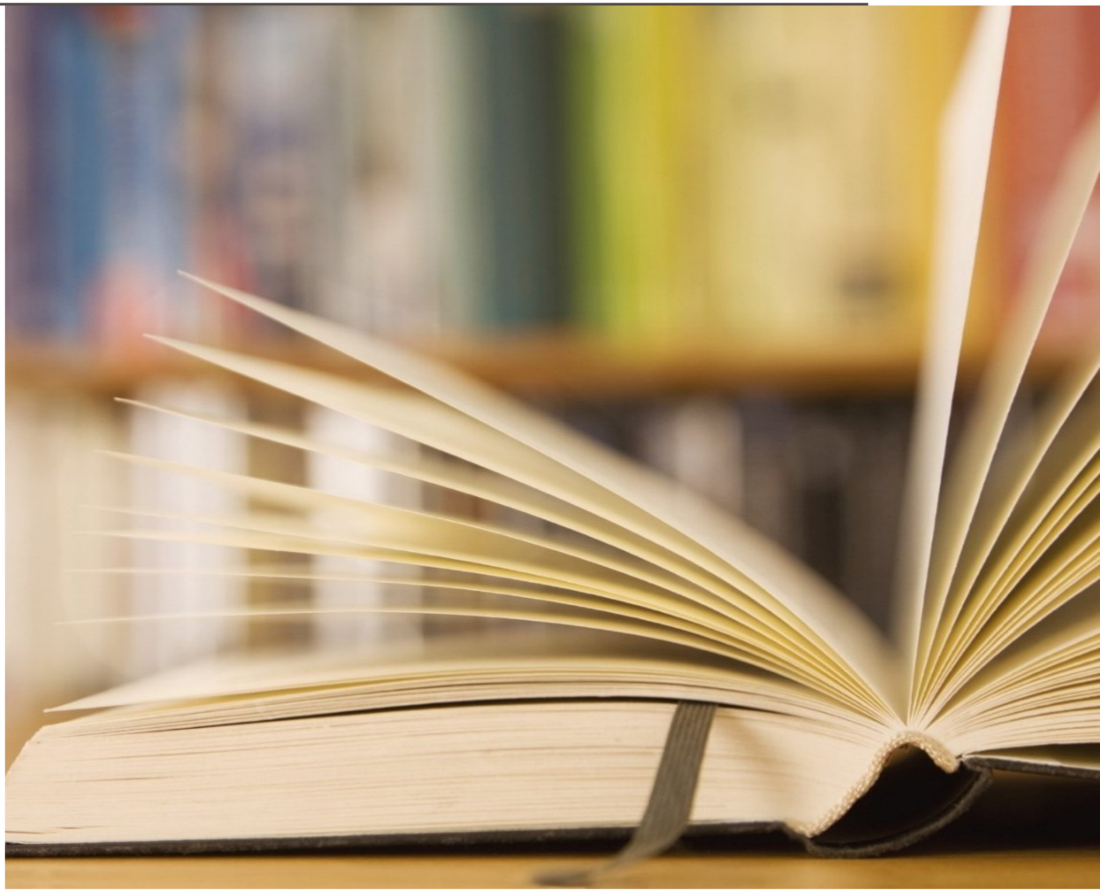
LA MATEMATICA GRECA



Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore

La scuola Pitagorica

E' indegno del nome di uomo chi ignora
il fatto che la diagonale di un quadrato
è incommensurabile con il suo lato.
Platone (429-347 a.C.)

Il primo organico tentativo di dare una fondazione alla matematica (ed all’intera conoscenza scientifica) fu probabilmente quello della scuola pitagorica il cui assunto di partenza era che:
alla base di tutto è il numero intero.
La scuola pitagorica era una setta mistico-religiosa che si sviluppò in Grecia e in Italia (Crotone) tra il 570 ed il 500 a.C. attorno ad un mitico personaggio chiamato Pitagora. Le idee di tale scuola sono di fondamentale importanza per la storia della cultura occidentale perché da esse inizierà quel processo che trasformerà la scienza pre-ellenica, che consisteva in una disarticolata raccolta di risultati dettati dall'esperienza, in una scienza razionale.

La scuola Pitagorica

Dei pitagorici parla Aristotele al modo seguente, dove si deve tenere conto che allora per "numero" si intendeva "numero intero positivo"

Tra i primi filosofi, ..., furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per i primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri... Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero (Aristotele, Metafisica).

