lezione del 16-10-2024 (2ª parte)

Discontinuità dei razionali

Definizione: $A \subset \mathbb{Q}$, $B \subset \mathbb{Q}$, $A, B \neq \emptyset$
Allora (A, B) è una sezione se:

- $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $\forall a \in A$, $b \in B$ si ha $a < b$

Dato un razionale a possiamo costruire una sezione di $\mathbb{Q}$ (A_1, A_2) mettendo in A_1 tutti i razionali $a_1 < a$ e in A_2 tutti i razionali $a_2 > a$

$\forall a$ razionale possono costruire sezioni di cui a è l'elemento di separazione.

$$a_1 < a \leq a_2 \quad \text{o} \quad a_1 \leq a < a_2$$

L'elemento α di separazione è unico per la definizione stessa di sezione

Non tutte le sezioni di $\mathbb{Q}$ hanno un elemento separatore in $\mathbb{Q}$.

Esempio $\quad A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \}$

$$B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \}$$

(A, B) è una sezione perché $\underset{1 \in A}{A \neq \emptyset}$, $\underset{2 \in B}{B \neq \emptyset}$

e $A < B$ però l'elemento di separazione ξ è tale che $\xi^2 = 2$
che non può essere un razionale!!

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è incompleto o discontinuo

Dobbiamo "creare" un nuovo numero, un numero irrazionale α che consideriamo come completamente definito dalla sezione stessa

A ogni sezione corrisponde uno ed un solo numero razionale o irrazionale e i due numeri sono diversi se e solo se determinano sezioni diverse

Prendiamo le sezioni $\underbrace{(A_1, A_2)}_{\alpha}$ e $\underbrace{(B_1, B_2)}_{\beta}$

Confrontiamo le classi A_1 e B_1

1° CASO A_1 e B_1 sono identiche (ogni numero contenuto in A_1 è contenuto anche in B_1 e viceversa)

$\Rightarrow$ A_2 è identica a B_2 $\Rightarrow$ $\alpha = \beta$

2° caso A_1 e B_1 non sono essenzialmente diverse.
Ad esempio se esiste a_1' che è l'unico elemento di A_1 non contenuto in B_1

Allora tutti gli elementi $a_1 \in A_1$ sono contenuti anche in B_1 eccetto a_1' che è il numero massimo della classe A_1

Pertanto la classe (A_1, A_2) è determinata da $\alpha = a_1' = b_2'$

dove b_2' è l'unico elemento di B_2 non contenuto in A_2.

Se prendo la sezione (B_1, B_2) sappiamo che tutti i $b_1 \in B_1$ e $b_1 \in A_1$ e sono minori $a_1' = b_2'$ contenuto in B_2
e ogni altro $b_2 \in B_2$ è maggiore b_2'

Perciò b_2' è il minimo numero di B_2 e la sezione $(B_1|B_2)$ è determinata da $\beta = b_2'$

$\beta = b_2' = a_1' = \alpha \Rightarrow \beta = \alpha$

In (A_1, A_2) α è il massimo di A_1

In (B_1, B_2) β è il minimo di B_2

3° caso A_1 e B_1 sono essenzialmente diverse

2 diversi numeri di A_1 a_1' e a_1'' non sono contenuti in B_1 ma sono contenuti in B_2

Avremo $a_1' = b_2'$

$a_1'' = b_2''$

Tra due diversi numeri ce ne sono infiniti quindi avremo infiniti numeri compresi tra a_1' e a_1'' che sono contenuti in B_1.

Ma nel caso (A_1, A_2) e (B_1, B_2) sono essenzialmente diverse e sono diversi anche α, β

Se $B_1 \subset A_1 \Rightarrow \alpha > \beta$ o $\beta < \alpha$

Se $A_1 \subset B_1 \Rightarrow \alpha < \beta$ o $\beta > \alpha$

Possiamo definire numero reale una sezione (A, B) di razionali e $\mathbb{R}$ diventa l'insieme di tutte le sezioni. Da come è costruito risulta anche ben ordinato.

