

Corso di Metodologie e Tecnologie per la Didattica della Matematica 2

Roberto Capone
Università di Bari Aldo Moro

www.robortocapone.com
roberto.capone@uniba.it



Contenuti di insegnamento

1. La didattica per competenze della matematica. Il quadro KOM.
2. Unità didattica, unità di apprendimento e loro progettazione. La progettazione per nuclei fondanti e la progettazione secondo l'agenda 2030
3. La valutazione formativa e la valutazione sommativa. La valutazione, le prove Invalsi e le prove OCSE-PISA. Come costruire una rubrica di valutazione.
4. L'insegnamento interdisciplinare della matematica
5. Alcune metodologie per l'insegnamento della matematica (Role Playing, Peer Learning, PLTL, Scrum, PBL, IBSE)

Modalità di verifica dell'apprendimento

È prevista la stesura di una unità di apprendimento su un argomento a scelta del docente, anche con riferimenti interdisciplinari.

Testi di riferimento

Il materiale di studio sarà fornito in pdf durante il corso.
Si consiglia la lettura dei seguenti testi/saggi

E. Morin, La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero, Raffaello Cortina editore, 2000

R. Capone, Valutare per competenze in matematica e fisica, (pdf fornito dal docente)

Cosa vi aspettate da un corso di Didattica della Matematica



Cosa vi aspettate da un corso di Didattica della Matematica

Molti credono che il compito dello studioso di didattica della matematica sia di insegnare ad insegnare

La didattica della matematica negli anni tra il 1950 al 1980 era affidata a dei sedicenti esperti che sembrava volessero insegnare ad insegnare

Attorno alla fine degli anni 70 si ebbe una radicale rivoluzione:

- si chiariranno meglio le relazioni tra insegnamento ed apprendimento
- si comprese più a fondo che l'apprendere non dipende solo dalla disciplina e dalla metodologia di insegnamento ma anche dalla comunicazione e da aspetti sociologici e antropologici
- Si capì che l'idea didattica che aveva sempre dominato e cioè “se insegnerete bene i vostri allievi apprenderanno” non solo era ingenua ma falsa: una pura illusione.



Cosa vi aspettate da un corso di Didattica della Matematica

Didattica A (60-80): come divulgazione di idee, fissando dunque l'attenzione sulla fase dell'insegnamento.

Qui, lo sforzo del didatta è tutto teso a trasformare un discorso specialistico complesso in uno più comprensibile e consono alla natura dell'allievo. Il didatta A è sensibile all'allievo, lo pone al centro della sua attenzione ma la sua azione didattica non è sull'allievo bensì sull'argomento in gioco.

Didattica B (80-00): come epistemologia dell'apprendimento matematico

Cosa vi aspettate da un corso di Didattica della Matematica

L'epistemologia, in una delle mille accezioni possibili, è quel ramo della filosofia che studia come si costituiscono le conoscenze scientifiche di un certo settore specifico.

La didattica B, che si deve a Guy Brousseau, è concepita come ricerca empirica, fissando l'attenzione sulla fase dell'apprendimento ma dal punto di vista dei fondamenti e dunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento.

L'assunto di base è che l'allievo costruisce, in modo attivo, una sua propria conoscenza interagendo con l'ambiente ed organizzando le sue costruzioni mentali. L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende ma non determina tale apprendimento. L'allievo, cioè, non si limita a recepire passivamente la conoscenza ma la rielabora costantemente in maniera autonoma.

Aree di interesse della Didattica della Matematica

1.1: Teaching and learning of number and arithmetic	1.2: Teaching and learning of early algebra
1.3: Teaching and learning of algebra at secondary and tertiary levels	1.4: Teaching and learning of geometry
1.5: Teaching and learning of measurement	1.6: Teaching and learning of probability
1.7: Teaching and learning of statistics	1.8: Teaching and learning of calculus
1.9: Teaching and learning of computational thinking	1.10: Teaching and learning of discrete mathematics
2.1: Mathematics education for students with special learning needs	2.3: Mathematics and creativity; mathematical competitions; mathematical challenge
2.2: Research on mathematical promise and giftedness	2.5: Ethnomathematics and First Nations/Indigenous people's mathematics and mathematics education
2.4: Culture, language and ethnicity in mathematics education	2.6: Mathematics education in under-resourced contexts
3.2: Mathematics education at tertiary level	3.1: Mathematics education at early childhood and primary level

Aree di interesse della Didattica della Matematica

3.3: Problem posing and solving in mathematics education	3.4: Mathematical applications and modelling in mathematics education
3.5: Visualization and embodiment in mathematics education	3.6: Reasoning, argumentation and proof in mathematics education
3.7: The role and the use of technology in the teaching and learning of mathematics at primary and lower secondary levels	3.9: Research on mathematics classroom practice at primary level
3.8: The role and the use of technology in the teaching and learning of mathematics at upper secondary and tertiary level	3.10: Research on mathematics classroom practice at secondary level
3.11: Task design and analysis	3.12: Research and development on textbooks and resources for learning and teaching mathematics
3.14: Research and development in assessment in mathematics education	3.13: Language and communication in the mathematics classroom
3.16: Mathematics and interdisciplinary education/STEM education	3.15: Research and development in testing (national and international) in mathematics education

Aree di interesse della Didattica della Matematica

3.17: E-teaching and learning/blended teaching and learning	3.18: Data science teaching and learning
4.1: Preservice mathematics teacher education for the early childhood/primary level	4.2: Preservice mathematics teacher education for the secondary level
4.4: In-service mathematics teacher education and mathematics teacher professional development for secondary level	4.3: In-service mathematics teacher education and mathematics teacher professional development for primary level
4.5: Knowledge in/for teaching mathematics at primary level	4.6: Knowledge in/for teaching mathematics at secondary level
5.1: Students identity, motivation and attitudes towards mathematics and its study	4.7: Affect, beliefs, and identity of mathematics teachers
5.2: Mathematical literacy	4.8: Knowledge and practice of mathematics teacher educators
5.3: Cognition, learning sciences, and neurosciences in mathematics education	5.5: Social and political dimensions of mathematics education
5.4: The role of the history of mathematics in mathematics education	5.6: Research and development on mathematics curriculum
5.8: Philosophy of mathematics and mathematics education	5.7: Mathematics education in and for work; lifelong mathematics education including adult education

Aree di interesse della Didattica della Matematica

5.10: Methods and methodologies in mathematics education research	5.9: Theories in mathematics education
5.11: International cooperation in mathematics education	5.12: Popularization of mathematics

Come fare una progettazione didattica per competenze

La legge n. 53/2003 all'art 3 ed il d.lgs n. 59/2009 all'art 8 introducono la certificazione delle competenze.

Il DM n. 139/2007 sull'adempimento dell'obbligo di istruzione, all'art 1 indica i saperi e le competenze di base per l'assolvimento dell'obbligo riferiti ai quattro assi culturali: dei linguaggi, matematico, scientifico-tecnologico, storico-sociale.

Alcuni riferimenti normativi

Come fare una progettazione didattica per competenze

Linee guida biennio (Direttiva MIUR 15.07.2010, n. 57: Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici a norma dell'articolo 8, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 88.)
Linee guida secondo biennio e quinto anno (Direttiva MIUR 16.01.2012 n. 4)

La valutazione degli apprendimenti e la certificazione delle competenze ha visto il successivo contributo della legge n. 169/2008 e del DPR n. 122/2009 e della più recente delega prevista della legge 107 art 1 comma 181 lettera i. Quest'ultimo testo è stato approvato nel 2017 e si propone la revisione delle modalità di valutazione e di certificazione delle competenze degli studenti del primo ciclo di istruzione, sottolineando la funzione formativa e di orientamento della valutazione, rivedendo le modalità di svolgimento dell'esame di stato conclusivo del primo e del secondo ciclo.


Alcuni riferimenti normativi

Come fare una progettazione didattica per competenze

Molti altri documenti legislativi hanno e fanno riferimento al tema delle competenze richiamando il paradigma brevemente descritto: i DPR di riordino dei diversi indirizzi di studio degli istituti secondari del 2010; i diversi Accordi Stato Regioni sulla Istruzione e Formazione Professionale; il bilancio delle competenze richiesto ai docenti nell'anno di prova a decorrere dall'Anno Scolastico 2014/2015; la recente costruzione del curriculum dello studente prevista dalla Buona scuola;...

Il lungo elenco potrebbe continuare ma è opportuno soffermarsi sul recente d.lgs n. 62/2017 per la parte attinente il primo ciclo di istruzione, che è entrato in vigore dal primo settembre 2017, a differenza del secondo ciclo, dal primo settembre 2018.

Altri riferimenti normativi



Dal 2018 la progettazione didattica deve tenere conto delle 8 competenze fondamentali per rendere l'alunno il cittadino di domani.

Cosa sono le competenze chiave

Il testo della Raccomandazione Europea definisce la competenza come “comprovata capacità di utilizzare conoscenza, abilità, **capacità** personali, sociali e metodologiche in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale”.

Sono definite “chiave” quelle “di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personale, l’occupabilità, l’inclusione sociale, uno stile di vita sostenibile, una vita fruttuosa in società pacifiche, una gestione della vita attenta alla salute e la cittadinanza attiva”.

Si sviluppano a partire dalla prima infanzia, mediante forme di apprendimento formale e non formale, nei vari contesti, dalla famiglia, alla scuola, al lavoro, e nelle varie forme di socialità.

Cosa sono le competenze

Le definizioni istituzionali (D.M.22/8/2007 n.139) che riprendono i documenti della Comunità Europea (**Quadro di Riferimento Europeo** allegato alla Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18/12/2006) individuano tre aree della competenza:

Competenze cognitive (abilità cognitive)

Competenze funzionali (abilità pratiche e operative)

Competenze sociali (motivazione, capacità di impegno sociale e personale)

In area francofona la triade viene declinata come **sapere, saper fare, saper essere**.

In area anglofona si preferisce parlare di **conoscenze (knowledges), abilità (skills) e attitudini (attitudes)**.



La Scuola per imparare a vivere



Vi insegno a nuotare

- Poniamoci in piedi sul bordo della vasca;
- diamoci una spinta con gli arti posteriori in modo tale che la discesa in acqua sia il più possibile verticale



Vi insegno a nuotare

- Rappresentiamo l'asse simmetrico del corpo in modo tale che al movimento del braccio sinistro corrisponda la spinta della gamba destra e viceversa;
- quando il collo ruota in modo tale che la bocca è al pelo libero dell'acqua bisogna espirare, parallelo deve inspirare



Il naufragar m'è dolce ...

La memoria fonologica è uno straordinario dominio del sistema cognitivo e spesso ci si limita a imparare attraverso prassi verbali messe in memoria ... Col rischio di naufragare



La didattica per competenze

Il quadro teorico

Diverse visioni di «competenza»

Competenza come performance

Visione di chi concepisce la competenza come performance, quindi come un requisito relativo al piano organizzativo e non alla persona, e tende a costruire “dizionari di competenze” di matrice neo-tayloristica (più evidente nell’approccio britannico)

Competenza come somma di parti

Visione di chi concepisce la competenza come una somma di parti (conoscenze, abilità, capacità) e, quindi, pone a oggetto di cura i frammenti (conoscenze, abilità, capacità) e non il tutto:

OCDE, Le Boterf

Visione di chi concepisce la competenza come l’atto della mobilitazione efficace della persona di fronte a problemi

Diverse visioni di «competenza»

La competenza [può essere concepita] come un insieme articolato di elementi: le capacità, le conoscenze, le esperienze finalizzate. La capacità in termini generali può essere definita come la dotazione personale che permette di eseguire con successo una determinata prestazione, quindi la possibilità di riuscita nell'esecuzione di un compito o, in termini più vasti, di una prestazione lavorativa. L'esperienza finalizzata consiste nell'aver sperimentato particolari attività lavorative, o anche extralavorative, che hanno consentito di esercitare, provare, esprimere le capacità e le conoscenze possedute dalla persona. (W. Levati, M. Saraò, *Il modello delle competenze*, Franco Angeli, Milano 1998)



Diverse visioni di «competenza»

La competenza non è uno stato od una conoscenza posseduta. Non è riducibile né a un sapere, né a ciò che si è acquisito con la formazione. [...] La competenza non risiede nelle risorse (conoscenze, capacità) da mobilitare, ma nella mobilitazione stessa di queste risorse. [...]. Qualunque competenza è finalizzata (o funzionale) e contestualizzata: essa non può dunque essere separata dalle proprie condizioni di “messa in opera”. [...] La competenza è un saper agire (o reagire) riconosciuto. Qualunque competenza, per esistere, necessita del giudizio altrui.
G. Le Boterf, *De la compétence*, Les éditions de l'Organisation, Paris 1994



*La competenza può essere definita come un sistema coordinato di conoscenze e abilità che sono mobilitate dal soggetto in relazione ad uno scopo (un compito, un insieme di compiti o un'azione) **che lo interessano** e che **favoriscono buone disposizioni interne motivazionali e affettive***
(Pellerey, 2003)



Diverse visioni di «competenza»

(Le competenze) non possono ridursi ad una sola disciplina; esse suppongono e creano delle connessioni tra conoscenze e suggeriscono nuovi usi e nuove padronanze, il che significa che “le competenze generano competenze”

(D'Amore, 2000)



L'idea è di fornire dei contenuti spendibili fuori dal mondo della scuola, nella vita quotidiana, da “cittadini” più che da “studenti”.... Le competenze devono costituire un bagaglio (non tanto di nozioni, quanto delle abilità di risolvere situazioni problematiche, sapendo scegliere risorse, strategie e ragionamenti) per il cittadino»; si tratta quindi di individuare degli importanti contenuti che costituiscono il cuore fondante, il nucleo attorno al quale ruotano altri contenuti.

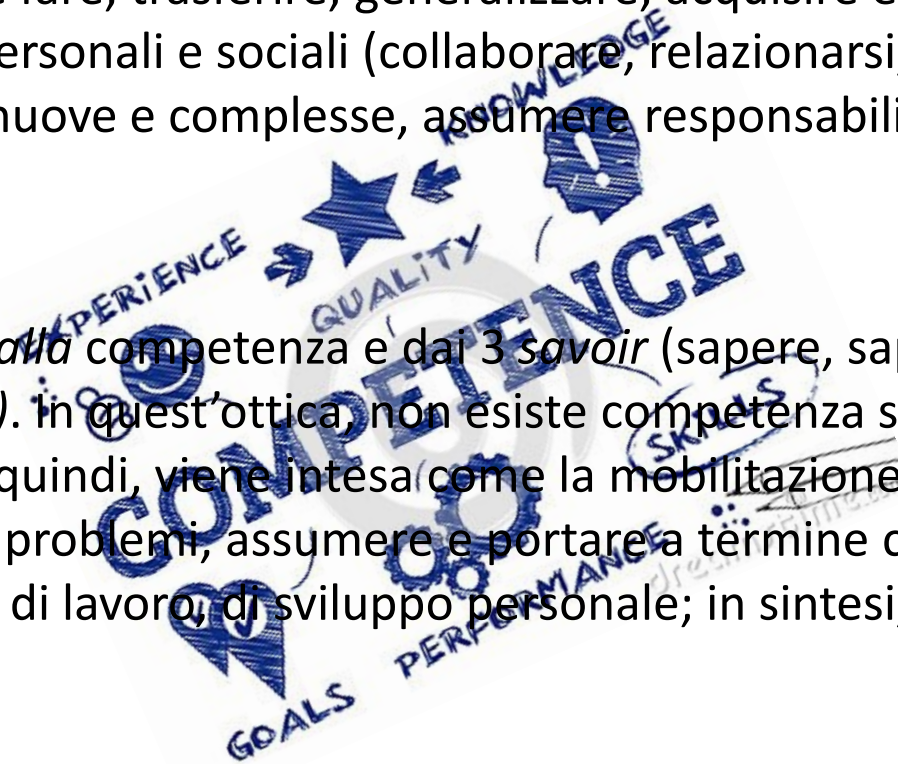
(Arzarello, 2002)



Dalle competenze alla competenza

La competenza è una integrazione di conoscenze (sapere), abilità (saper fare), capacità metacognitive e metodologiche (sapere come fare, trasferire, generalizzare, acquisire e organizzare informazioni, risolvere problemi), capacità personali e sociali (collaborare, relazionarsi, assumere iniziative, affrontare e gestire situazioni nuove e complesse, assumere responsabilità personali e sociali)

Il passaggio *dalle* competenze *alla* competenza e dai 3 *savoir* (sapere, saper fare e saper essere) all'unico *saper agire (e reagire)*. In quest'ottica, non esiste competenza senza la co-presenza di tutti questi fattori. La competenza, quindi, viene intesa come la mobilitazione di conoscenze, abilità e risorse personali, per risolvere problemi, assumere e portare a termine compiti in contesti professionali, sociali, di studio, di lavoro, di sviluppo personale; in sintesi, cioè, un "sapere agito"



Il substrato culturale

"Dov'è la conoscenza che perdiamo nell'informazione? Dov'è la saggezza che perdiamo nella conoscenza?"