"Nessuna menzogna accolgono in sé la natura del numero e l'armonia: non è cosa loro la menzogna. La menzogna e l'invidia partecipano della natura dell'illimitato, dell'inintelligibile e dell'irrazionale. Nel numero non penetra menzogna, perché la menzogna è avversa e nemica della natura, così come la verità è connaturata e propria alla specie dei numeri . . . "

"… Nulla sarebbe comprensibile, né le cose in sé né le loro relazioni, se non ci fossero il numero e la sua sostanza."

"Tutte le cose che si conoscono hanno numero: senza il numero non sarebbe possibile pensare né conoscere alcunché." (Filolao)

La scuola Pitagorica

La scoperta di una scala armonica che viene detta, appunto, scala pitagorica.

Il convincimento circa la struttura granulare e discreta delle figure geometriche e, più in generale, del mondo fisico

Con Pitagora ha inizio un processo di idealizzazione e razionalizzazione di tutte le forme di conoscenza che dominerà perfino la nostra cultura religiosa

La scala Pitagorica

Consideriamo delle corde tese di varia lunghezza ed esaminiamo i suoni che vengono emessi pizzicandone due contemporaneamente. Ci si accorge che a volte si hanno effetti gradevoli ed a volte sgradevoli. E’ possibile studiare quale
sia il rapporto tra le lunghezze delle due corde ed il fenomeno della “gradevolezza” o, per essere più specifici, della ”consonanza”.

Ora la prima scoperta che viene da fare è che se una corda è il doppio dell’altra si ha una fortissima consonanza. In questo caso noi diciamo che i due suoni differiscono per una ottava.

Un altro suono gradevole si ottiene facendo vibrare, insieme ad A una corda la cui lunghezza C sia i due terzi di A cioè $C = (2/3)A$.
Ne segue che $A : C = 3 : 2$

Se indichiamo con A la lunghezza della prima corda e con B quella della seconda allora $B = (1/2)A$ o, se si vuole, $A : B = 2 : 1$

Infine ci si accorge che un suono gradevole si ottiene dai suoni prodotti dalle corde C e B che risultano essere nel rapporto $C:B = 4:3$. Abbiamo quindi che le tre consonanze principali, (che prendono il nome di ottava quinta e quarta), corrispondono ai rapporti 2:1; 3:2 e 4:3.

" Tutte le cose che si conoscono hanno un numero"

La geometria non si considerava distinta dall'aritmetica e, in un certo senso, l'aritmetica assumeva una forma geometrica. Dei numeri infatti si dava una rappresentazione geometrica o, se si vuole, fisica, tramite una opportuna configurazione di punti-sassolino

```
O     O      O        O
     O O    O O      O O
           O O O    O O O
                   O O O O
```

Ogni triangolo si ottiene dal precedente aggiungendo un fila di sassolini.
Pertanto se $t(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo triangolo abbiamo che la funzione t è definibile tramite le equazioni

$$t(1) = 1 : t(n) = t(n-1) + n.$$

Ne segue che sono triangolari tutti i numeri della serie $1, 3, 6, 10, \dots$ di termine generale n, cioè tutti i numeri del tipo $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

" Tutte le cose che si conoscono hanno un numero"

Si chiamavano invece quadrati i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in quadrato

```
O    O O    O O O    O O O O
     O O    O O O    O O O O
            O O O    O O O O
                     O O O O
```

Ogni quadrato si ottiene dal precedente aggiungendo due lati (con un sassolino in comune). Ne segue che, se $q(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo quadrato, la funzione q si definisce tramite le equazioni

$$q(1) = 1 : q(n) = q(n-1) + 2n - 1.$$

Pertanto i quadrati perfetti si ottengono come elementi della serie

$$1, 1+3, 1+3+5, \dots, 1+3+\dots+2n-1,$$

cioè la serie di termine generale $2n - 1$.

" Tutte le cose che si conoscono hanno un numero"

Si chiamavano rettangolari i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in un rettangolo (che non si riduca ad una striscia di sassolini)

```
O O    O O O   O O O    O O O O
O O    O O O   O O O    O O O O
               O O O    O O O O
```

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Ogni figura geometrica può essere misurata da un numero naturale. Infatti basta contare il numero dei sassolini-punto che ne fanno parte.
Purtroppo vedremo che questo non è sempre possibile. Per prima cosa vediamo che cosa significa misurare un segmento.

