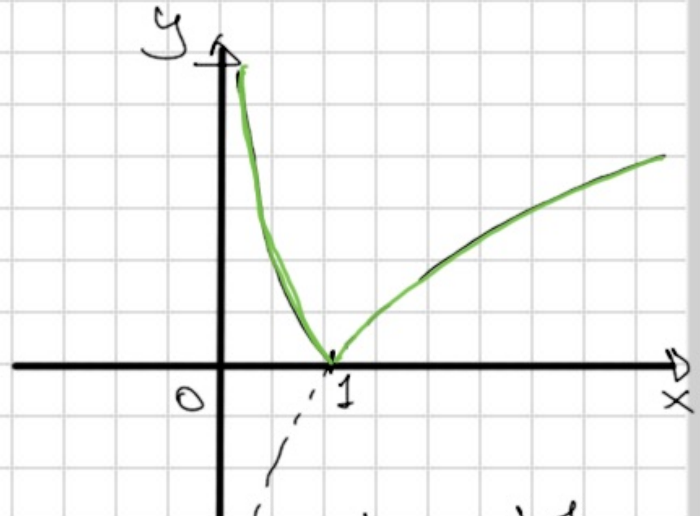
(1) Se la derivata sinistra e la derivata destra in x_0 sono entrambe finite ma diverse, allora x_0 è un punto angoloso.

Esempio: $f(x) = |\ln x|$

$P(1,0)$ è un punto angoloso

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



$\boxed{x_0 = 1}$

$$f'(1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

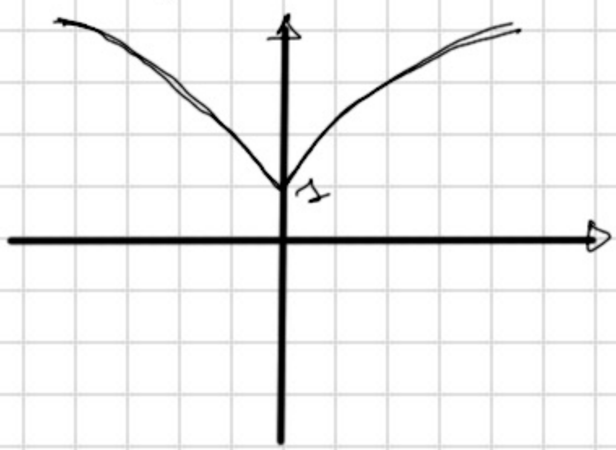
è una discont. di I specie per la derivata prima

(2) Se i limiti sono diversi e tendono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$, allora si ha una cuspide

In particolare, se $f'_-(x_0) = +\infty$ e $f'_+(x_0) = -\infty$ si ha una cuspide rivolta verso il basso

Se la $f'_-(x_0) = -\infty$ e la $f'_+(x_0) = +\infty$ si ha una cuspide rivolta verso l'alto.

Esempio: $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$. Ricordo che si tratta della traslazione lungo y di un vettore di ampiezza 1 della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ detta parabola di Neile.