ELIOT

"Dunque, poiché tutte le cose sono causate e causanti, aiutate ed adiuvanti, mediate ed immediate, e tutte sono legate da un vincolo naturale e insensibile che unisce le più lantane e le più disparate, ritengo che sia impossibile conoscere le parti senza conoscere il tutto, così come è impossibile conoscere il tutto senza conoscere il tutto?"

PASCAL

"E' meglio una testa ben fatta che una testa ben piena«

MONTAIGNE



Le missioni dell'educazione per Morin

Attitudine ad organizzare la conoscenza

Insegnamento della condizione umana

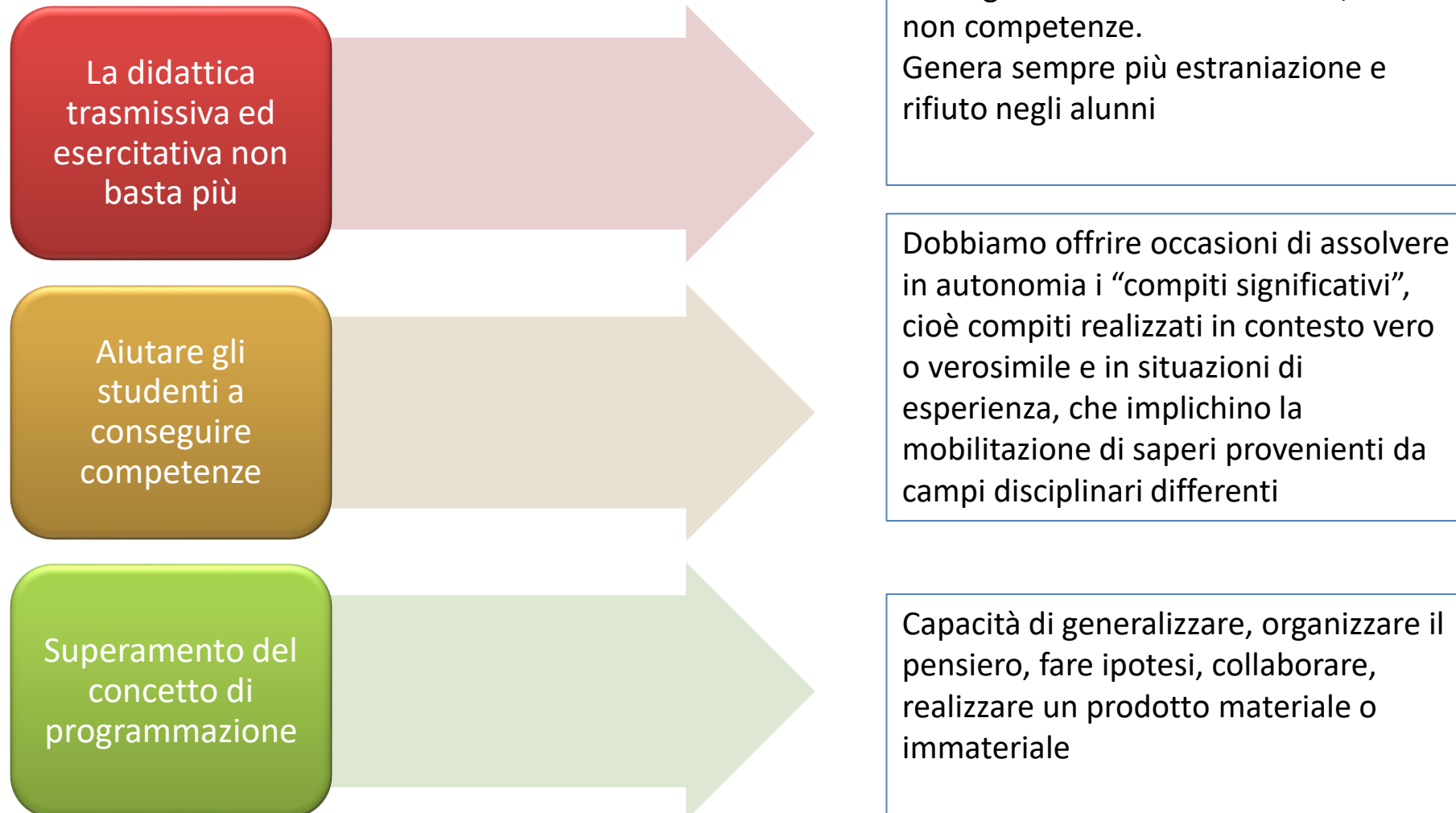
Apprendistato alla vita

Apprendistato all'incertezza

Educazione alla cittadinanza nazionale, europea e planetaria

La Didattica per competenze

Come realizzare la didattica per competenze



La Didattica per competenze

Strategie, tecniche, strumenti didattici per costruire competenze

La didattica tradizionale, basata prevalentemente sull'azione del docente, sulla trasmissione di conoscenze e sull'esercizio di procedure, permette di conseguire al massimo delle buone abilità.

La competenza, invece, si vede e si apprezza in situazione, come “sapere agito”, capacità di reagire alle sollecitazioni offerte dall'esperienza, mobilitando tutte le proprie risorse cognitive, pratiche, sociali, metodologiche, personali.

Accanto alle lezioni, alle esercitazioni, al consolidamento di procedure, che pure non vanno certo eliminati, è necessario prevedere discussioni, lavori in gruppo, studio di casi, soluzioni di problemi di esperienza, presa di decisioni, realizzazione di compiti significativi.

La Didattica per competenze

~~Cognitismo~~

Costruttivismo

Costruzionismo

Cognitismo

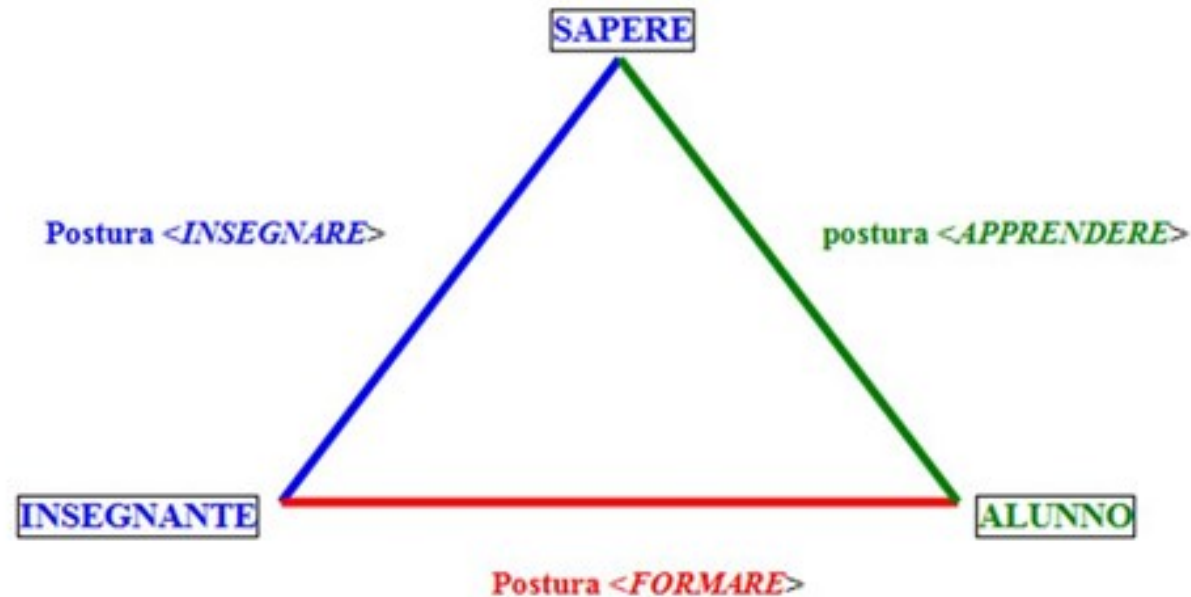
Costruttivismo

Costruzionismo

Enattivismo (Costruttivismo + Embodied)

Parafrasando Kant

Così come un liquido assume la forma del contenitore che lo contiene, il concetto assume la caratteristica di chi se lo sta costruendo. Dunque il concetto viene decostruito nella sua apparente obiettività e viene ricostruito adattandolo alla singola persona. (D'Amore)

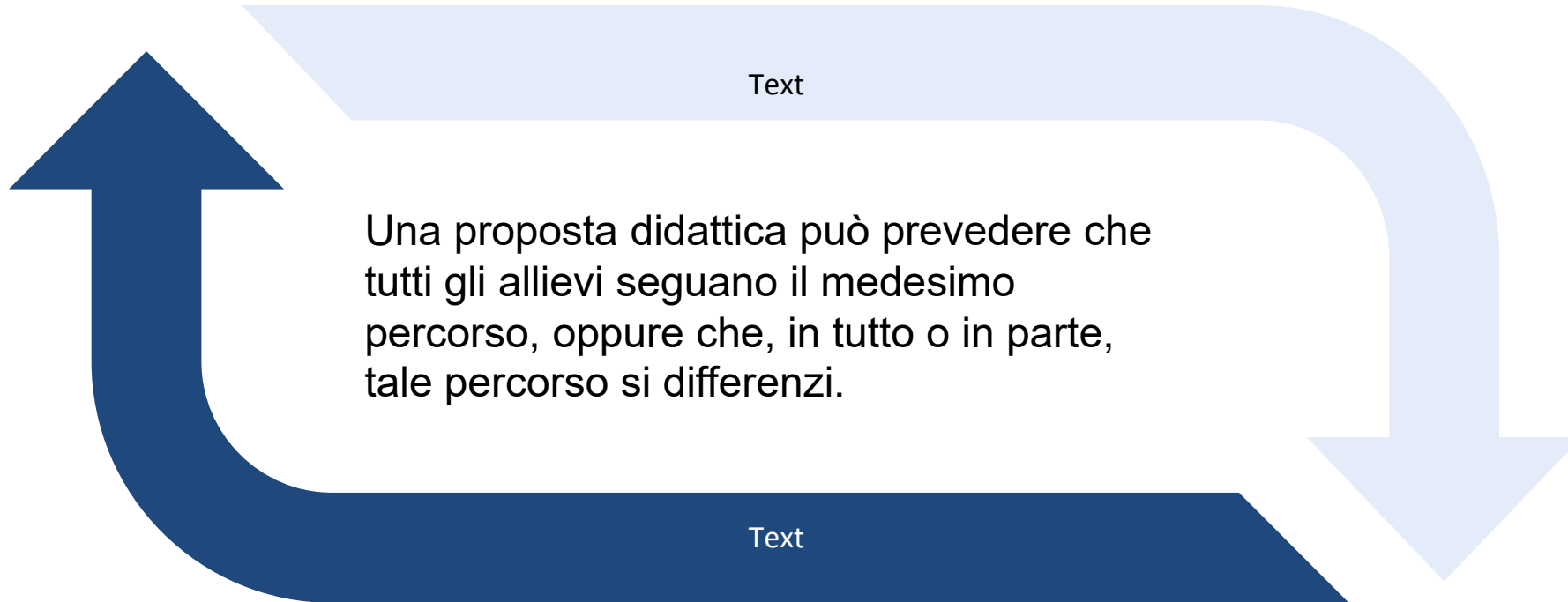


La relazione più significativa fra i tre “vertici” di quel triangolo è proprio quella umana, non si può ridurre a una metodologia miracolosa. (Houssaye)

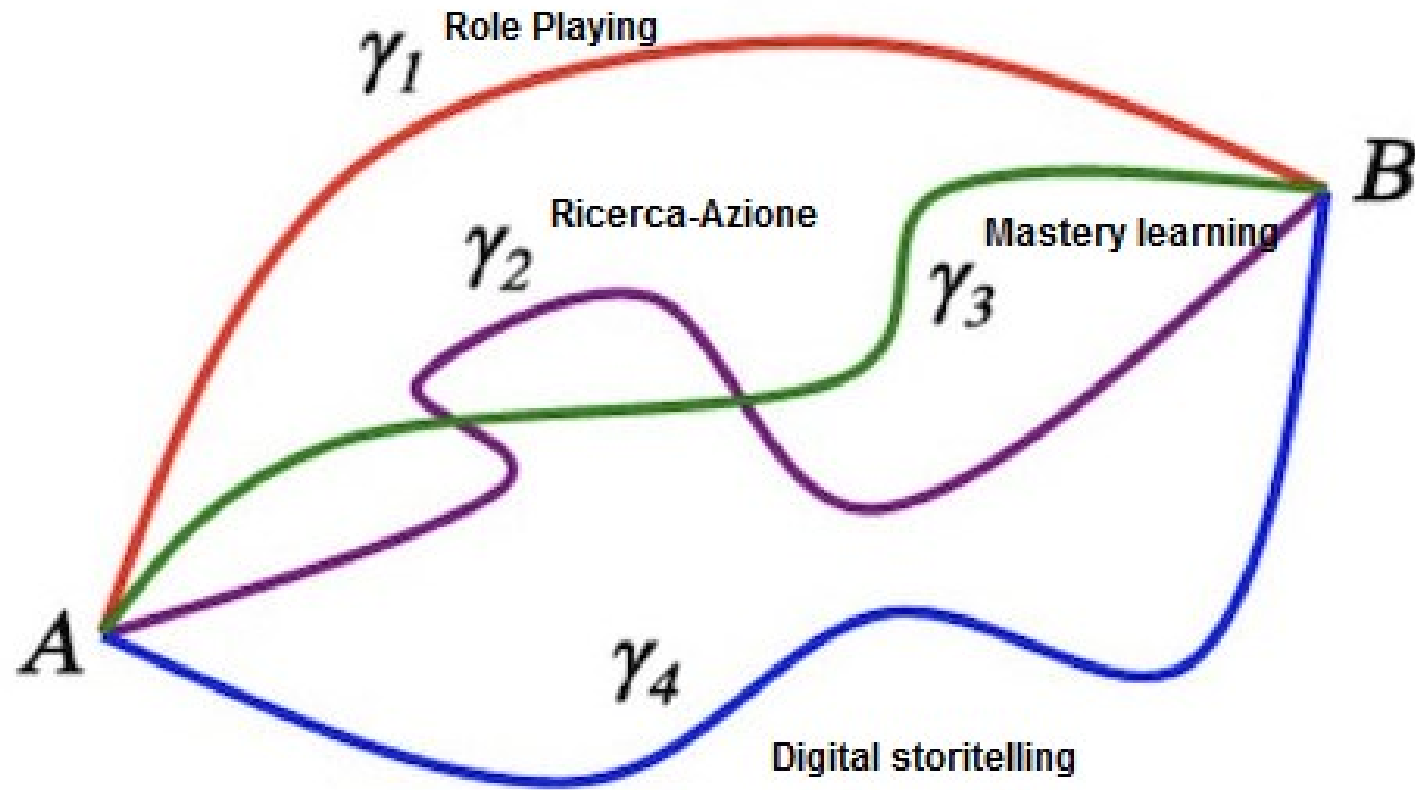
Omnia Omnibus Omnino



La Didattica «Conservativa»



La Didattica «Conservativa»



Lo sapevate che impariamo ...