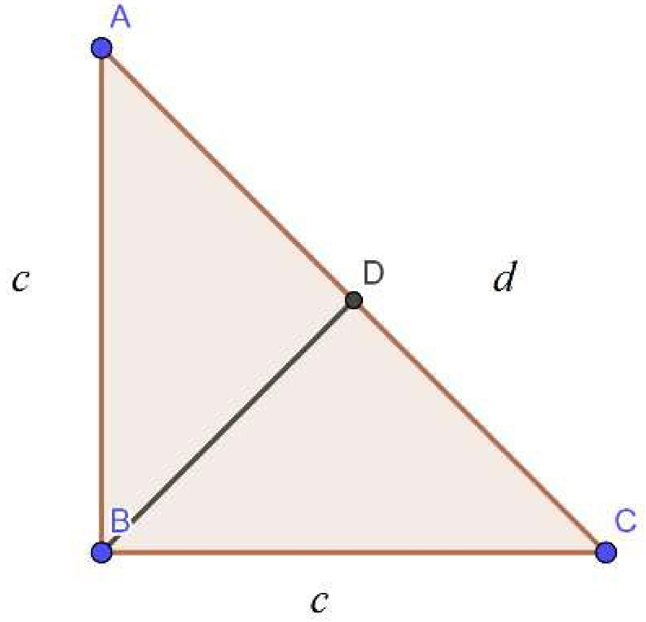
In altre parole, dovendo misurare un segmento a e l'unità di misura è un segmento u, allora dico che la misura di a è n se "riportando" n volte u lungo il segmento a riesco a raggiungere esattamente la fine del segmento a.

Definizione 2.1.
Diciamo che un segmento a è un n-multiplo di un segmento u se a si può dividere in n segmenti congrui a b. Se assumiamo u come segmento unitario, allora diciamo che la misura di a rispetto all'unità di misura u è n.

Definizione 2.2.
Diciamo che i segmenti $a1, \dots, an$ sono commensurabili se esiste un segmento u tale che ogni ai ha una misura intera rispetto all'unità di misura u. Altrimenti diciamo che sono incommensurabili.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Teorema 2.3.
Dato un triangolo rettangolo isoscele, qualunque sia l’unita di misura scelta, cateto e diagonale non possono avere entrambi misura intera.



Dim. Fissata un’unità di misura u, supponiamo per assurdo che esistano triangoli rettangoli isosceli con cateto ed ipotenusa di misura intere.
Sia d la lunghezza più piccola tra le lunghezze di tali triangoli ed indichiamo con ABC un triangolo la cui ipotenusa misuri d mentre supponiamo che i suoi cateti misurino c.

Indichiamo con D il punto medio dell’ipotenusa AC. E’ evidente che l’area del triangolo ABC è il doppio dell’area del triangolo BDC e quindi che c2/2 = 2�(d2/2). Da tale equazione segue che d2 = 2�c2 e quindi che d è un numero pari. Poiché BD è uguale a DC, questo comporta che il triangolo BDC ha lati interi. Questo è assurdo in quanto BCD ha una ipotenusa c minore di quella d di ABC.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Definizione 2.6.
Diremo che u’ è la m-sima parte di u se u è un m-multiplo di u’. Diremo che la misura di un segmento a rispetto ad u è il numero razionale p/q se u è un p-multiplo di segmenti che sono congrui all’q-sima parte di u.

Teorema 2.7.
Dato un quadrato, ABCD qualunque sia l’unità di misura scelta u, lato e diagonale non possono avere entrambi misura razionale.

Dim.
Assumiamo per assurdo che lato e diagonale si possano rappresentare con due razionali e rappresentiamo questi due razionali con lo stesso denominatore e quindi con le frazioni n/t ed m/t. Ingrandiamo allora ABCD di t. Otteniamo allora un A’B’C’D’ con lato e diagonale di lunghezza n ed m, rispettivamente in contraddizione col Teorema 2.4.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

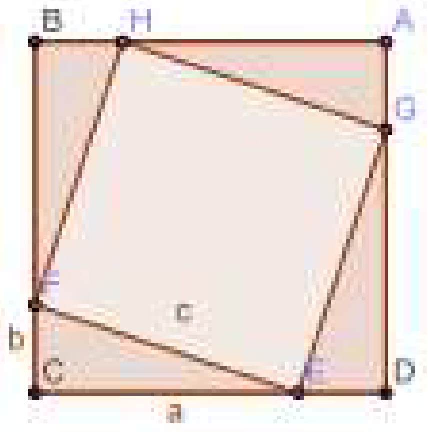
Lo sapevate? Il quadrato costruito sull'ipotenusa è il doppio di quello sui cateti . . . ma la qualità è scadente e dopo un anno lo butti! È così! È capitato a mia sorella! Fidatevi!
Vulvia (Corrado Guzzanti, Il caso Scrafoglia,2002).

