Lezione del 15.10.2024

Proposizione: L'insieme $\mathbb{Q}$ ha la potenza del numerabile

Dimostrazione: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ biettiva

$\mathbb{Q}^+$ non lede la generalità del teorema

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	---
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	---
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	---
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	---
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	---
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	—
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$1/1 \quad 1/2 \quad 2/1 \quad 3/1 \quad 2/2 \quad 1/3 \quad \ldots$

Considero le frazioni non equivalenti ad una frazione già considerata

$1/1 \quad \cancel{2/2} \quad \cancel{3/3}$

L'intero $\mathbb{Q}^+$ lo considero in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ mediante la seguente funzione

$$h : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \quad \text{biettiva}$$

0	$1/1$	$-1/1$	$1/2$	$-1/2$	$2/1$	$\ldots$	$\mathbb{Q}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		
0	1	2	3	4	5	$\ldots$	$\mathbb{N}$

A ogni elemento di $\mathbb{Q}$ posso associare uno ed un solo elemento di $\mathbb{N}$.

Proposizione: l'insieme $\mathbb{R}$ non ha la potenza del numerabile

Dimostrazione: per assurdo, abbia $\mathbb{R}$ la potenza del numerabile. Allora dovremmo poter "ordinare" gli elementi di $\mathbb{R}$ ad esempio provando a scrivere tutti quelli compresi tra 0 e 1.

$$x_1 = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \ldots$$

$$x_2 = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 \ldots$$

$$x_3 = 0{,}c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8 c_9 \ldots$$

Ogni allineamento decimale può essere illimitato o limitato

Dimostreremo che una qualsiasi fila non può contenere tutti i reali compresi tra 0 e 1.

Infatti, prendiamo il reale $\alpha = 0{,}\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \ldots$ tale che:

$\lambda_1 \neq a_1$, $\lambda_2 \neq a_2$, $\lambda_3 \neq a_3$ ----

Il reale α non può appartenere alla fila perché

$\alpha \neq x_1$ perché la prima cifra decimale è diversa

$\alpha \neq x_2$ perché la seconda cifra decimale è diversa

$\vdots$

$\alpha \neq x_n$

Pertanto è impossibile elencare in un'unica fila tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1.
Quindi $\mathbb{R}$ non ha la potenza del numerabile.

Diremo che $\mathbb{R}$ ha la <u>potenza del continuo</u>

ESERCIZI PROPOSTI

1) Dimostrare per induzione che per ogni intero positivo n il numero $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ è divisibile per 8.

2) Dimostrare che per induzione che per ogni naturale $n \geq 2$ risulta $n^3 > n + 6$

3) Dimostrare per induzione che per ogni intero positivo m si ha:

$$2^1 + \dots + 2^m = 2^{m+1} - 2$$

4) Dimostrare per induzione che in un'aula in cui sono presenti m studenti, con $m \geq 1$, se ognuno stringe una sola volta la mano di ciascun altro presente si hanno esattamente $\frac{m(m-1)}{2}$ strette di mano.

ESERCIZIO: Trovare l'errore in questa dimostrazione

TEOREMA: Tutte le persone hanno la stessa età

Dim: Indico con $S(n)$ l'asserzione "in un gruppo di n persone tutte hanno la stessa età".
Vogliamo le seguenti:
1) $S(1)$
2) $\forall n (S(n) \Rightarrow S(n+1))$

La prima prova è ovvia. Per provare la seconda fisso un n e sia G un gruppo di $n+1$ persone. Affermo che due persone P_1 e P_2 in G hanno la stessa età.
Infatti se P è una persona diversa da P_1 e P_2 poiché $G - \{P\}$ contiene n persone per hp di induzione su $G - \{P\}$ tutte le persone hanno la stessa età. In particolare P_1 ha l'età di P_2.

PARADOSSO DEL MUCCHIO DI GRANO

Teorema: Se si accetta che non tutti i mucchi di grano sono piccoli allora il principio di induzione è falso.

Dim: Sia $P(n)$ l'asserzione "un mucchio con n chicchi è piccolo". Allora valgono le seguenti

1) $P(1)$ è vera

2) $\forall n \, (P_n \to P(n+1))$ è vera

La prima è ovvia. Per la (2) basta osservare che se un mucchio di grano è piccolo allora rimane piccolo anche se ci aggiungo un altro chicco di grano.
Se la (2) fosse falsa esisterebbe un $\underline{m}$ per cui

$P(\underline{m}) \to P(\underline{m}+1)$ falsa

Tenendo conto che una implicazione è falsa se e solo se l'antecedente è vero e il conseguente è falso, avremmo che

$$P(\underline{n}) \text{ sarebbe vera e } P(\underline{n}+1) \text{ falsa.}$$

Cioè esisterebbe un mucchio che, pur essendo piccolo, diventa improvvisamente grande per l'aggiunta di un solo chicco.
Dunque se il principio di induzione fosse valido, per la (1) e la (2) si avrebbe la verità di $P(n)$ $\forall n$.
ma ciò è in contrasto con l'ipotesi.
Dunque il principio di induzione è falso.

TEOREMA: In ogni insieme numerabile è possibile definire un buon ordinamento isomorfo a quello dei numeri naturali. In particolare in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Q}$ è definibile un buon ordinamento.

Dim. Supponiamo che S sia un insieme numerabile allora esiste una

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow S \quad \text{biettiva}$$

Su S definiamo la relazione $\leq^*$ t.c.

$$f(n) \leq^* f(m) \iff n \leq m$$

$(S, \leq^*)$ si tratta di una struttura relazionale isomorfa a $(\mathbb{N}, \leq)$ e f è un isomorfismo.

Costruzione di Dedekind

Teorema di completezza di $\mathbb{R}$

Assioma di continuità

Costruzione di Meray-Cantor del campo dei reali