- **10%** di ciò che leggiamo
- **20%** di ciò che ascoltiamo
- **30%** di ciò che vediamo
- **50%** di ciò che vediamo e sentiamo
- **70%** di ciò che discutiamo con gli altri
- **80%** di ciò che abbiamo esperienza diretta
- **95%** di ciò che spieghiamo ad altri

La Didattica per competenze



Role Playing

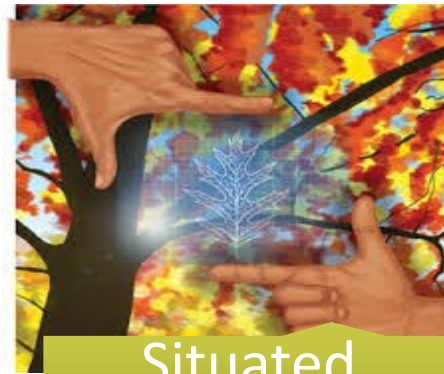


Ricerca-
Azione



DIGITAL STORYTELLING

Digital
Storytelling



Situated
learning

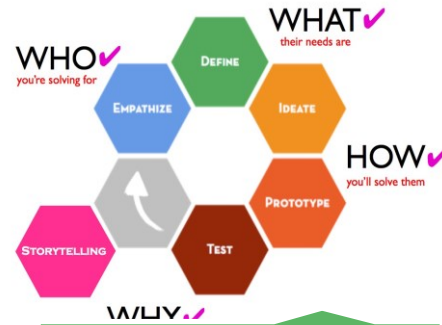


Brainstorming

La Didattica per competenze



Scrum



Design thinking



APS (applied problem solving)



Flipped teaching



IBSE

La Didattica per competenze

Lavorare con le emozioni

Tutti i processi di apprendimento sono al tempo stesso cognitivi ed emotivi

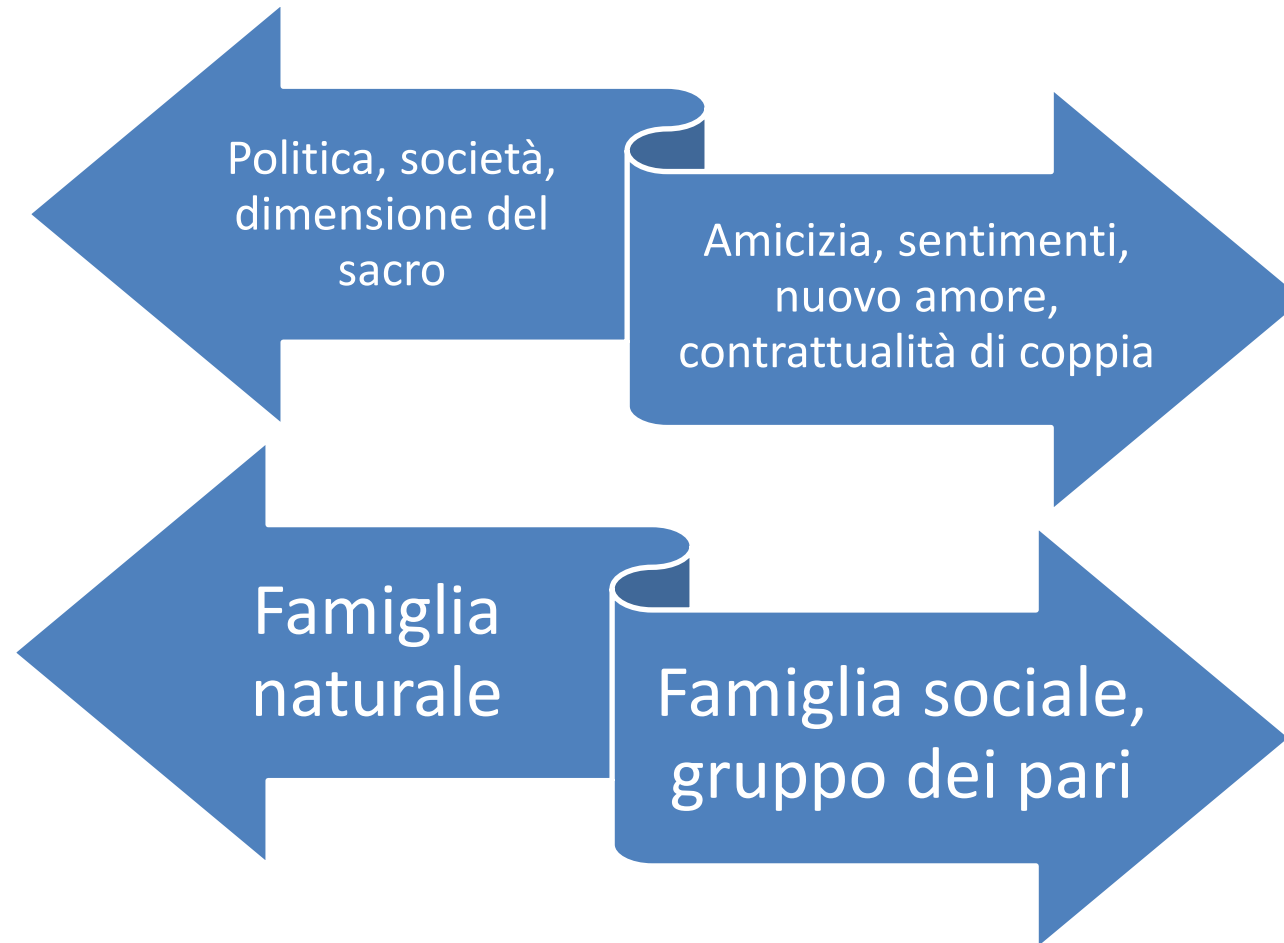
Un approccio didattico che consideri sia la componente emotiva che la metacognitiva incentiva la motivazione all'apprendimento e favorisce il self empowerment, cioè aumento del potere interno alla persona

*La Competenza è la Capacità di far fronte ad un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie **risorse** interne, cognitive, **affettive** e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo. (Pellerey, 1983)*

Gli esseri umani pensano, provano sentimenti e agiscono e questi tre fattori si combinano per dare significato all'esperienza. Una educazione vincente non deve concentrarsi esclusivamente sui fattori cognitivi ma considerare anche i sentimenti e le azioni individuali. Vanno prese in considerazione tra forme di apprendimento: l'apprendimento cognitivo, l'apprendimento emotivo e l'apprendimento psicomotorio (Novak, 2001)

La Didattica per competenze

Gli studenti sono molto propensi a studiare criticamente i processi che li riguardano sviluppando capacità autoscopiche.



Amano affrontare certi temi non in seno alla famiglia naturale ma alla famiglia sociale che assume la funzione di superpotenza educativa e affettiva che li influenza nel modo di pensare, di agire e di comportarsi

Inquiry-Based Mathematics Education

Jean-Luc Dorier & Katja Maass (2020)

Mathematical Competencies in the digital area

Mathematical Competencies in the digital area

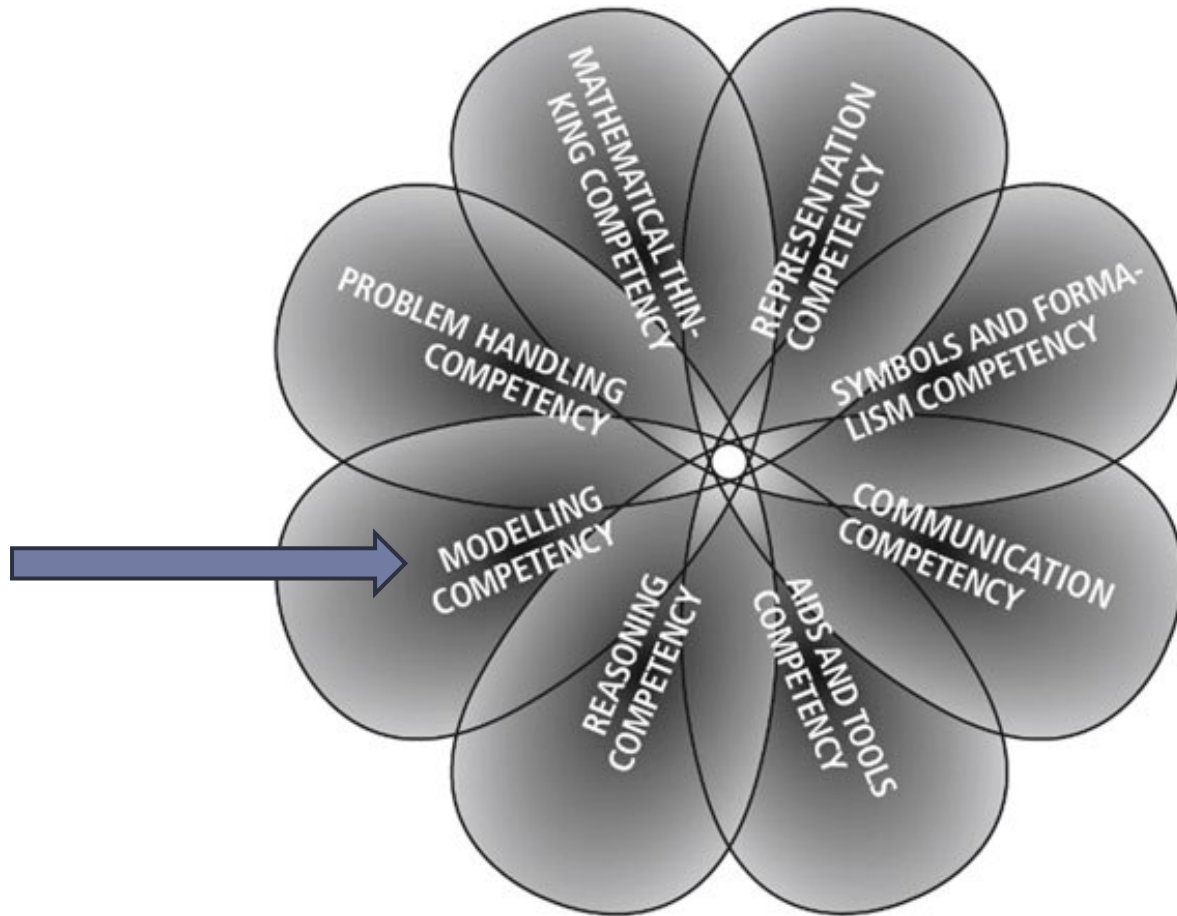
Nel quadro KOM questo è concettualizzato in termini di otto competenze matematiche (al plurale), sulla base della seguente definizione:

Una competenza matematica è la prontezza perspicace di qualcuno ad agire in modo appropriato in risposta a un tipo specifico di sfida matematica in determinate situazioni. (Niss & Højgaard, 2019, p. 14)

Nel quadro sono identificate otto diverse competenze e le corrispondenti sfide (per ulteriori dettagli, si veda Niss & Højgaard, 2019).

I primi quattro tentano di approfondire cosa significhi porre e rispondere a domande in e per mezzo della matematica (Niss & Højgaard, 2019, pp. 15-16).

Mathematical Competencies in the digital area



*Competenza di modellizzazione
matematica:*

*analisi e costruzione di modelli
matematici.*

*La capacità di costruire modelli
matematici per affrontare questioni,
contesti e situazioni extra-
matematiche, nonché la capacità di
analizzare e valutare criticamente
modelli esistenti o proposti.*

Mathematical Competencies in the digital area

Mathematical thinking competency—engaging in mathematical enquiry:

La capacità di relazionarsi e porre i tipi di domande generiche che sono caratteristiche della matematica e si riferiscono ai tipi di risposte che ci si può aspettare a tali domande. La competenza include anche la capacità di relazionarsi con il diverso ambito dei concetti e dei termini matematici e con le diverse categorie di enunciati matematici, nonché con la natura e i ruoli dell'astrazione e della generalizzazione.

Mathematical problem handling competency—posing and solving mathematical problems:

La capacità di porre (incluso identificare, specificare e formulare) e di risolvere diversi tipi di problemi matematici. Ciò comporta la capacità di ideare e implementare strategie di soluzione. La competenza comprende anche la capacità di analizzare criticamente e valutare i tentativi di soluzione dei problemi.

Competenza di ragionamento matematico: valutazione e produzione di giustificazione di affermazioni matematiche.

La capacità di analizzare o produrre argomentazioni scritte o orali (catene di affermazioni collegate da inferenze) avanzate per giustificare affermazioni matematiche.

Mathematical Competencies in the digital area

Porre e rispondere a domande in e per mezzo della matematica richiede la capacità di gestire il linguaggio, i costrutti e gli strumenti della matematica, che è concettualizzata in termini delle seguenti quattro competenze (Niss & Højgaard, 2019, pp. 17-18):

Competenza nella rappresentazione matematica: La capacità di interpretare, tradurre, spostarsi, scegliere tra e impiegare vari tipi di rappresentazioni matematiche (verbali, materiali, simboliche, tabulari, grafiche, diagrammatiche, visive), nonché la capacità di relazionarsi con gli usi, gli scopi e i limiti di tali rappresentazioni.

Simboli matematici e formalismo competenza - gestione dei simboli matematici e dei formalismi: La capacità di relazionarsi e trattare con i simboli matematici, le espressioni simboliche e le trasformazioni, nonché con le regole e i formalismi che li governano. Questa capacità ha un lato ricettivo - decodificare, interpretare e valutare espressioni e trasformazioni simboliche esistenti - così come un lato costruttivo - introdurre e impiegare simboli e formalismi nell'affrontare contesti e situazioni matematiche.

Mathematical Competencies in the digital area

Competenza di comunicazione matematica: comunicare in, con e sulla matematica:

la capacità di impegnarsi in diversi tipi di comunicazione matematica scritta, orale, visiva o gestuale, sia come destinatario e interprete della comunicazione matematica di altri sia come comunicatore attivo e produttivo.

Competenza in materia di ausili e strumenti matematici: gestione di ausili materiali e strumenti per l'attività matematica:

La capacità di trattare ausili materiali e strumenti (oggetti fisici o strumenti, carte o grafici speciali e tecnologie digitali) progettati per facilitare il lavoro matematico. Ciò include l'analisi critica e l'impiego riflessivo di tali ausili e strumenti nell'attività matematica, prestando attenzione alle loro affordances e limiti.

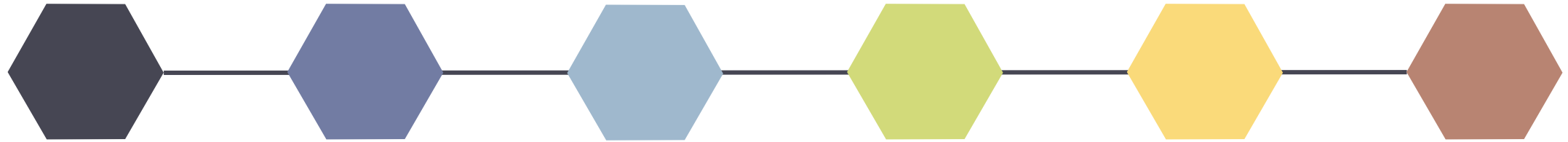
Tornando al Mathematical Modelling

Qui ci concentriamo su un quadro teorico in particolare.

Il suo fulcro è il cosiddetto ciclo di modellizzazione, che consiste nelle fasi concettualmente necessarie per la costruzione di qualsiasi modello matematico, tipicamente rappresentato da un diagramma (Niss & Blum, 2020).

Sono in uso diverse varianti del ciclo di modellizzazione. Esse si differenziano principalmente per il grado di dettaglio di alcune fasi del processo di modellazione rispetto ad altre, ma sono tutte derivate dallo stesso ciclo di modellazione di base:

Ciclo di modellizzazione



Strutturare e analizzare una situazione appartenente a qualche dominio extra-matematico.

Matematizzare la situazione, cioè tradurre oggetti selezionati (e relazioni tra di essi) e domande su di essi dalla situazione extra-matematica in oggetti, relazioni e domande appartenenti a qualche dominio matematico scelto.

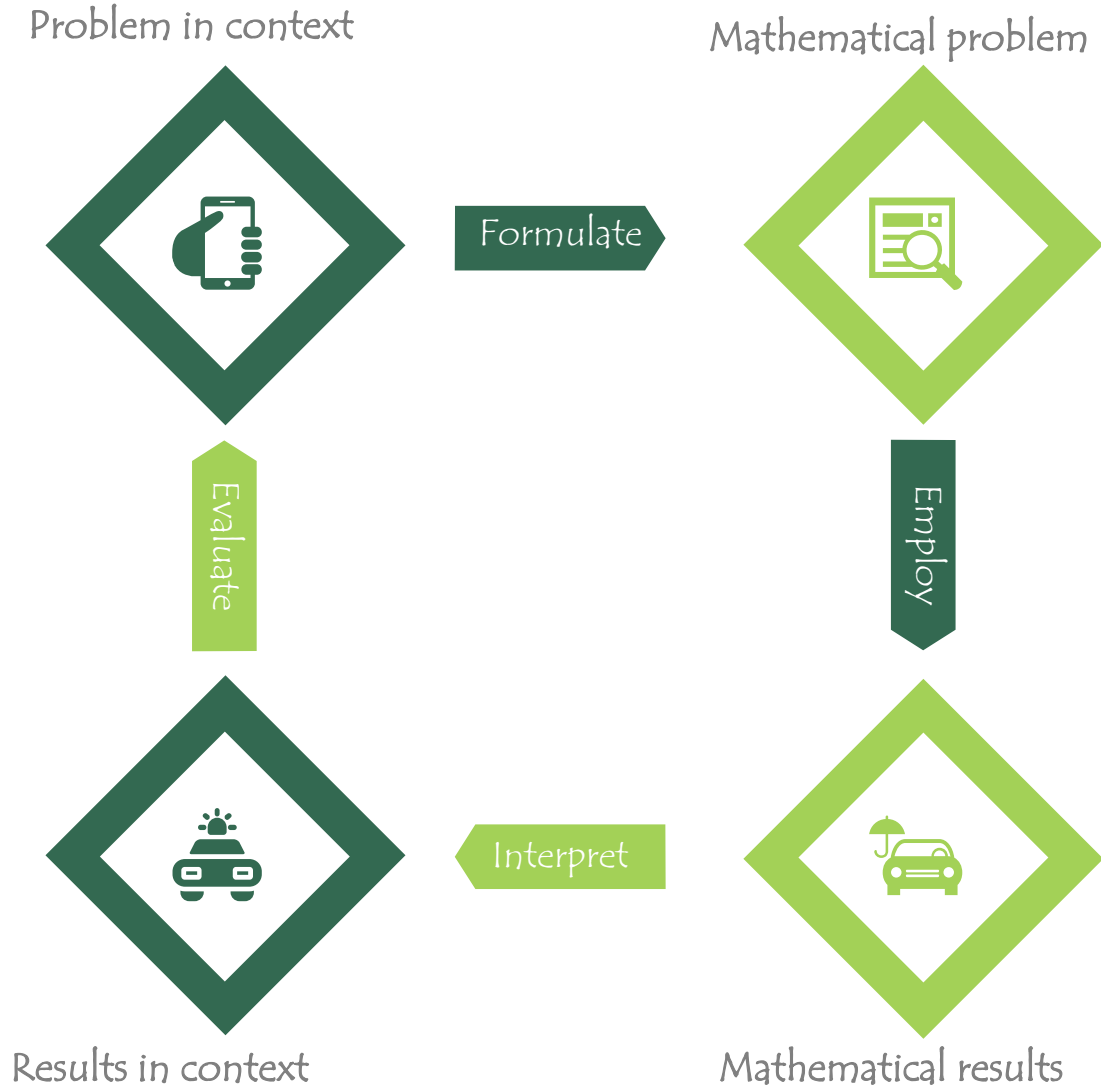
Rispondere (a titolo di considerazioni matematiche) alle domande matematiche che sorgono dalla situazione matematizzata.

