

## Lezione del 15-10-2024

Proposizione: L'insieme  $\mathbb{Q}$  ha la potenza del numerabile

Dimostrazione:  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  biettiva

$\mathbb{Q}^+$  non lede la generalità del teorema

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	---
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	---
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	---
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	---
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	---
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	---
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	---

Created with Doceri



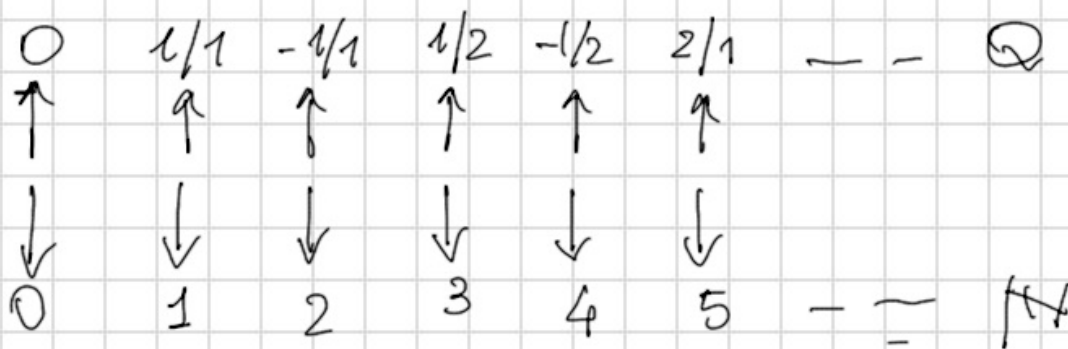
1/1    1/2    2/1    3/1    2/2    1/3    - - -

Considero le frazioni non equivalenti ad una frazione già considerata

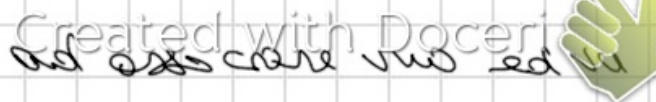
1/1    ~~2/2~~    ~~3/3~~

L'intero  $\mathbb{Q}^+$  lo considero in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$  mediante la seguente funzione

$$h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \text{ biettiva}$$



A ogni elemento di  $\mathbb{Q}$  corrisponde un solo elemento di  $\mathbb{N}$ .



Proposizione: l'insieme  $\mathbb{R}$  non ha la potenza del numerabile

Dimostrazione: per assurdo, abbia  $\mathbb{R}$  la potenza del numerabile. Allora dovremmo poter "ordinare" gli elementi di  $\mathbb{R}$  ad esempio procedendo a scrivere tutti quelli compresi tra 0 e 1.

$$x_1 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \dots$$

$$x_2 = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 \dots$$

$$x_3 = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8 c_9 \dots$$

Ogni numero decimale può essere "enumerato" o "scritto"

Dimostreremo che una qualsiasi lista non può contenere tutti i reali compresi tra 0 e 1.

In fatti, prendiamo il reale  $\alpha = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots$   
 tale che:

Created with Doceri



$$\lambda_1 \neq a_1, \lambda_2 \neq a_2, \lambda_3 \neq a_3 \dots$$

Il reale  $\alpha$  non può appartenere alla fila perché

$\alpha \neq \alpha_1$  perché la prima cifra decimale è diversa

$\alpha \neq \alpha_2$  perché la seconda cifra decimale è diversa

⋮

$\alpha \neq \alpha_n$

Pertanto, è impossibile elencare in un'unica fila tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1.

Quindi  $\mathbb{R}$  non ha la potenza del numerabile.

Diremo che  $\mathbb{R}$  ha la potenza del continuo



## Esercizi proposti

- 1) Dimostrare per induzione che per ogni intero positivo  $n$  il numero  $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$  è divisibile per 8.
- 2) Dimostrare che per induzione che per ogni naturale  $n \geq 2$  risulta  $n^3 > n + 6$
- 3) Dimostrare per induzione che per ogni intero positivo  $n$  si ha:
 
$$1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$
- 4) Dimostrare per induzione che in un'aula in cui sono presenti  $n$  studenti, con  $n \geq 1$ , se ognuno stringe una sola volta la mano di ciascun altro presente si hanno esattamente  $\frac{n(n-1)}{2}$  strette di mano.



ESERCIZIO: Trovare l'errore in questa dimostrazione

TEOREMA: Tutte le persone hanno la stessa età

Dim: Indico con  $S(n)$  l'asserzione "in un gruppo di  $n$  persone tutte hanno la stessa età".

Valgono le seguenti:

$$1) S(1)$$

$$2) \neg S(n) \Rightarrow S(n+1)$$

La prima prova è ovvia. Per provare la seconda, fissa un  $n$  e sia  $G$  un gruppo di  $n+1$  persone. Affermo che due persone  $P_1$  e  $P_2$  in  $G$  hanno la stessa età.

Infatti se  $P$  è una persona diversa da  $P_1$  e  $P_2$  poiché  $G - \{P\}$  contiene  $n$  persone per  $hp$  di induzione su  $G - \{P\}$  tutte le persone hanno la stessa età. In particolare  $P_1$  ha l'età di  $P_2$ .

Created with Doceri



## PARADOSSO DEL MUCCHO DI GRANO

Teorema: Se si accetta che non tutti i mucchi di grano sono piccoli allora il principio di induzione è falso.

Dim: Sia  $P(n)$  l'asserzione "un mucchio con  $n$  chicchi è piccolo". Allora valgono le seguenti:

1)  $P(1)$  è vera

2)  $\forall n (P_n \rightarrow P_{n+1})$  è vera

La prima è ovvia. Per la (2) basta osservare che se un mucchio di grano è piccolo allora rimane piccolo anche se ci aggiungo un altro chicco di grano.

Se la (2) fosse falsa esisterebbe un  $m$  per cui

$P(m) \rightarrow P(m+1)$  falsa

Tenendo conto che una implicazione è falsa se e solo se



l'antecedente è vero e il conseguente è falso, avremmo che  
 $P(n)$  sarebbe vero e  $P(n+1)$  falso.

Così esisterebbe un numero che, pur essendo piccolo, diventerebbe proporzionalmente grande per l'aggiunta di un solo chiodo.

Quindi se il principio di induzione fosse valido, per le (1) e le (2) si avrebbe la verità di  $P(n)$   $\forall n$ , ma ciò è in contrasto con l'ipotesi.  
Quindi il principio di induzione è falso.

Created with Doceri





TEOREMA: In ogni insieme numerabile è possibile definire un buon ordinamento isomorfo a quello dei numeri naturali. In particolare in  $\mathbb{Z}$  e in  $\mathbb{Q}$  è definibile un buon ordinamento.

Dim. Supponiamo che  $S$  sia un insieme numerabile allora esiste una

$$f: \mathbb{N} \rightarrow S \quad \text{biettiva}$$

In  $S$  definisco la relazione  $\leq^*$  t.c.

$$f(m) \leq^* f(n) \Leftrightarrow m \leq n$$

$(S, \leq^*)$  è allora una struttura relazionale

isomorfa a  $(\mathbb{N}, \leq)$  e  $f$  è un isomorfismo.

Created with Doceri



Costruzione di Dedekind

Tenore di completezza di  $\mathbb{R}$

Assioma di continuità

Costruzione di Meray-Cantor del campo dei reali

Created with Doceri