Valgono le seguenti:

- Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$
- Se $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ esistono infiniti numeri fra α e β
- Dato un numero α, tutti i numeri di $\mathbb{R}$ si dividono in due sezioni A_1 e A_2

Tutto ciò basta a definire $\mathbb{R}$?

NO

- È necessario definire su $\mathbb{R}$ delle operazioni
- Verificare che $\mathbb{R}$ sia un campo completo ben ordinato.

Definiamo l'operazione $\boxed{\text{somma}}$

Se $\alpha = (A, B)$ e $\beta (C, D)$ allora

$$\alpha + \beta := (A + C , B + D)$$

l'elemento neutro è la sezione definita dal numero razionale $\emptyset$.
l'opposto di $\alpha = (A, B)$ è $-\alpha = (-B, -A)$

Definiamo il prodotto

Se $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$ e sono positivi allora

$$\alpha \cdot \beta := \left(\mathbb{Q} \setminus BD, BD \right)$$

Se α e β sono entrambi negativi

$$\alpha \cdot \beta := (-\alpha)(-\beta)$$

Se $\alpha < 0$ e $\beta \geq 0$

$$\alpha \cdot \beta := -(-\alpha)(\beta)$$

l'unità è la sezione definita dal numero razionale 1

l'inverso di α è $\frac{1}{\alpha} := \left\{ \mathbb{Q} \setminus A_+^{-1}, A_+^{-1} \right\}$

$$A_t^{-1} = \left\{ q \in Q : q = \frac{1}{\alpha},\ A \in A,\ \alpha > 0;\ q = \frac{-1}{-\alpha} \text{ se } \alpha < 0 \right\}$$

Proposizione: $\mathbb{R}$ è Dedekind-continuo.

Dimostrazione (esistenza)

Sia (A, B) una sezione di $\mathbb{R}$. Gli elementi di A e di B sono a loro volta sezioni di $\mathbb{Q}$.

Poniamo
$$A_0 = \bigcup_{(A,B)\in \mathcal{S}} A$$
$$B_0 = \bigcap_{(A,B)\in \mathcal{S}} B$$

dimostriamo (A_0, B_0) è una sezione di $\mathbb{Q}$ e quindi un numero reale che è l'elemento di separazione di (A, B).

1) $A_0 \cup B_0 = \mathbb{Q}$ infatti se $r \in B_0$ esiste una $(A, B) \in \mathcal{S}$ con $r \in B$. Pertanto $r \in A$ e quindi $r \in A$ e quindi $r \in A_0$

2) $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Infatti se $r \in A_0$ r appartiene ad almeno un A e quindi non appartiene al corrispondente B. $\Rightarrow$ $r \notin B_0$

3) Siano $p \in A_0$ e $q \in B_0$; p appartiene ad almeno un A e q a tutti i B.
Allora esiste una sezione $(A, B) \in \mathcal{A}$ con $p \in A$ e $q \in B$ per cui $p < q$.

Quindi (A_0, B_0) è una sezione di $\mathbb{Q}$ e definisce un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ che è $\geq$ di ogni altro elemento di A_0 e $\leq$ di ogni altro elemento di B_0

Vediamo che λ è elemento di separazione di $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Infatti $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha = (A, B)$, risulta $A \subset A_0$ e quindi

$$\alpha \leq \lambda$$

Sia ora $\beta = (A', B') \in \mathcal{B}$

Poiché ogni elemento di $\mathcal{A}$ è $< \beta$ risulta $A \subset A'$ per ogni $(A, B) \in \mathcal{A}$ e quindi anche $A_0 \subset A' \Rightarrow \lambda \leq \beta$

Manca l'unicità

Fare come esercizio!!

Definite 2 operazioni, esistenze, unicità

$\Rightarrow \mathbb{R}$ Definito