Tradurre le risposte matematiche ottenute nel dominio matematico in risposte extra-matematiche relative al dominio corrispondente.

Validare i risultati del modello e valutare il modello rispetto alla sua qualità e alla sua rilevanza per lo scopo per il quale è stato costruito.

Modificare il modello o costruirne uno nuovo nel caso in cui il modello sia ritenuto carente o insoddisfacente.

Pensiero matematico e azione

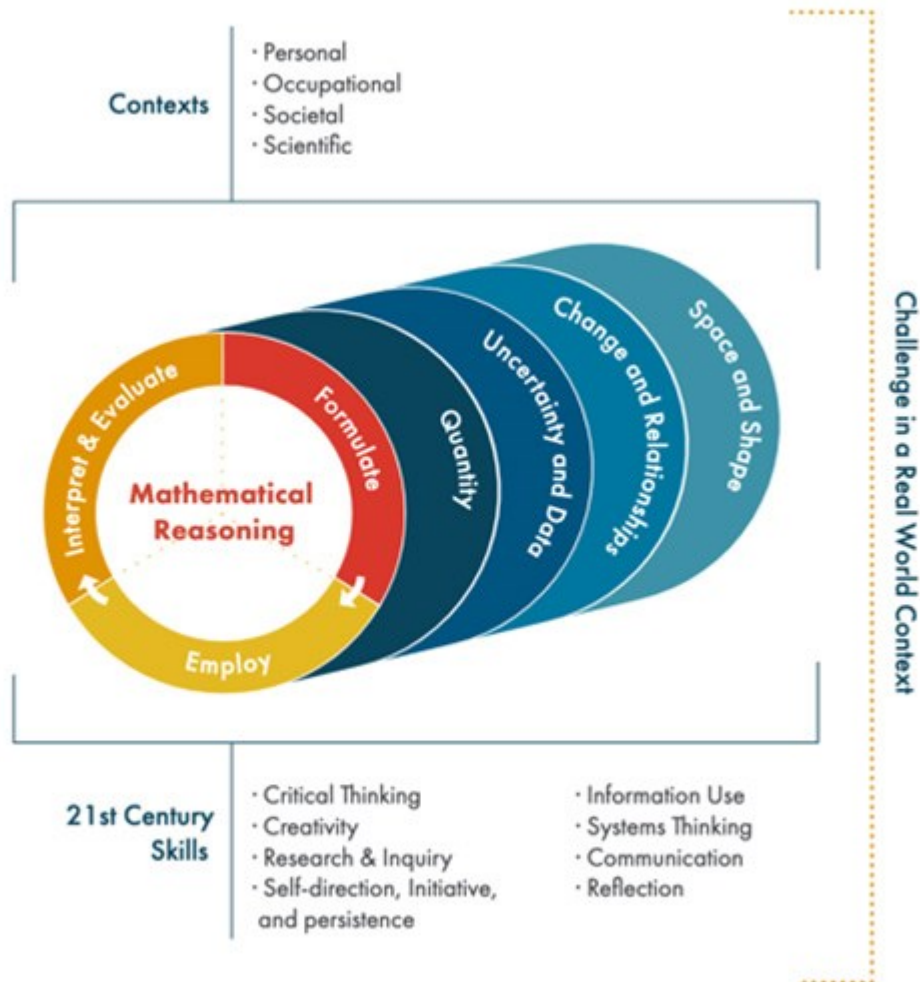


La modellizzazione matematica di un fenomeno della vita reale è un'attività elaborata che coinvolge la capacità dell'individuo di ragionare matematicamente e di formulare, impiegare e interpretare la matematica per risolvere problemi in una varietà di contesti.

La capacità di ragionare logicamente e presentare argomenti in modo onesto e convincente è un'abilità che sta diventando sempre più importante nel mondo di oggi. La matematica è una scienza che riguarda oggetti e nozioni ben definiti che possono essere analizzati e trasformati in modi diversi utilizzando il "ragionamento matematico" per ottenere conclusioni certe e senza tempo.

In matematica, gli studenti imparano che, con ragionamenti e ipotesi adeguati, possono arrivare a risultati di cui possono fidarsi pienamente in un'ampia varietà di contesti di vita reale. E' altresì importante che tali conclusioni siano imparziali, senza alcuna necessità di convalida da parte di un'autorità esterna.

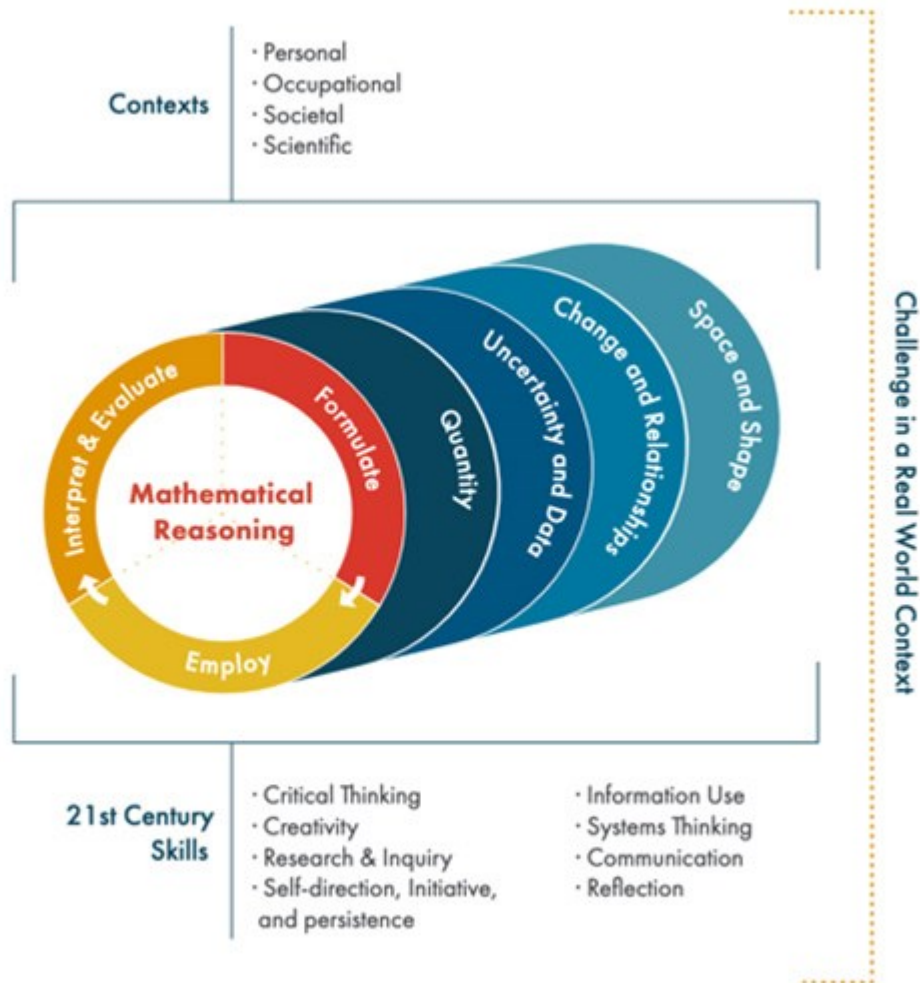
Mathematical thought and action



La capacità di ragionare logicamente e presentare argomenti in modo onesto e convincente è un'abilità che sta diventando sempre più importante nel mondo di oggi. La matematica è una scienza che riguarda oggetti e nozioni ben definiti che possono essere analizzati e trasformati in modi diversi utilizzando il "ragionamento matematico" per ottenere conclusioni certe e senza tempo.

In matematica, gli studenti imparano che, con ragionamenti e ipotesi adeguati, possono arrivare a risultati di cui possono fidarsi pienamente in un'ampia varietà di contesti di vita reale. E' altresì importante che tali conclusioni siano imparziali, senza alcuna necessità di convalida da parte di un'autorità esterna.

Mathematical thought and action



Almeno sei comprensioni chiave forniscono struttura e supporto al ragionamento matematico.

Queste informazioni chiave includono:

comprendere la quantità, i sistemi numerici e le loro proprietà algebriche;

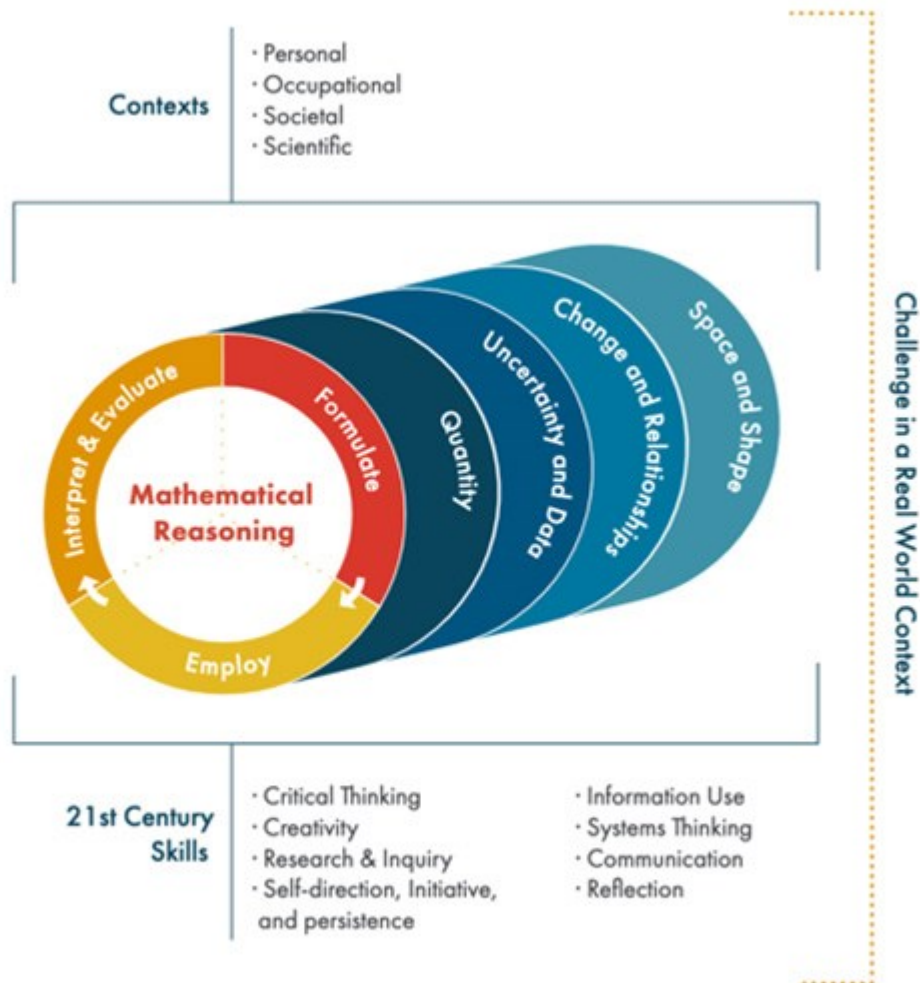
apprezzare il potere dell'astrazione e della rappresentazione simbolica; vedere le strutture matematiche e le loro regolarità;

riconoscere le relazioni funzionali tra grandezze;

utilizzare i modelli matematici come lente sul mondo reale (ad esempio, quelli che sorgono nelle scienze fisiche, biologiche, sociali, economiche e comportamentali); e

Comprendere la variazione come il cuore della statistica.

Mathematical thought and action



Le idee fondamentali della matematica sono sorte dall'esperienza umana nel mondo e dalla necessità di fornire coerenza, ordine e prevedibilità a tale esperienza.

Molti oggetti matematici modellano la realtà, o almeno riflettono aspetti della realtà in qualche modo. L'astrazione implica l'attenzione deliberata e selettiva alle somiglianze strutturali tra gli oggetti e la costruzione di relazioni tra tali oggetti basate su queste somiglianze.

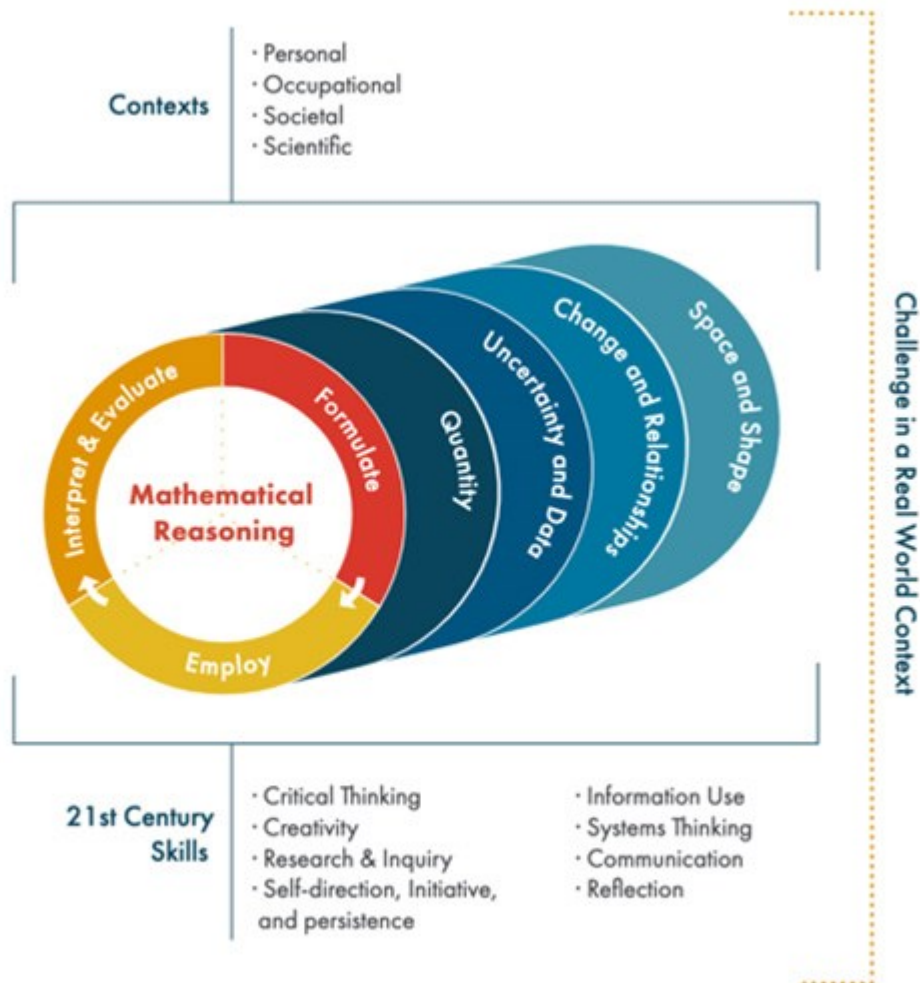
Nella matematica scolastica, l'astrazione forma relazioni tra oggetti concreti, rappresentazioni simboliche e operazioni che includono algoritmi e modelli mentali.

Gli studenti utilizzano rappresentazioni – siano esse simboliche, grafiche, numeriche o geometriche – per organizzare e comunicare il loro pensiero matematico.

Le rappresentazioni possono condensare significati e processi matematici in algoritmi efficienti.

Le rappresentazioni sono anche un elemento centrale della modellazione matematica, consentendo agli studenti di astrarre una formulazione semplificata o idealizzata di un problema della vita reale.

