Lezione del 01-12-2023

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

Sia f una funzione reale definita nella parte $X \subseteq \mathbb{R}$, si può considerare che essa è crescente oppure decrescente in X (che soddisfa la condizione che $\forall\ (x', x'')$ coppia di punti di X tali che $x' < x''$, si ha che $f(x') \leq f(x'')$ oppure l'altra che $f(x') \geq f(x'')$)
se e solo se verifica rispettivamente la prima o la seconda delle seguenti uguaglianze.

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \geq 0 \qquad\qquad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leq 0$$

per ogni coppia $(x', x'') \in X$ t.c. $x' < x''$.

Se le disuguaglianze sono

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}>0 \qquad \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}<0$$

f è strettamente crescente o strettamente decrescente in X, $\forall (x', x'') \in X$ con $x' < x''$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA MONOTONIA

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$. Allora se f è monotona crescente in X (risp. monotona decrescente in X) necessariamente si ha

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{risp. } f'(x) \leq 0)$$

in ogni punto di X nel quale f sia dotata di derivata.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA MONOTONIA

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ e ivi derivabile. Allora basta che

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{risp. } f'(x) \leq 0) \quad \forall x \in X$$

perché la f sia crescente (risp. decrescente) in X.

CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DI UN MINIMO O DI UN MASSIMO RELATIVO

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per X, nel quale la f sia dotata di derivata sinistra (risp. destra).

Allora

Se f ha in x_0 un minimo relativo, necessariamente si ha

$$f'_-(x_0) \leq 0 \qquad (\text{risp. } f'_+(x_0) \geq 0)$$

Se f ha in x_0 un massimo relativo, necessariamente si ha

$$f'_-(x_0) \geq 0 \qquad (\text{risp. } f'_+(x_0) \leq 0)$$

Conseguentemente se f è derivabile in x_0, sia che abbia un minimo relativo, sia che abbia un massimo relativo, necessariamente

$$f'(x_0) = 0$$

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'ESISTENZA DI UN MASSIMO O MINIMO RELATIVO

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ punto di accumulazione solo a destra e f sia dotata di derivata in x_0, a seconda che si abbia

$$f'(x_0) > 0 \quad \text{oppure} \quad f'(x_0) < 0$$

f ha in x_0 un minimo o un massimo relativo

Lo stesso vale se x_0 è di accumulazione a sinistra.
Se x_0 è di accumulazione per X sia a destra che a sinistra e f è dotata in x_0 di derivata sinistra e destra

Se $f'_-(x_0) > 0$ e $f'_+(x_0) < 0$ f ha un massimo relativo in senso stretto

Se $f'_-(x_0) < 0$ e $f'_+(x_0) > 0$ $\to$ f ha un minimo relativo in senso stretto

CRITERIO DI MONOTONIA

Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$

Allora

$f'(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in \,]a,b[\iff f$ è crescente in $[a,b]$

$f'(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in \,]a,b[\iff f$ è decrescente in $[a,b]$

A proposito di CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

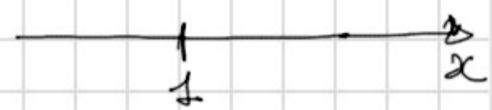
Se f è continua in $x_0 \in X$ non è detto che sia derivabile in x_0

Se f è derivabile in $x_0 \in X$ è anche continua

$$\text{DERIVABILITÀ} \Longrightarrow \text{CONTINUITÀ}$$
$$\not\Longleftarrow$$

ES. 1 Studiare la continuità e la derivabilità in $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



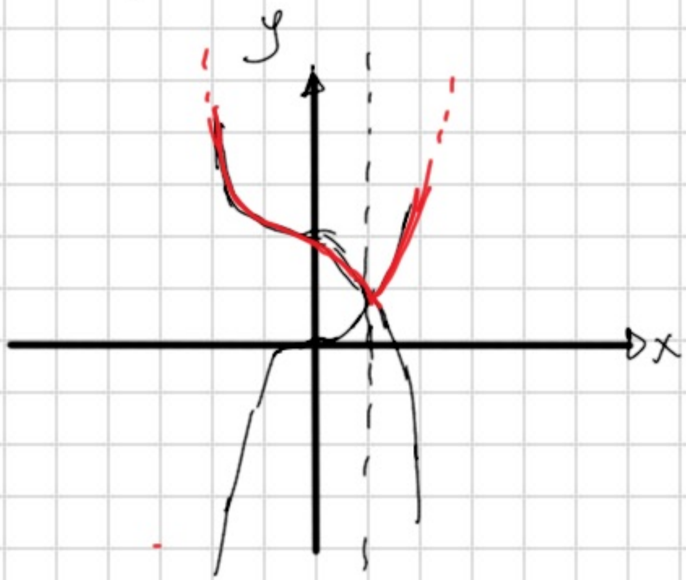
$$\lim_{x \to 1^-} 2 - x^3 = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} x^3 = 1$$

la funzione è continua in $x_0 = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ -3x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f'_-(1) = -3 \qquad f'_+(1) = 3$

la funzione non è derivabile $\quad x_0 = 1$ è un punto angoloso



ES. 2 Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è derivabile nel suo I.E.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} & x < 0 \\ \sqrt{1 + \sin \beta x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\alpha x} = 1$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 + \sin \beta x} = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{\alpha x} & x < 0 \\ \dfrac{\beta \cos \beta x}{2\sqrt{1 + \sin \beta x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \alpha$$

$$f'_+(0) = \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = 2\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\alpha x}-1}{x-0} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\sin\beta x}-1}{x} = \frac{1}{2}\beta$$

$$f(x)=\begin{cases} \alpha \sin(\pi\cdot e^x)+\beta & \text{se } x<0 \\ x^3+x & x\geq 0 \end{cases}$$