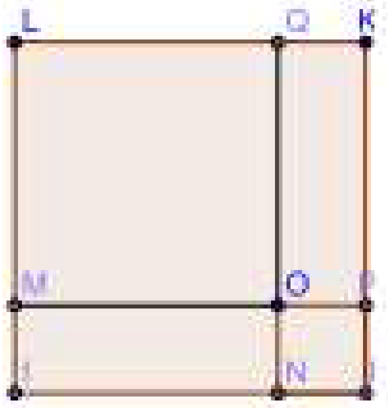
Dimostrazioni di esistenza di figure con lati non commensurabili sono rese più facili se si utilizza il teorema di Pitagora.

Teorema 3.1.
(Teorema di Pitagora) Dato un triangolo rettangolo, se si considera l’unione dei due quadrati costruiti sui cateti otteniamo una figura che ha la stessa estensione del quadrato costruito sull’ipotenusa.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Dim.4
Indichiamo con T il triangolo rettangolo, supponiamo che i cateti misurino a e b e l’ipotenusa c. Costruiamo un quadrato Q con lati uguali ad a+b.





Detti A, B , C, D i vertici di Q, tracciamo sui lati i quattro punti H, F, E, G in modo che CE = DC = AH = BF = a mentre ED =GA = HB = FC = b. In tale modo si individuano quattro triangoli rettangoli uguali (avendo cateti uguali per costruzione). Inoltre, tali punti individuano un quadrilatero FEGH. Tale quadrilatero ha lati uguali in quanto coincidenti con le ipotenuse dei triangoli. Inoltre gli angoli sono retti. Ad esempio, l’angolo in E è retto in quanto è uguale ad un angolo piatto meno la somma dei due angoli non retti di T. D’altra parte la somma dei due angoli non retti di un triangolo rettangolo è un angolo retto. Pertanto FEGH è un quadrato, precisamente il quadrato costruito sull’ipotenusa..

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Un triangolo che verifica il teorema di Pitagora è necessariamente rettangolo?

Teorema 3.2. (Teorema inverso di Pitagora)
Ogni triangolo i cui lati verificano il teorema di Pitagora è rettangolo.

Dim.
Sia ABC un triangolo tale che $AB^2 = AC^2 + BC^2$ e costruiamo un segmento BC perpendicolare ad AC e di lunghezza uguale a CB. Allora i due triangoli ACB e ACB hanno
il lato AC in comune ed i lati BC e CB uguali per costruzione. Inoltre, essendo ACB rettangolo in C, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + CB^2 = AB^2$.
Pertanto i due triangoli, avendo i tre lati uguali, sono uguali. Da ciò segue che l'angolo ACB è uguale all'angolo retto ACB ed è quindi retto.

Breve excursus didattico

Definizioni

Figure piane limitate da una linea chiusa, che chiamiamo **contorno**, hanno una **superficie**. Assumiamo i concetti di *superficie* e di *estensione* di una superficie senza definirli, cioè come primitivi.

DEFINIZIONE

Chiamiamo **equivalenti** due superfici che hanno la stessa estensi

In simboli, indichiamo l'equivalenza fra due superfici S e T con $S \doteq$
«S è equivalente a T».

- Le superfici A e B rappresentate nella figura sono equivalenti: $A \doteq B$.

Accettiamo come postulati che:

- *due superfici congruenti sono equivalenti;*
- *la relazione di equivalenza fra superfici* gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi *è una relazione di equivalenza.*

Ogni classe di equivalenza, a cui appartengono tutte le superfici fra loro equivalenti, indica una proprietà comune alle superfici che le appartengono: l'**area**.

Diciamo anche che *due superfici equivalenti hanno la stessa area.*

Due parallelogrammi che hanno congruenti le basi e le relative altezze sono equivalenti. Inoltre, ogni parallelogramma è equivalente a un rettangolo che ha la base e l'altezza congruenti a quelle del parallelogramma.

Un **triangolo** è equivalente a un parallelogramma che ha per altezza la stessa altezza e per base metà della bas del triangolo.

Un **trapezio** è equivalente a un triangolo che ha per altezza la stessa altezza e per base la somma delle basi de trapezio.

Un **quadrilatero** con le diagonali perpendicolari è equivalente alla metà di un rettangolo che ha per lati l diagonali del quadrilatero.

Breve excursus didattico

TEOREMA

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e all'ipotenusa stessa.