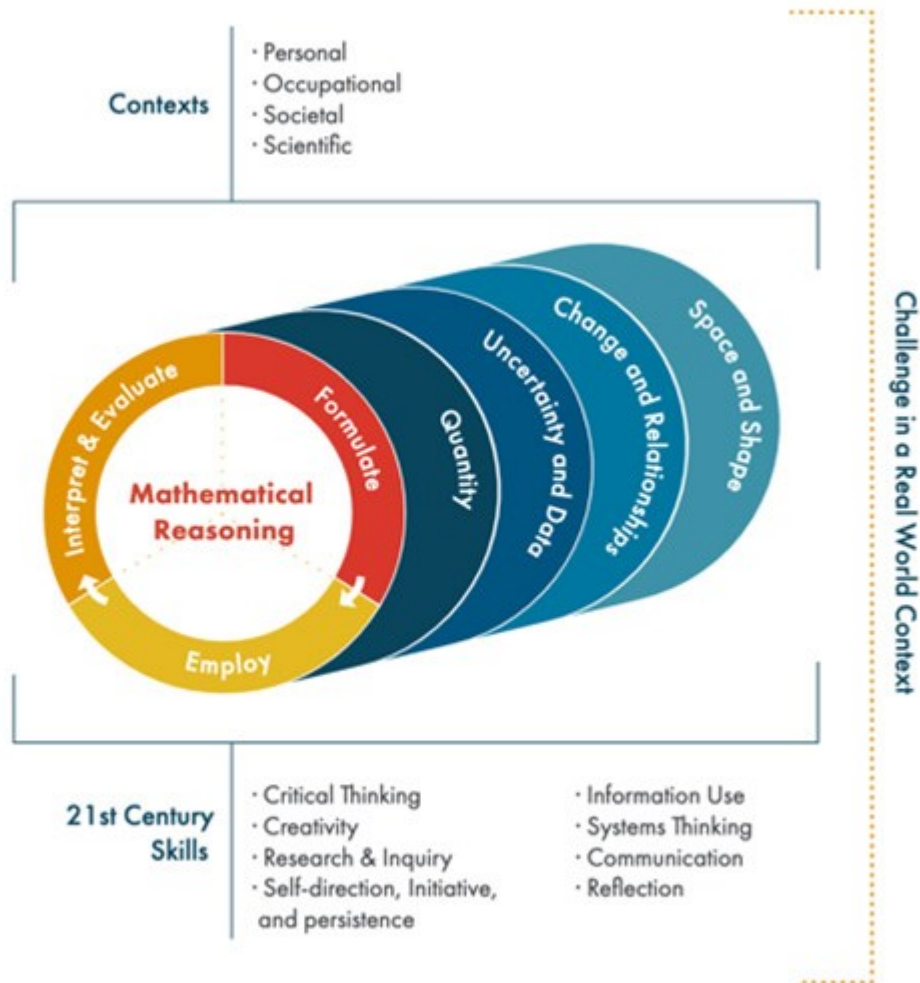
Mathematical thought and action



La struttura è intimamente legata alla rappresentazione simbolica. L'uso dei simboli è potente, ma solo se conservano un significato per il simbolizzatore, piuttosto che diventare oggetti privi di significato da riorganizzare su una pagina. Vedere la struttura è un modo per trovare e ricordare il significato di una rappresentazione astratta. Essere in grado di vedere la struttura è un importante aiuto concettuale per la conoscenza puramente procedurale.

Un solido senso della struttura matematica supporta anche la modellazione. Quando gli oggetti oggetto di studio non sono oggetti matematici astratti, ma piuttosto oggetti del mondo reale che devono essere modellati dalla matematica, allora la struttura matematica può guidare la modellazione. Gli studenti possono anche imporre una struttura a oggetti non matematici al fine di renderli soggetti ad analisi matematica.

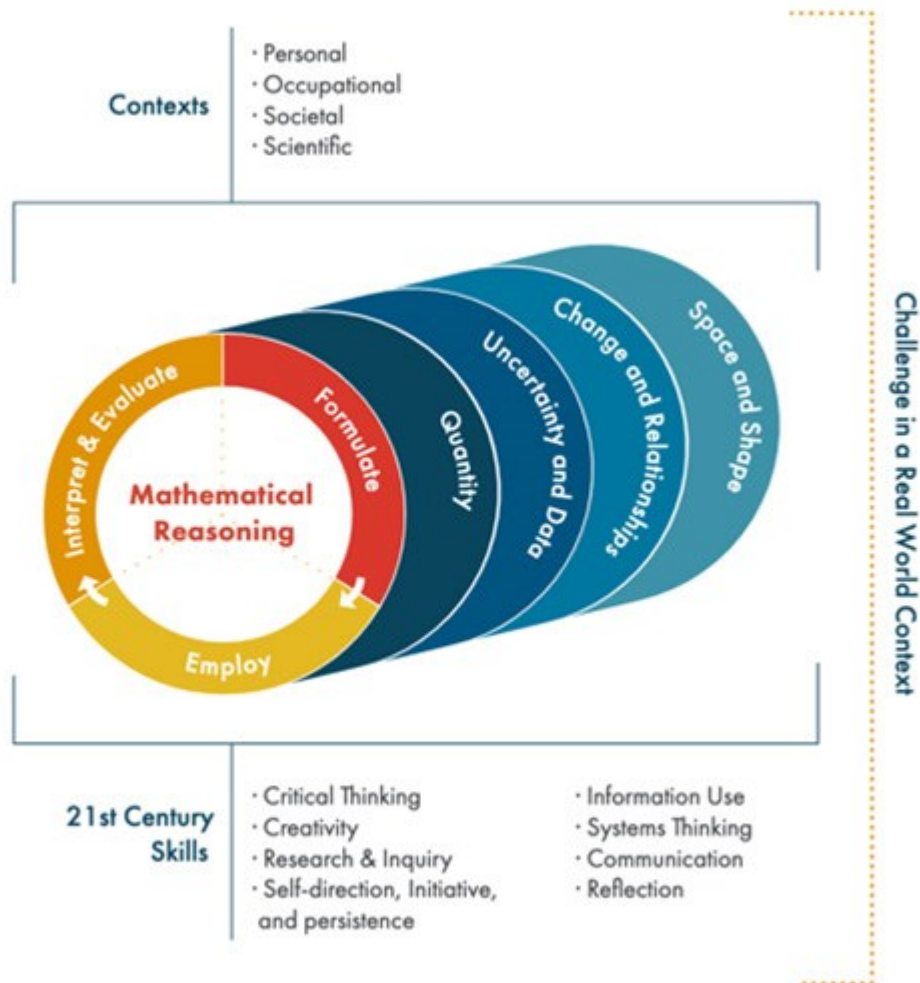
Mathematical thought and action



Le relazioni tra le grandezze possono essere espresse con equazioni, grafici, tabelle o descrizioni verbali. Un passo importante nell'apprendimento è quello di estrarre da questi la nozione di funzione stessa, come oggetto astratto di cui queste sono rappresentazioni.

Le due visioni di una funzione – la visione ingenua come processo e la visione più astratta come oggetto – possono essere riconciliate nel grafico della funzione. Ma la lettura di un grafico, coordinando i valori sugli assi, ha anche un aspetto dinamico o di processo. E il grafico di una funzione è uno strumento importante per esplorare la nozione di tasso di cambiamento. Il grafico fornisce uno strumento visivo per comprendere una funzione come relazione tra quantità co-variabili.

Mathematical thought and action



I modelli rappresentano una concettualizzazione ideale di un fenomeno reale o scientifico.

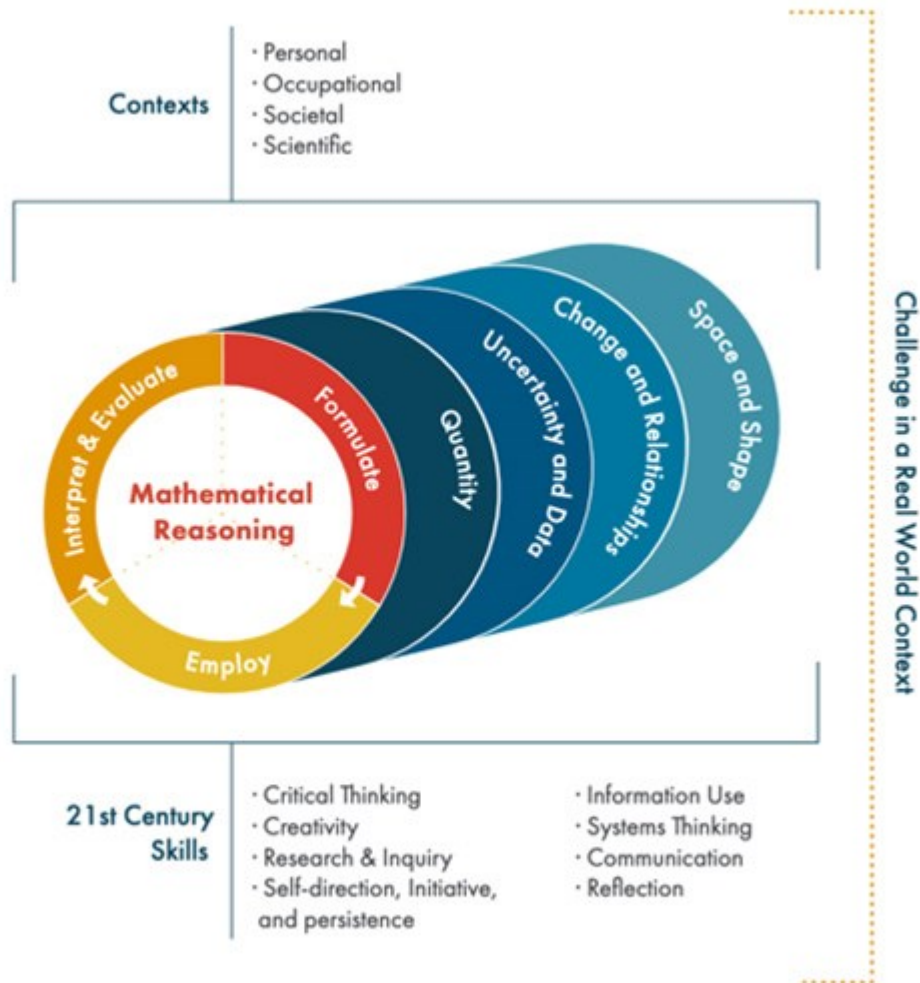
Sono, in questo senso, astrazioni della realtà. Un modello può presentare una concettualizzazione che è intesa come un'approssimazione o un'ipotesi di lavoro riguardante il fenomeno dell'oggetto o può essere una semplificazione intenzionale.

I modelli matematici sono formulati in linguaggio matematico e utilizzano un'ampia varietà di strumenti e risultati matematici (ad esempio, dall'aritmetica, dall'algebra o dalla geometria).

Pertanto, sono utilizzati come modi per definire con precisione la concettualizzazione o la teoria di un fenomeno, per analizzare e valutare i dati (il modello si adatta ai dati?) e per fare previsioni. I modelli possono essere azionati, ovvero fatti funzionare nel tempo o con input variabili, producendo così una simulazione.

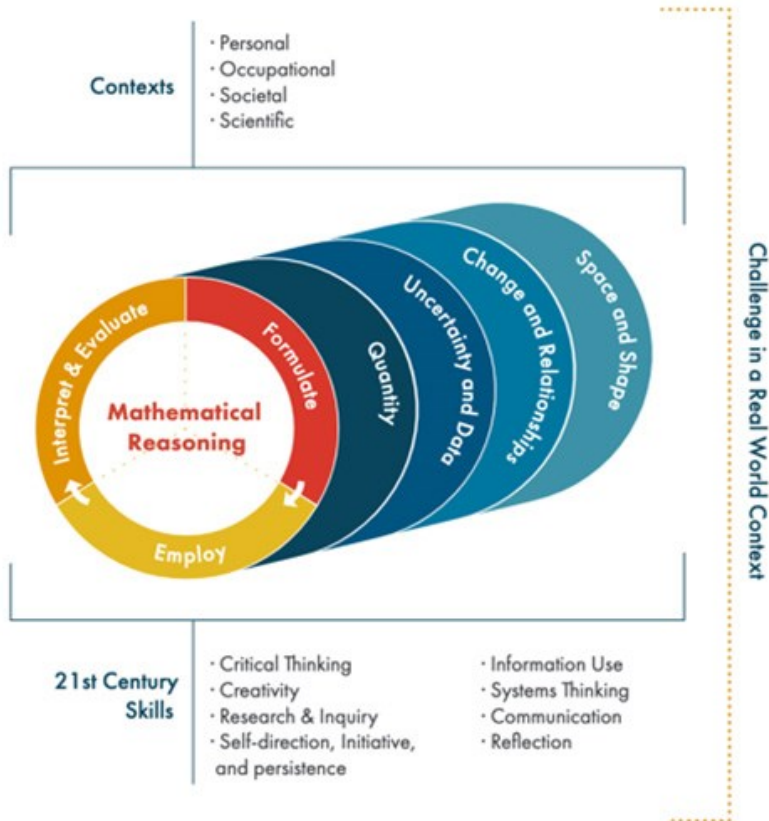
Fatto ciò, può essere possibile fare previsioni, studiare le conseguenze e valutare l'adeguatezza e l'accuratezza dei modelli.

Mathematical thought and action



La parola formulare nella definizione di alfabetizzazione matematica si riferisce alla capacità degli individui di riconoscere e identificare le opportunità di utilizzare la matematica e quindi fornire una struttura matematica a un problema presentato in una forma contestualizzata. Nel processo di formulazione matematica delle situazioni, gli individui determinano dove possono estrarre la matematica essenziale per analizzare, impostare e risolvere il problema. Traducono da un ambiente del mondo reale al dominio della matematica e forniscono al problema del mondo reale la struttura, le rappresentazioni e la specificità matematica. Ragionano e danno un senso ai vincoli e alle ipotesi del problema.

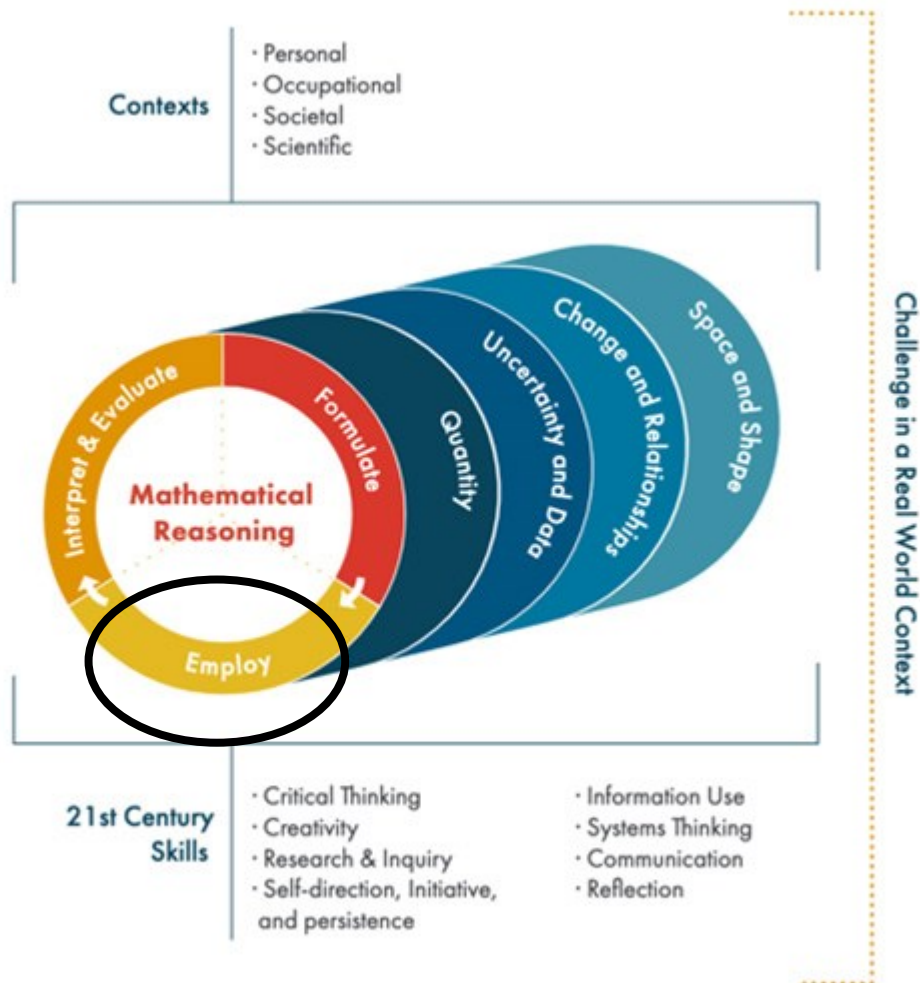
Mathematical thought and action



In particolare, questo processo di formulazione matematica delle situazioni include attività come le seguenti:

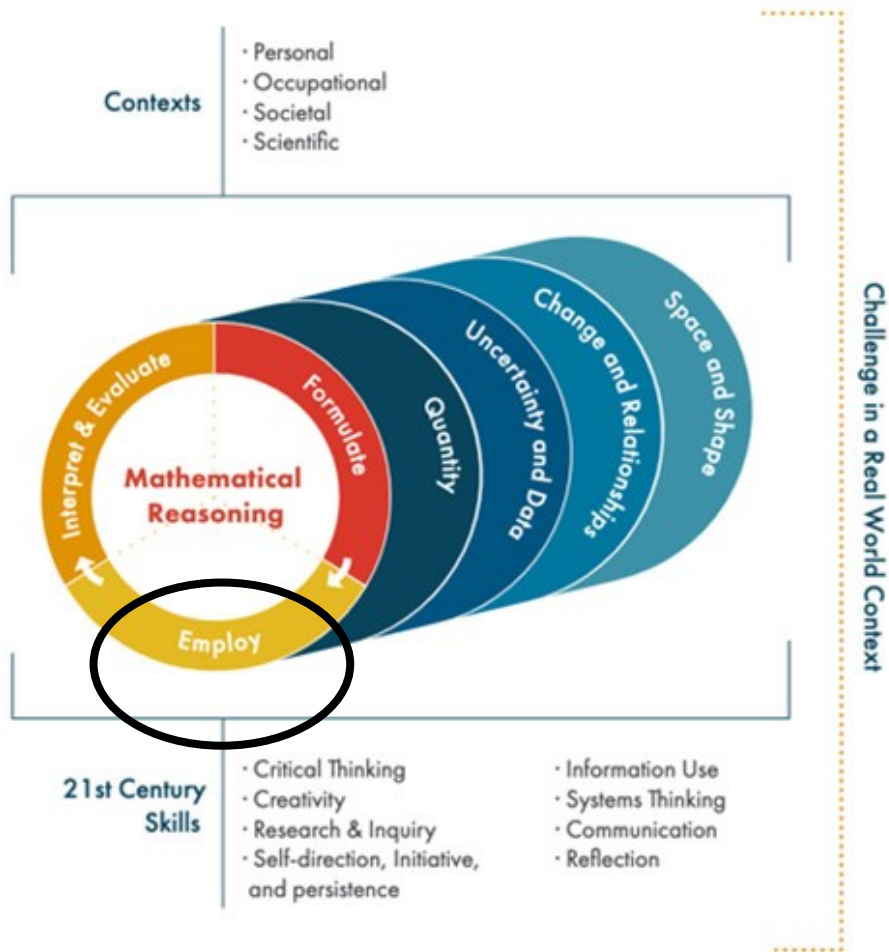
- selezione di un modello appropriato da un elenco;
- identificare gli aspetti matematici di un problema situato in un contesto di vita reale e identificare le variabili significative;
- riconoscere la struttura matematica (comprese le regolarità, le relazioni e i modelli) in problemi o situazioni;
- semplificare una situazione o un problema per renderlo suscettibile di analisi matematica;
- identificare i vincoli e le ipotesi alla base di qualsiasi modellazione matematica e semplificazioni ricavate dal contesto;
- rappresentare matematicamente una situazione, utilizzando variabili, simboli, diagrammi e modelli standard appropriati;
- rappresentare un problema in modo diverso, anche organizzandolo secondo concetti matematici e facendo assunzioni appropriate;
- comprendere e spiegare le relazioni tra il contesto - linguaggio specifico di un problema e il linguaggio simbolico e formale necessario per rappresentarlo matematicamente;
- tradurre un problema in linguaggio matematico o in una rappresentazione;
- riconoscere gli aspetti di un problema che corrispondono a problemi noti o a concetti, fatti o procedure matematiche;
- utilizzare la tecnologia (come un foglio di calcolo o la funzione di elenco su una calcolatrice grafica) per rappresentare una relazione matematica inerente a un problema contestualizzato; e
- creazione di una serie ordinata di istruzioni (passo passo) per la risoluzione dei problemi.

Mathematical thought and action



La parola impiegare nella definizione di alfabetizzazione matematica si riferisce alla capacità degli individui di applicare concetti, fatti, procedure e ragionamenti matematici per risolvere problemi formulati matematicamente per ottenere conclusioni matematiche. Nel processo di utilizzo di concetti, fatti, procedure e ragionamenti matematici per risolvere problemi, gli individui eseguono le procedure matematiche necessarie per derivare risultati e trovare una soluzione matematica. Lavorano su un modello della situazione problematica, stabiliscono regolarità, identificano connessioni tra entità matematiche e creano argomenti matematici.

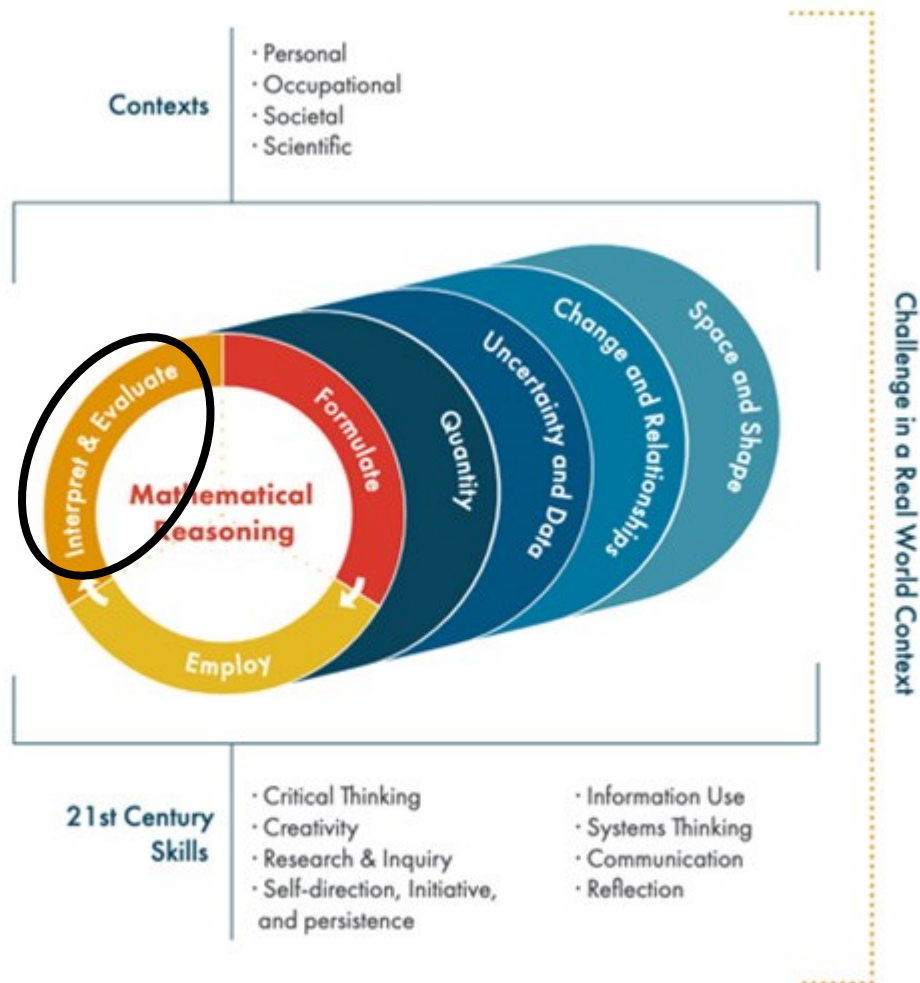
Mathematical thought and action



In particolare, questo processo di impiego di concetti, fatti, procedure e ragionamenti matematici include attività quali:

- eseguire un semplice calcolo;
- trarre una semplice conclusione;
- selezionare una strategia appropriata da un elenco;
- ideare e implementare strategie per la ricerca di soluzioni matematiche;
- l'utilizzo di strumenti matematici, compresa la tecnologia, per aiutare a trovare soluzioni esatte o approssimate;
- applicare fatti, regole, algoritmi e strutture matematiche nella ricerca di soluzioni;
- manipolare numeri, dati e informazioni grafiche e statistiche, espressioni ed equazioni algebriche e rappresentazioni geometriche;
- creare diagrammi matematici, grafici e costruzioni ed estrarne informazioni matematiche;
- l'utilizzo e il passaggio da una rappresentazione all'altra nel processo di ricerca di soluzioni;
- fare generalizzazioni basate sui risultati dell'applicazione di procedure matematiche per trovare soluzioni;
- riflettere su argomenti matematici e spiegare e giustificare i risultati matematici; e
- valutare la significatività dei modelli osservati (o proposti) e delle regolarità nei dati.

Mathematical thought and action



La parola interpretare (e valutare) usata nella definizione di alfabetizzazione matematica si concentra sulla capacità degli individui di riflettere su soluzioni, risultati o conclusioni matematiche e interpretarli nel contesto del problema della vita reale che ha avviato il processo. Ciò comporta la traduzione di soluzioni matematiche o ragionamenti nel contesto del problema e la determinazione se i risultati sono ragionevoli e hanno senso nel contesto del problema.

In particolare, questo processo di interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici include attività come le seguenti:

interpretare le informazioni presentate in forma grafica e/o diagrammi;

valutare un risultato matematico in termini di contesto;

reinterpretare un risultato matematico nel contesto del mondo reale;

valutare la ragionevolezza di una soluzione matematica nel contesto di un problema reale;

comprendere in che modo il mondo reale influisce sui risultati e sui calcoli di una procedura o di un modello matematico al fine di formulare giudizi contestuali su come i risultati dovrebbero essere adattati o applicati;

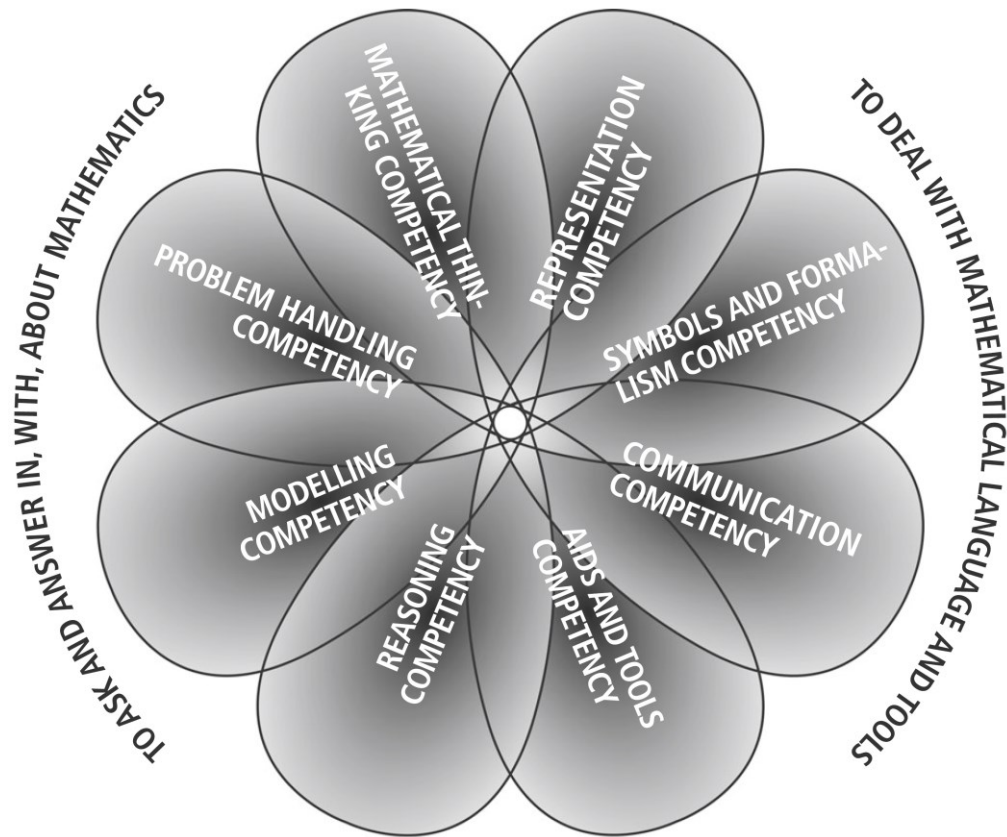
spiegare perché un risultato o una conclusione matematica ha o non ha senso in base al contesto di un problema;

comprendere l'estensione e i limiti dei concetti matematici e delle soluzioni matematiche;

criticare e individuare i limiti del modello utilizzato per risolvere un problema; e

utilizzare il pensiero matematico e il pensiero computazionale per fare previsioni, per fornire prove per argomenti e per testare e confrontare le soluzioni proposte.

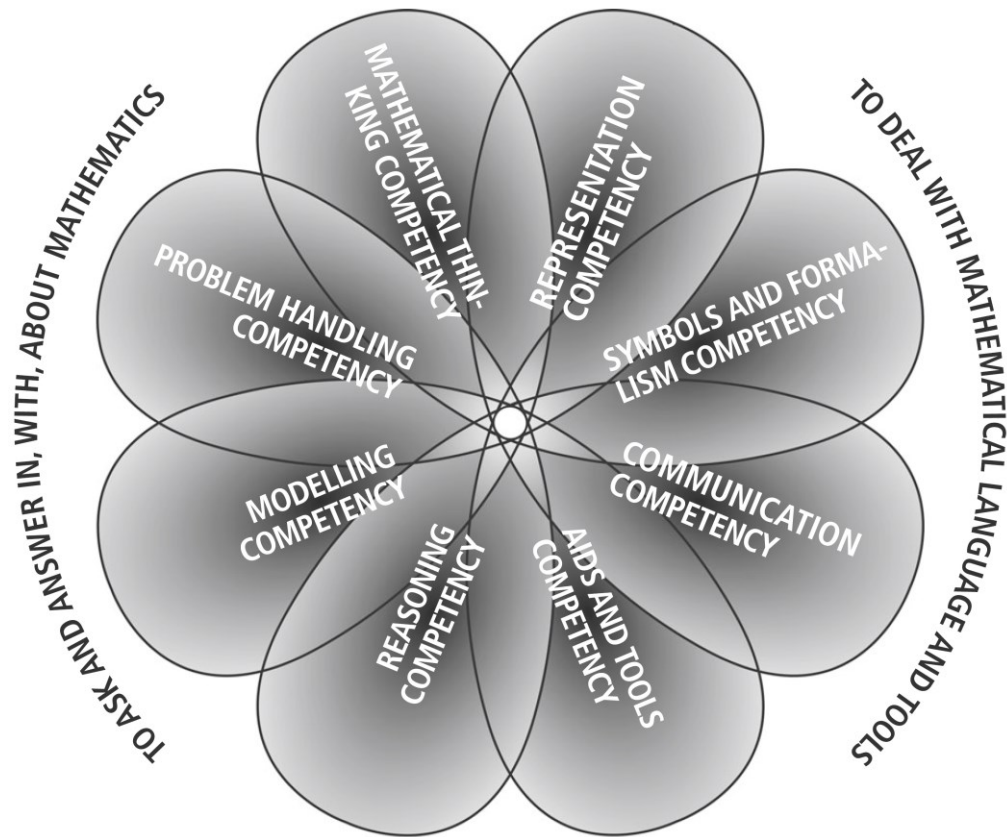
Mathematical Modelling in KOM Project (Niss & Højgaard, 2019)



This competency focuses on mathematical models and modelling, i.e., on mathematics being put to use to deal with extra-mathematical questions, contexts and situations. Being able to construct such mathematical models, as well as to critically analyse and evaluate existing or proposed models, whilst taking purposes, data, facts, features and properties of the extra-mathematical domain being modelled into account, are the core of this competency. It involves relating to and navigating within and across the key processes of the “modelling cycle” in its various manifestations (e.g., Blomhøj & Jensen, 2003; Blum & Leiß, 2007; Niss, 2010).

Dealing with mathematics-laden situations that refer to extra-mathematical contexts in a formal manner only, without requiring attention being paid to extra-mathematical features, might be said to involve modelling in a formal sense, by definition. However, since such an undertaking does not implicate the mathematical modelling competency proper, it is not included here but is referred to the previous competency. The modelling competency also involves handling mathematical problems generated by the mathematisation part of the modelling process. Only in such cases is problem handling considered part of the modelling competency.