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty$$

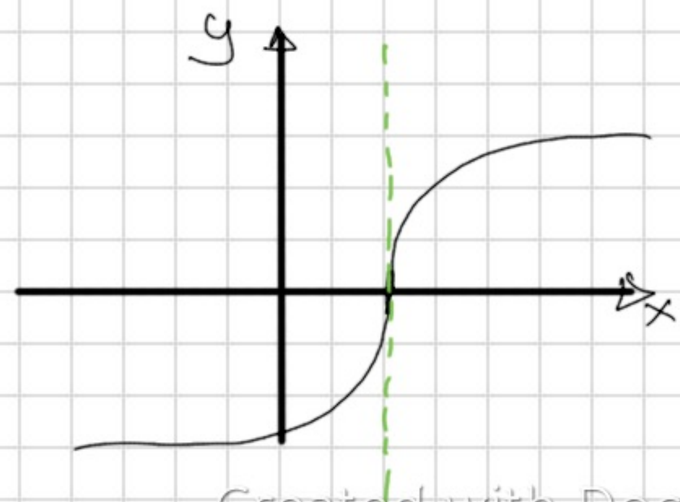
3

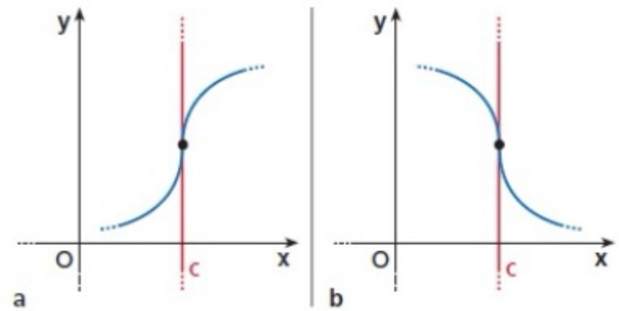
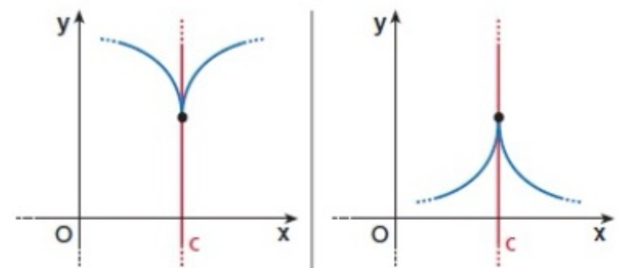
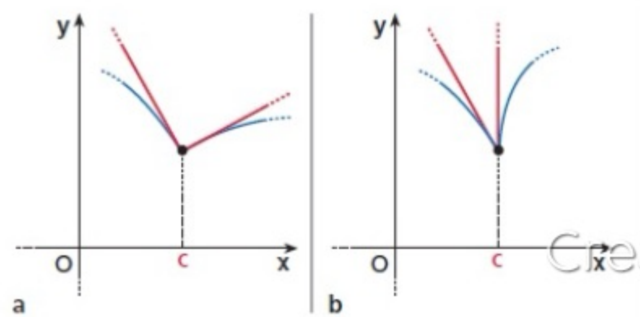
Si ha il flesso a tangente verticale se i limiti sinistro e destro tendono entrambi a $+\infty$ o a $-\infty$.
In particolare,

Se $f'(x_0) = +\infty$ allora x_0 è un flesso a tangente verticale crescente

Se $f'(x_0) = -\infty$ allora x_0 è un flesso a tangente verticale decrescente.

Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$



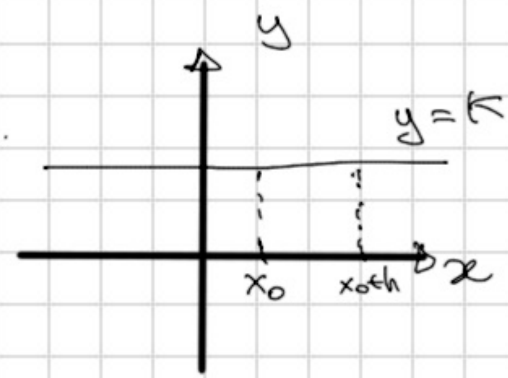
Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale		a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	 a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita

Derivate fondamentali:

- La derivata di una costante è zero.

$$f(x) = K$$

$$f(x+h) = K$$



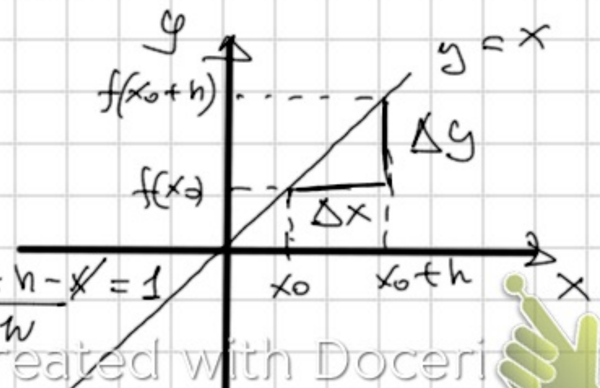
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{K - K}{h} = 0$$

- La derivata di $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$

$$f(x) = x$$

$$f(x+h) = x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = 1$$



La derivata di $f(x)=e^{x}$ è $f'(x)=e^{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x}\cdot e^{h}-e^{x}}{h}=$$

$$f(x)=e^{x}$$

$$f(x+h)=e^{x+h}$$

$$=\lim_{h\to 0} e^{x}\underbrace{\boxed{\left(\frac{e^{h}-1}{h}\right)}}_{1}=e^{x}$$

Operazioni con le derivate

$$D[f(x) \pm g(x)] = Df(x) \pm Dg(x)$$

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$D k = 0$

$D x = 1$

$D x^n = n \cdot x^{n-1}$

$D a^x = a^x \ln a$

$D e^x = e^x$

$D \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

$D \ln x = \frac{1}{x}$

$D \cos x = - \sin x$

$D \sin x = \cos x$

$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$D \operatorname{cotg} x = - \frac{1}{\sin^2 x}$

$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D \frac{1}{x} = - \frac{1}{x^2}$

$D f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

funzione composta

Esempio 1

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\cancel{x-2}}{x-1}\right) \cdot \left[\frac{(\cancel{x}-2) - (\cancel{x}-1)}{(x-2)^{\cancel{2}}}\right]$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

Esempio 2

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$$

NB. $D \ln x = \dfrac{1}{x}$

$$D \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$D e^{x} = e^{x}$$

$$D e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Esempio 3

$$f(x) = \cos(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D \cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$$