

## Lezione del 09/01/2024

Dato uno spazio campionario  $U$ , una funzione  $P$  che associa a ogni evento  $E$  dello spazio degli eventi un numero reale detta probabilità se soddisfa i seguenti assiomi:

$$1) P(E) \geq 0$$

$$2) P(U) = 1$$

$$3) \text{ se } E_1 \cap E_2 = \emptyset \text{ allora } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

PROPRIETÀ

$$P(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Created with Doceri



Se gli eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sono una partizione di  $U$   
allora

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1$$

$$P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Created with Doceri



### Esercizio

Presso come sempre in un certo numero di italiani, la probabilità che essi trascorrono le vacanze al mare è 45%, in montagna 27%, sia al mare che in montagna 5%.

- A) Qual è la probabilità che vadano solo al mare?
- B) Qual è la prob. che non vadano in montagna?
- C) non vadano né al mare né in montagna?

A = Andare a mare      B = andare in montagna

$$P(A) = \frac{45}{100} \quad P(B) = \frac{27}{100} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{100}$$

A)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{45}{100} - \frac{5}{100} = \frac{40}{100}$   
40%

$$b) P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,27 = 0,73 = 73\%$$

c)

$$\overline{A \cup B}$$

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - [0,40 + 0,27] = 0,33 = 33\%$$

Created with Doceri



## Somme logica di eventi

Ogni evento è un sottoinsieme dello spazio campionario quindi possiamo utilizzare gli insiemi per definire gli eventi unione e intersezione.

DEFINIZIONE: Dati due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  di uno stesso spazio campionario, l'evento unione o somma logica è l'evento  $E_1 \cup E_2$  che si verifica quando è verificato almeno uno dei due eventi  $E_1$  o  $E_2$ .  
L'evento intersezione o prodotto logico è l'evento  $E_1 \cap E_2$  che si verifica quando sono verificati entrambi gli eventi  $E_1$  ed  $E_2$ .

L'evento unione si chiama anche evento totale

L'evento intersezione si chiama anche evento composto

Created with Doceri



### Esempio

Un'urna contiene 6 palline numerate da 1 a 6.

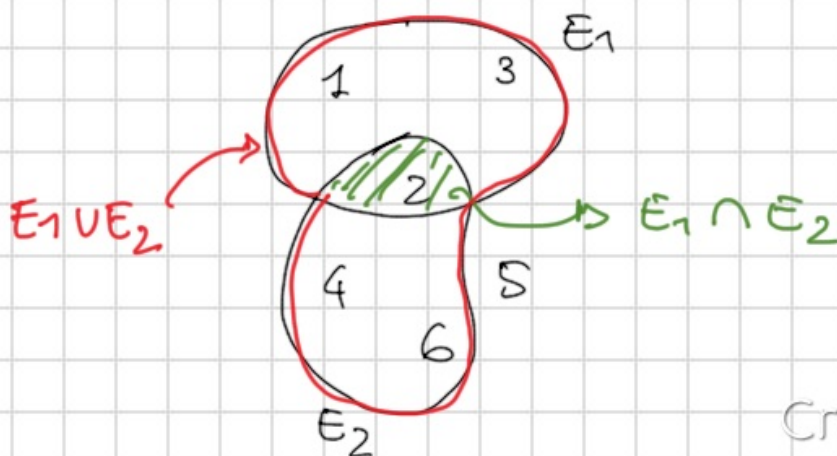
Consideriamo due gli eventi:

$E_1$  = esce un numero minore di 4

$E_2$  = esce un multiplo di 2

$E_1 \cup E_2$  = esce un numero minore di 4 o multiplo di 2

$E_1 \cap E_2$  = esce un numero minore di 4 e multiplo di 2



$$E_1 \cap \bar{E}_2 = \{2\}$$

$$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Created with Doceri

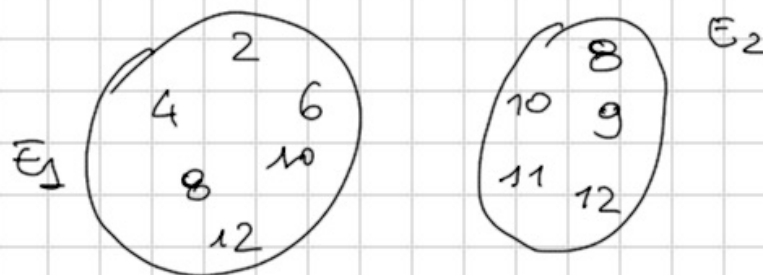


## Eventi Competibili e Incompatibili

Esempio: Un'urna contiene 12 palline numerate da 1 a 12.