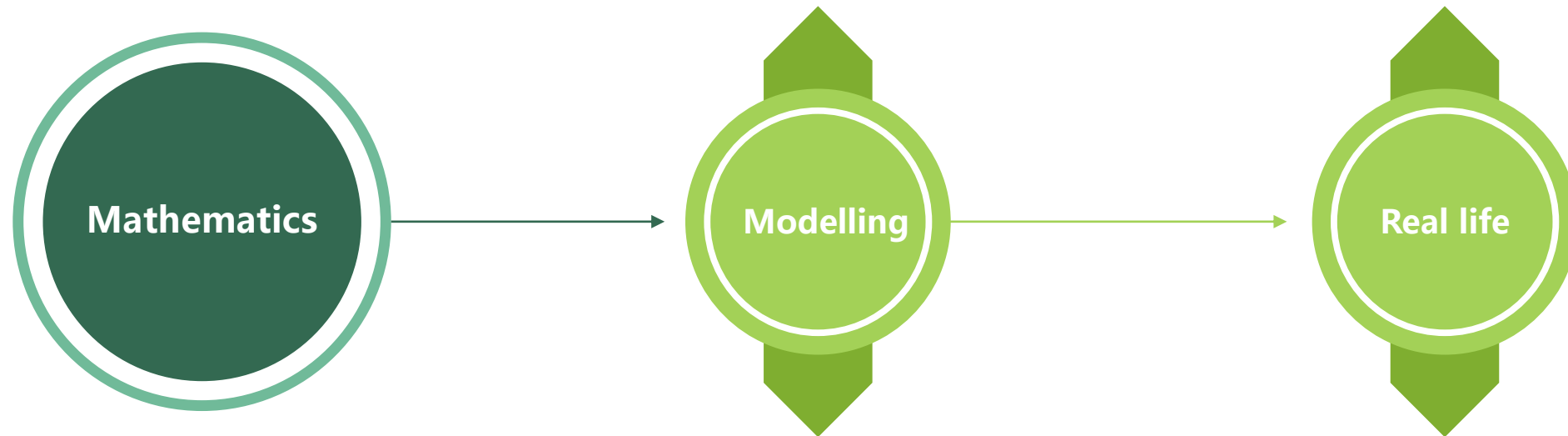
Mathematical Modelling in KOM Project (Niss & Højgaard, 2019)



In Mathematics Education, modelling is intended as “the process of translating between the real world and mathematics in both directions” (Blum and Ferri 2009, p. 45). Mathematical models represent an ideal conceptualization of a real-life or scientific phenomenon; they are formulated in a mathematical language and make use of a wide variety of mathematical tools and results (Niss and Højgaard 2019). Hence, given the diversity of factors at play, mathematical modelling is a complex activity. As contained in the definition itself, the modelling cycle mainly consists of interactions

Modelling is intended as “the process of translating between the real world and mathematics in both directions” (Blum and Ferri 2009, p. 45).

Mathematical models represent an ideal conceptualization of a real-life or scientific phenomenon; they are formulated in a mathematical language and make use of a wide variety of mathematical tools and results (Niss and Højgaard 2019)



The terms, *models* and *modelling*, have been used variously in the literature, including in reference to solving word problems, conducting mathematical simulations, creating representations of problem situations (including constructing explanations of natural phenomena), and creating internal, psychological representations while solving a particular problem (e.g. Doerr & Tripp, 1999; English & Halford, 1995; Gravemeijer, 1999; Greer, 1997; Lesh & Doerr, 2003; Romberg et al., 2005; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Modelling is not just confined to mathematics and science, however. Other disciplines including engineering, information systems, economics, social and environmental science, and the arts have also contributed in large part to the powerful mathematical models we have in place for dealing with a range of complex problems (Lesh & Sriraman, 2005; Sriraman and Dhal 2008).

Modelling provides students with a “sense of agency” in appreciating the potential of mathematics as a critical tool for analysing important issues in their lives, their communities, and in society in general (Greer, Verschaffel, & Mukhopadhyay, 2007, p. 89).

输入标题文本

Mathematics as an analytic discipline can be focused in the solutions of real problems. In this respect, the discipline acquires a remarkable development through the use of mathematical modelling in an interdisciplinary context. Examples of such developments could be found in many fields of the scientific and technological research, in which the conjunction of different scientific approaches with an integrative perspective is a key point of development [5]. From this perspective, it is possible to define mathematical modelling as an interdisciplinary activity in which two or more disciplines converge together to solve a problem (Williams et al., 2016)

输入标题文本

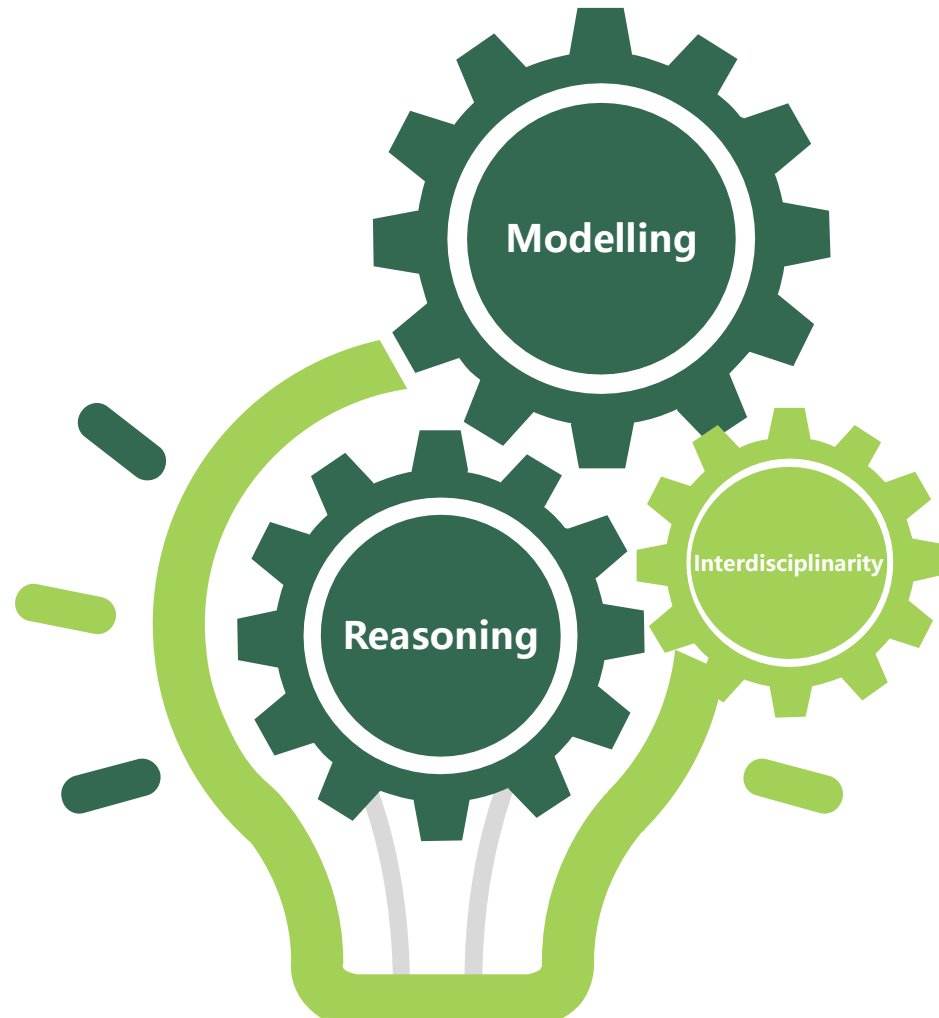
La modellizzazione è spesso un processo che coinvolge il ragionamento per rappresentare e comprendere fenomeni del mondo reale attraverso modelli matematici. La capacità di ragionare in modo critico, analitico e logico è fondamentale per identificare, formulare e risolvere i problemi attraverso modelli matematici

输入标题文本

Da dove attingiamo i modelli matematici?

From other disciplines including engineering, information systems, economics, social and environmental science, and the arts.

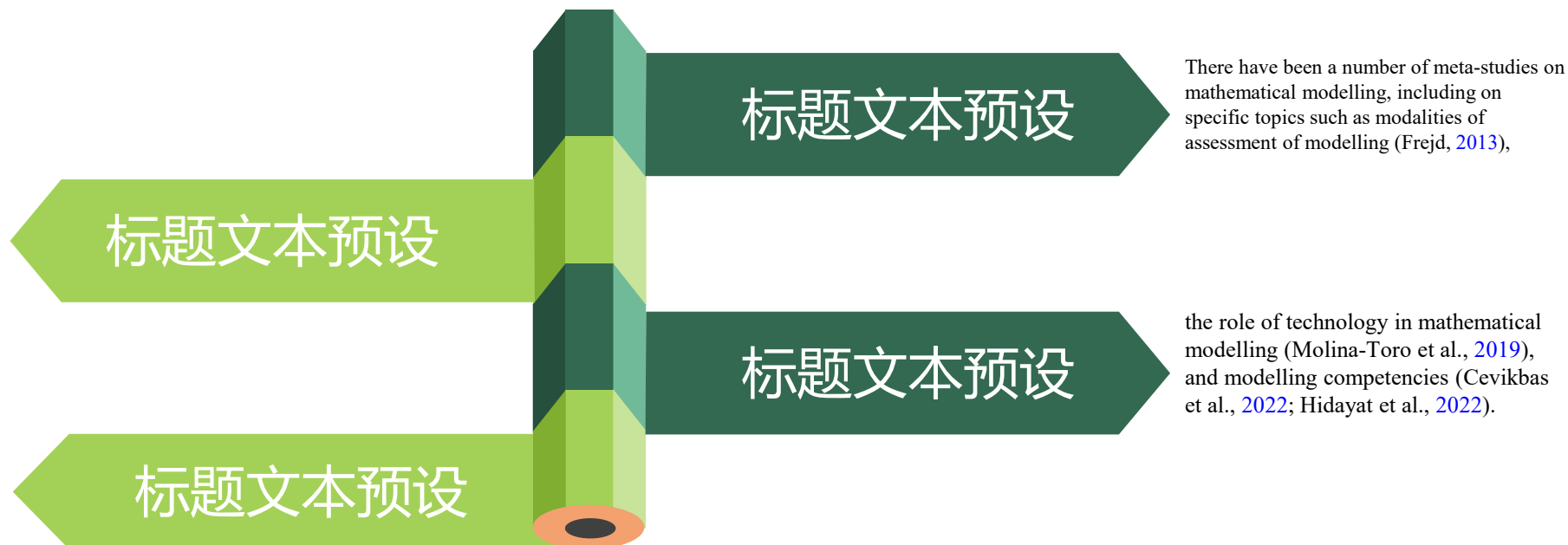
Il processo di modellizzazione può essere favorito e aumentato da una didattica interdisciplinare. D'altro canto la modellizzazione può essere il motore di una didattica interdisciplinare.



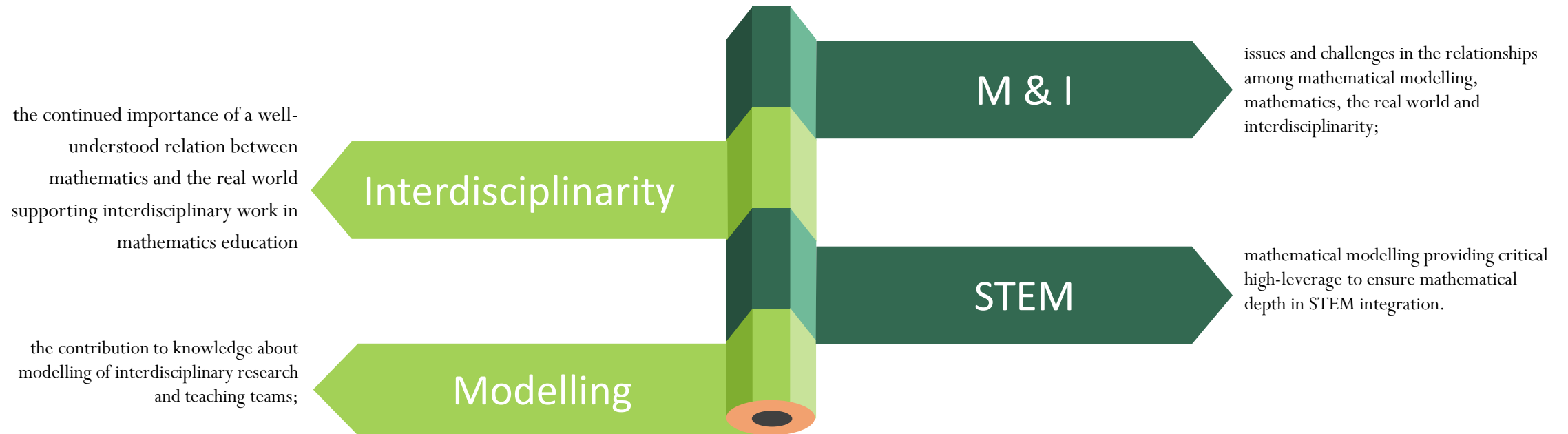
The promotion of mathematical modelling competencies is recognised worldwide as an important goal of mathematics teaching.

Stillman (2019) has seen as an important impetus theoretical approaches to research on mathematical modelling, among others, the study of modelling frameworks, modelling competence, and metacognition.)

Somewhat less frequently, one finds studies that use quantitative research methods or focus on affect-related topics (Schukajlow et al., 2018).

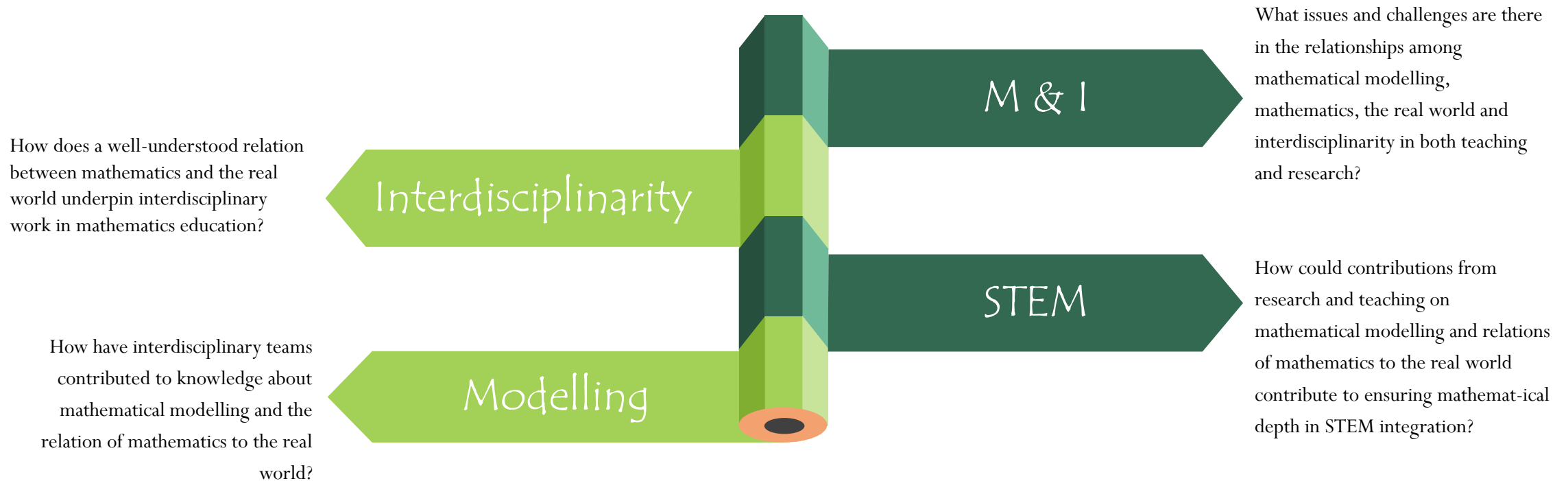


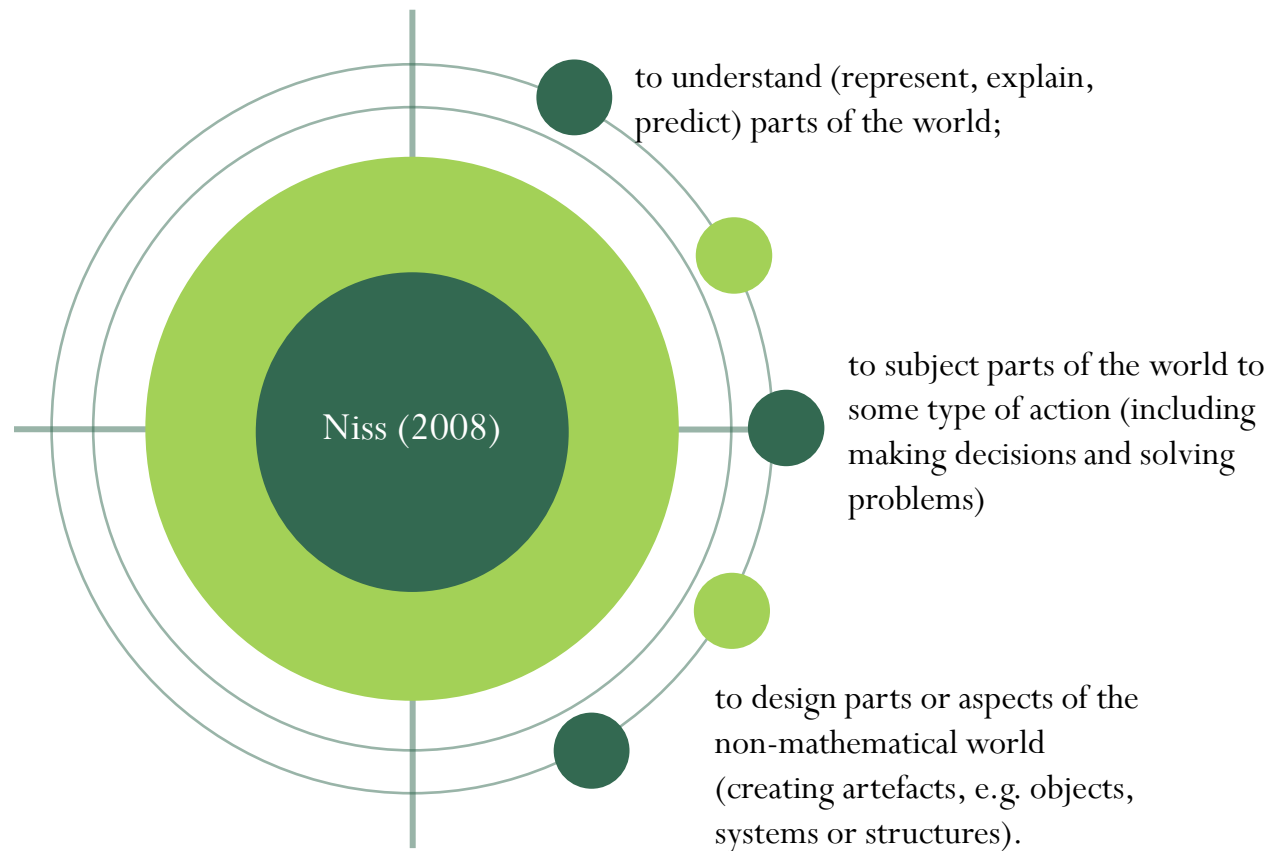
Based on a systematic, qualitative, analytical review of literature (Newman & Gough, 2020) from this time period, **Stillman, Ikeda, Schukajlow, Araújo, and Ärlebäck** identified four major threads of contributions relating to schooling.