Determinare α e $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione sia derivabile in $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-} \alpha\sin(\pi e^x)+\beta = \beta$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^3+x = 0$$

$$\Rightarrow \beta=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha \cos(\pi \cdot e^x) \cdot \pi \cdot e^x & x < 0 \\ 3x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$f'_-(0) = -\alpha\pi$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad -\alpha\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{\pi}$$

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x-2}}$$

I.E. $x-2 \neq 0 \iff x \neq 2$

$x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

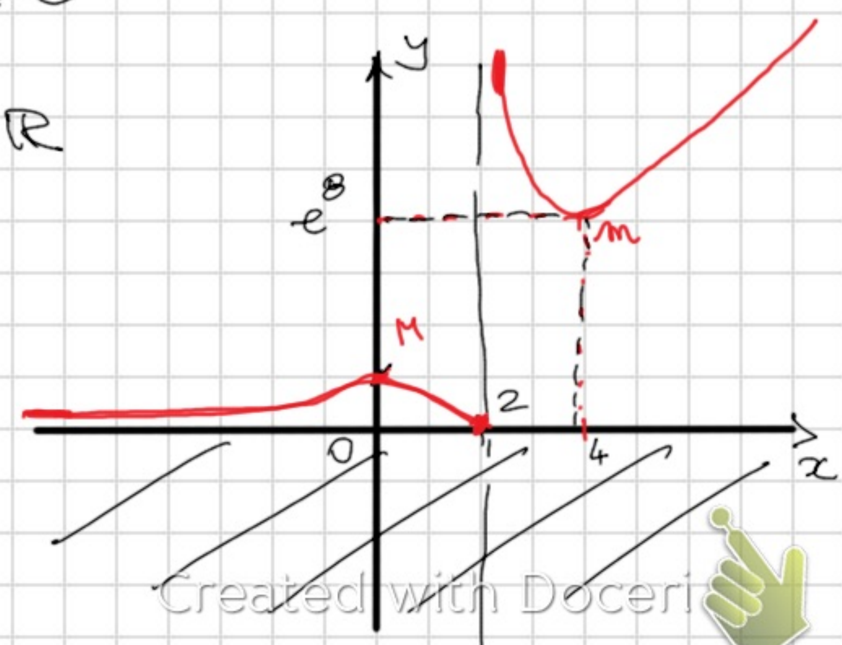
STUDIO DEL SEGNO $f(x) > 0$

$$e^{\frac{x^2}{x-2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Inters. con ASSI

$$\begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x^2}{x-2}} = 0 \end{cases} \quad \text{MAI}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad P(0,1)$$



COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DELL'I.E.

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x^2}{x-2}} = e^{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-2}} = 0$$

$y = 0$ AS. OR. SX

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 2$$

ASINTOTO VERTICALE DESTRO

$$\boxed{\begin{array}{l} De^x = e^x \\ De^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x) \end{array}}$$

PROPRIETÀ DI MONOTONIA

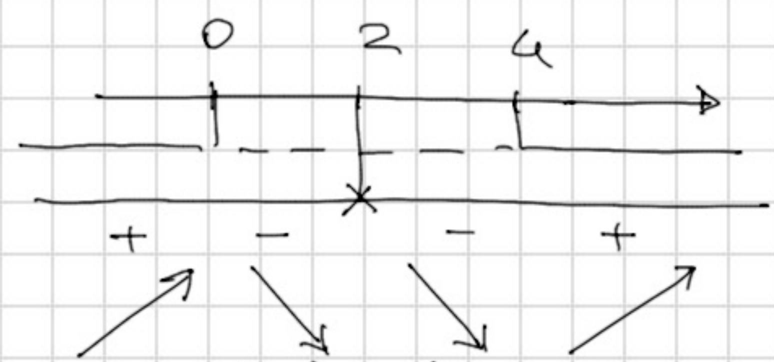
$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-2}} \cdot \left[\frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} \right]$$

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-2}} \cdot \left[\frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} \right] = e^{\frac{x^2}{x-2}} \cdot \frac{(x^2 - 4x)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) > 0$$

$$e^{\frac{x^2}{x-2}}\left[\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right] > 0$$

$$\begin{cases} e^{\frac{x^2}{x-2}} > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2-4x > 0 & x=0 \quad x=4 \qquad x<0 \cup x>4 \\ (x-2)^2 > 0 & \forall x \in \mathbb{R}-\{2\} \end{cases}$$



$x_M = 0 \quad y_M = 1 \quad M(0,1)$ punto di MASSIMO RELATIVO

$x_m = 4 \quad y_m = e^{\cancel{\frac{16}{2}}\,8} \quad m(4, e^8)$ punto di minimo relativo