$E_1$  = esce un numero pari

$E_2$  = esce un numero maggiore di 7



$E_1$  ed  $E_2$  possono verificarsi contemporaneamente

$$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \quad E_1 \cap E_2 = \{8, 10, 12\}$$

$E_3$  ed  $E_4$  sono incompatibili

$E_3$  = esce il numero 2 ;  $E_4$  = esce il numero 10

$$E_3 \cap E_4 = \emptyset$$

La probabilità della somma logica di due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  è uguale alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Se  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  cioè  $E_1$  ed  $E_2$  sono incompatibili

$$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

(NB)

Due eventi sono indipendenti se e solo se

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Created with Doceri





### ESERCIZIO

In un cassetto, ci sono 12 calzini bianchi e 4 calzini neri.  
Qual è la probabilità di estrarre un paio sporco?

$$P(B) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$P(N) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(N) = \frac{4}{15}$$

La prob. di estrarre prima un calzino bianco e poi uno nero

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5} \quad B + N$$

$$P(N) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{12}{15}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Created with Doceri



La prob. di entrare in ciascuno spazio è

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Con l'ambasciatore cambia la probabilità?

$$\frac{12}{16} \cdot \frac{4^3}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{4}{16} \cdot \frac{12}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Created with Doceri



## Probabilità condizionata

Dati 2 eventi  $E_1$  ed  $E_2$  con  $P(E_1) \neq 0$  si chiama probabilità condizionata di  $E_2$  rispetto a  $E_1$

$$P(E_2|E_1)$$

la probabilità che si verifichi  $E_2$  nell'ipotesi che  $E_1$  si sia verificato.

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

Created with Doceri



## Esercizio 1

Su uno scaffale vi sono 120 scatole, 58 bianche e 62 marroni.

20 scatole bianche e 15 marroni contengono ciascuna un paio di sandali.

Se prendo una scatola marrone, qual è la probabilità che essa contenga un paio di sandali?

$E_1$ : la scatola è marrone

$E_2$ : la scatola contiene un paio di sandali

$$P(E_2|E_1)$$

$P(E_1 \cap E_2)$  = la scatola è marrone e contiene un paio di sandali

$$\begin{aligned} M_F &= 15 \\ M_P &= 120 \end{aligned}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

created with Doceri



$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} \rightarrow \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

$$P(E_1) = \frac{62}{120} = \frac{31}{60}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{60}{31} = \frac{15}{62}$$

Created with Doceri



## Esercizio 2

Estraggo una carta da un mazzo di 52.

L'evento

$$E = \text{esce un re nero}$$

$E_1 = \text{esce una carta nera}$

$E_2 = \text{esce un re}$

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \rightarrow$$

$$\rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \underbrace{P(E_1)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(E_2 | E_1)}_{\frac{2}{26} = \frac{1}{13}} = \frac{1}{26}$$

Created with Doceri



### Esercizio 3

12% dei clienti va di sera

74% dei clienti va in farmacia

Qual è la prob., se gli eventi sono indipendenti, che un cliente usufruisce della farmacia il sabato sera?

$$E_1 = \text{cliente sera} \quad P(E_1) = \frac{12}{100} =$$

$$E_2 = \text{cliente farmacia} \quad P(E_2) = \frac{74}{100}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{12}{100} \cdot \frac{74}{100} = \dots$$

Created with Doceri



### Esercizio 4

Qual è la probabilità che due dadi sommati del lancio di due dadi a sei facce non truccati sia maggiore o uguale di 8?

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$n_p = 36$$

$$n_E = 15$$

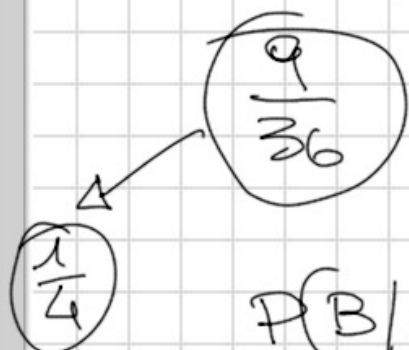
$$P(E) = \frac{15}{36}$$

Created with Doceri





Qual è la probabilità che la somma sia maggiore o uguale a 8 sapendo che il risultato del primo dado è pari



A = dado pari

B = somma maggiore o uguale a 8.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

↳ lancio  
Contemporaneo

Created with Doceri



## ES 5

4 perle nere, 6 perle bianche. Estraccio consecutivamente 3 perle. Qual è la probabilità che le perle siano 2 nere e 1 bianca? (l'estrazione è senza rimborsamento).

$E_1$  = prima estrazione perla nera

$E_2$  = seconda estrazione perla nera

$E_3$  = terza estrazione perla nera

$(n, n, b)$  o  $(n, b, n)$  o  $(b, n, n)$

$$E = (E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

↳ Unione di 3 eventi incompatibili e disgiunti

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) + P(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) + P(\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$$



$$P(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(\bar{E}_3|(E_2 \cap E_1)) = \\ = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8}$$

Ripetere per gli altri 2 addendi

$$P(E) = \frac{3}{10}$$

Created with Doceri



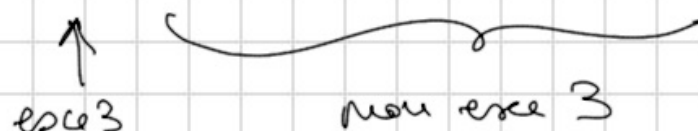
## Problema delle prove ripetute.

Lancio un dado regolare e calcolo la probabilità che in 5 lanci consecutivi la faccia 3 si presenti soltanto la prima volta e non si presenti più nei lanci successivi. Chiamiamo  $E_1$  questo evento.

la prob che esce 3  $P(E) = \frac{1}{6}$

$\bar{E}$  = non esce 3  $P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$$P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5}$$



Se voglio che in 5 lanci consecutivi non esce 3



Created with Doceri

Schema delle prove ripetute (di Bernoulli)

Se  $k$  volte un evento si verifica con ordine diverso

$$P_{k,m} = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$$

$$q = 1 - p$$

$k$  numero di volte che l'evento si verifica

$m-k$  numero di volte che non si verifica

Created with Doceri