One emergent question thus concerns the clarification of the connection between modelling and integrated STEM, in school and university curricula. This discussion may be traced back to the seminal work of Blum and Niss (1991), where various possibilities of linking mathematics to other subjects were raised and differentiated, namely the mathematics curriculum integrated approach and the interdisciplinary integrated approach.

Interdisciplinary research is a mode of research by teams or individuals that integrates information, data, techniques, tools, perspectives, concepts, and/or theories from two or more disciplines or bodies of specialized knowledge to advance fundamental understanding or to solve problems whose solutions are beyond the scope of a single discipline or area of research practice. (Committee on Facilitating Interdisciplinary Research, Committee on Science, Engineering and Public Policy, 2004)





A model is useful to describe a real-world situation. In such activity, on the one hand, the real world encourages a deeper understanding and processing of mathematics; on the other hand, mathematics encourages deeper understanding and processing of the real world. *Each enriching the other is essential* for a well-understood relation between mathematics and the real world. If teachers or researchers attend to the roles of models in the real world, already there is a focus on knowledge concerning other disciplines, thus teaching applications and modelling becomes related to interdisciplinary mathematics education.

The purposes of use of mathematics affect which other subject disciplines are in focus.

Kurobe Dam is the biggest dam in Japan. Water spills into the river from two gates. The water from the lower gate appears to have stronger momentum than that from the higher gate. However, the horizontal distances from the dam wall to the impact point seem to be similar. From these observations, we can pose a real-world problem: What is the relation between the location of the gate and the horizontal distance of where the water lands? [There are, of course, other problems that can be posed.]

标题文本预设

此部分内容作为文字排版占位显示
(建议使用主题字体)

标题文本预设

此部分内容作为文字排版占位显示
(建议使用主题字体)



标题文本预设

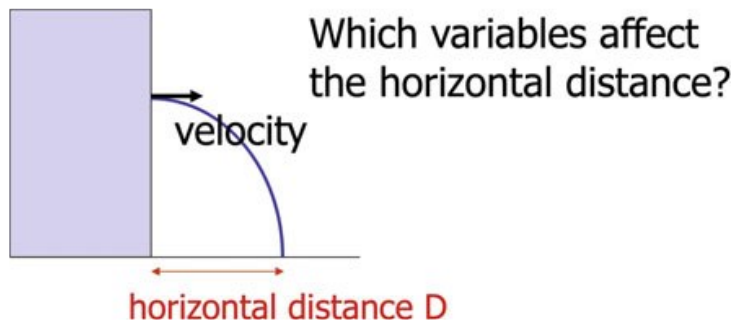
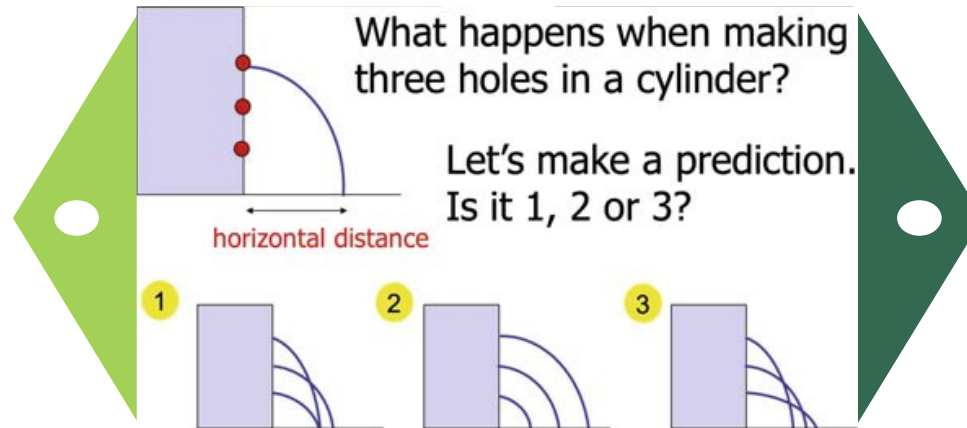
此部分内容作为文字排版占位显示
(建议使用主题字体)

标题文本预设

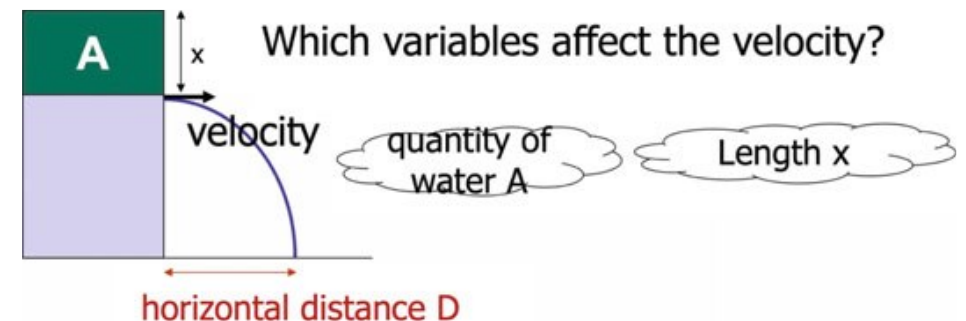
此部分内容作为文字排版占位显示
(建议使用主题字体)

Let us consider the simplest situation. We could model the dam by a cylinder and ask: What happens when you make three holes in a cylinder? Let us make a prediction. In Figure which of the possible scenarios is correct? The curved lines show the surmised trajectories of water from the holes in the cylinder.

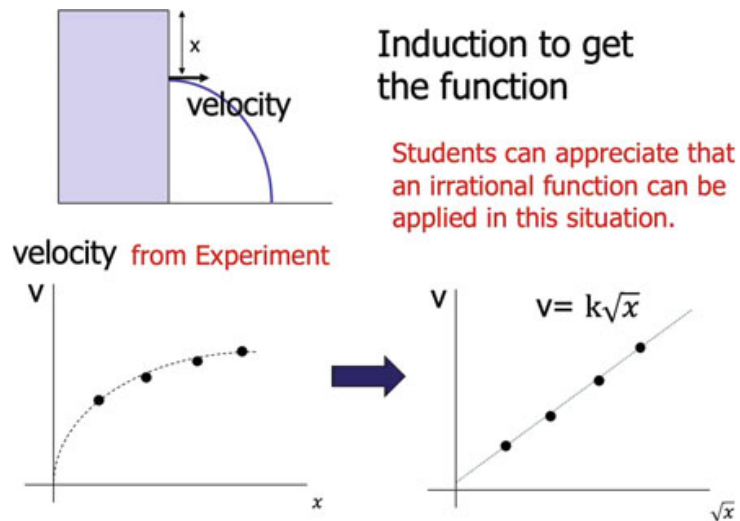
The correct representation is 1. Which variables affect the horizontal distance to where the water lands on the spillway? By applying school mathematics, there are two variables: velocity and time. Which variables affect the velocity?



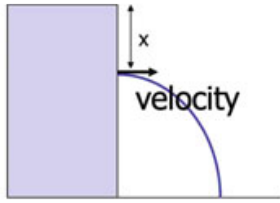
Two different possibilities that could be raised by students are quantity of water and length, x , the depth of water above the gate to release the water



To confirm which of these is critical, we can conduct an experiment in the real world. By experimenting, we will be able to see that velocity is constant when changing the amount of water, A , in the dam above the gate. Only distance will affect velocity. Length x is interpreted as a relation between the quantity of water A and cross-sectional area. So, real-world knowledge, that is physics knowledge, could be developed for/by the students in this situation.



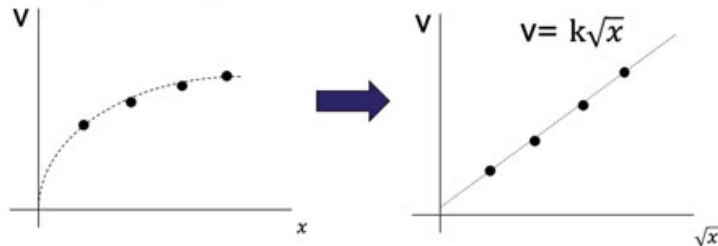
Next, we can change the distance, x , of the gate from the top of the full dam, to obtain a function. By doing an experiment in the real world, students could create a scatterplot and sketch a smooth curve through it. For this curve, we can imagine that this function might be the square root of x . By drawing the graph of v versus \sqrt{x} we can see it is almost linear. Then, we can consider that the velocity of the spilled water is proportional to the square root of the depth of the water from the top of the dam to the gate. Students can appreciate that an irrational function can be applied in this situation. For the other variable affecting horizontal distance, time, we can use physics knowledge, to formulate the relationship between vertical height, y , of the gate from the bottom of the dam wall and time t , using acceleration due to gravity $y = \frac{1}{2}gt^2$



Induction to get the function

Students can appreciate that an irrational function can be applied in this situation.

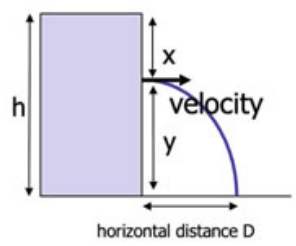
velocity from Experiment



$$D = \text{velocity} \times \text{time}$$

velocity $v = k\sqrt{x}$
 time $t = l\sqrt{y}$
 $h = x + y$

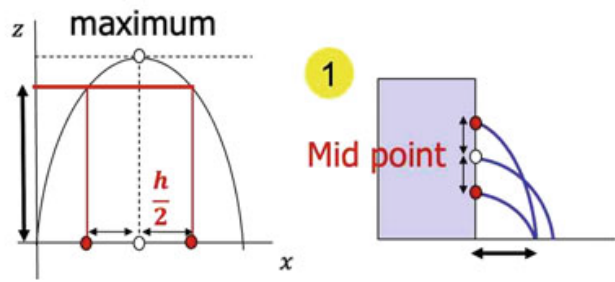
$$D = v \times t = kl\sqrt{x(h-x)} = z$$



Looking at z it is a quadratic

$$z = x(h-x)$$

$$= xh - x^2$$



By rearranging this equation, we obtain t by using the height, y, as

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = l\sqrt{y}$$

Horizontal distance, D, is calculated from velocity, time and h, the height of the dam wall as

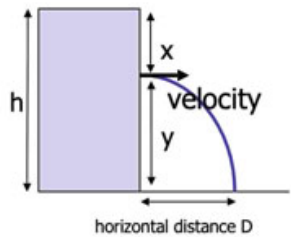
$$D = kl\sqrt{x(h-x)}$$

By setting

$$z = x(h-x)$$

we obtain a quadratic function of z which we can show is a maximum at h/2.

From this we can infer that the horizontal distance, D, reaches a maximum value too when the distance x from the top of the dam, is half of h, or the mid-point of the height of the cylinder in our experiment. If two gates are located at the same vertical distance from the mid-point, the horizontal distance to where the water lands on the spillway is the same. This property of the quadratic function will give opportunity for students to appreciate how mathematics enriches understanding of the real world. This can be verified by experiment.



$$D = \text{velocity} \times \text{time}$$

$$\text{velocity } v = k\sqrt{x}$$

$$\text{time } t = l\sqrt{y}$$

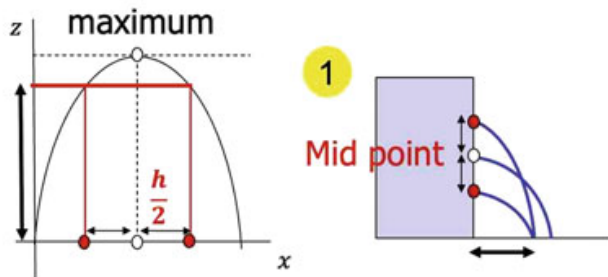
$$h = x + y$$

$$D = v \times t = kl\sqrt{x(h-x)} = z$$

Looking at z it is a quadratic

$$z = x(h-x)$$

$$= xh - x^2$$



If the students were to raise further questions about the real world such as “Why is velocity, V , proportional to the square root of x ?”, another investigation could start. This activity uses abduction to explain the function; this is a study of physics. Assumption making is quite important to explain phenomena. In this case, an essential assumption is that energy is constant, namely potential energy is equal to kinetic energy. By allowing this assumption, we can explain the phenomena by rearranging the equation to show $v = k\sqrt{x}$. Thus, a further question derived from mathematical modelling leads to an inquiry of physics



总体教学结果

01 标题文字

02 标题文字

03 标题文字

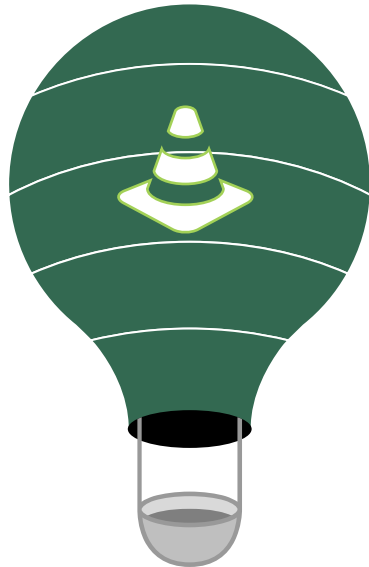
04 标题文字

From the perspective of teaching mathematics, in terms of fostering competence in modelling, students have opportunities to realise the importance of generating and selecting variables, setting up the simplified situation and validating the solution derived from the model by experiment.

Regarding appreciation of the usefulness of mathematics, students have opportunity to appreciate the utility of mathematics to understand (represent, explain, predict) parts of the world.

From a real-world point of view, knowledge of physics is enriched. Students learn that the velocity of the spilling water is proportional to the square root of the distance x from the top of the waterline and that the horizontal distance becomes a maximum value when the gate is located at the mid-point of vertical height, h , from the bottom of the dam wall to the waterline. If the teacher analysing this situation through the thought experiment has these teaching aims, then it is a suitable modelling classroom experience.

Ruolo dell'AI nel processo di acquisizione di competenze matematiche



Modelling

Provoca o media l'attenzione. Lo studente segue gli schemi di quanto spiegato a lezione che il docente ha caricato sulla piattaforma.

Il Sistema di AI viene usato come un qualunque altro strumento per rivedere quanto spiegato a lezione.



Coaching

Causa o media rilevanza. Lo studente inizia a sviluppare le competenze allenandosi.

Il Sistema di AI supporta l'analisi dell'apprendimento del singolo studente. Lo studente chiede al sistema di generare esercizi simili a quelli proposti in classe. Chiede spiegazione di qualche passaggio non chiaro. Svolge gli esercizi. Li confronta con lo svolgimento proposto da AI.



Scaffolding

Provoca o media fiducia. Lo studente inizia a eseguire compiti grazie a un supporto personalizzato.

Interventi pedagogici di AI. Lo studente chiede il supporto su cose che non riesce a fare durante la fase di coaching. Chiede ulteriori esempi più complessi e prova a risolverli.



Fading

Provoca o media soddisfazione. Lo studente agisce autonomamente.

Si ha un feedback formativo e sommativo dell'AI.