▶ **DIMOSTRAZIONE**

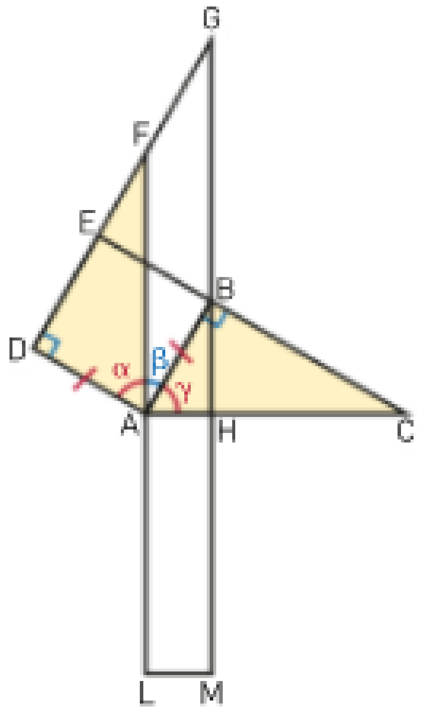
Costruiamo sul cateto AB il quadrato $ABED$ e tracciamo il rettangolo $AHML$, con $AL \cong AC$. Prolunghiamo LA e MH fino a incontrare il prolungamento di DE rispettivamente in F e G.

I triangoli ABC e ADF hanno:

- $\alpha \cong \gamma$ perché complementari dello stesso angolo β;
- $AB \cong AD$ perché $ADEB$ è un quadrato;
- $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ perché retti.

Per il secondo criterio, i triangoli sono congruenti.

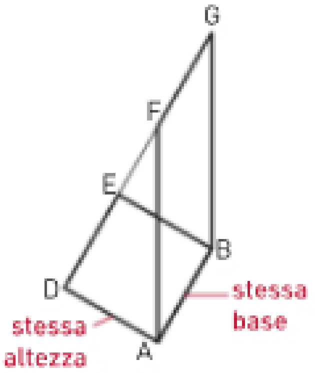
In particolare: $AC \cong AF$.



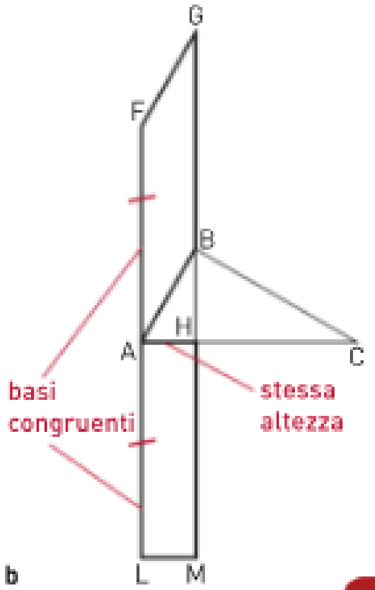
Breve excursus didattico

Consideriamo $ADEB$ e $AFGB$ (figura **a**). $ADEB$ è un quadrato per ipotesi e $AFGB$ è un parallelogramma, perché per costruzione ha i lati opposti paralleli.
$ADEB$ e $AFGB$ hanno la stessa base AB e la stessa altezza AD, quindi sono parallelogrammi equivalenti.

Anche $AFGB$ e $AHML$ sono parallelogrammi con le basi congruenti, dato che $AF \cong AC$ per la dimostrazione precedente, $AL \cong AC$ per ipotesi e dunque $AF \cong AL$. Inoltre, $AFGB$ e $AHML$ hanno la stessa altezza AH (figura **b**), quindi sono equivalenti.



a



b

$ADEB \doteq AFGB$ e $AFGB \doteq AHML$, quindi per la proprietà transitiva:

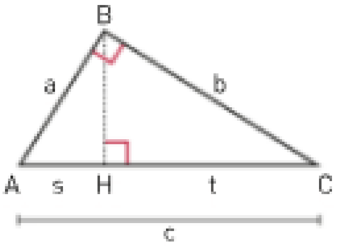
$$ADEB \doteq AHML.$$

Se $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CA} = c$, $\overline{AH} = s$ e $\overline{HC} = t$, possiamo esprimere il primo teorema di Euclide con le uguaglianze:

$$a^2 = s \cdot c \quad \text{e} \quad b^2 = t \cdot c.$$

Queste relazioni permettono di calcolare le misure dei cateti conoscendo la misura delle loro proiezioni sull'ipotenusa e quella dell'ipotenusa:

$$a = \sqrt{s \cdot c} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{t \cdot c}.$$



VERIFICA CON GEOGEBRA

Primo teorema di Euclide
Dopo aver disegnato un triangolo rettangolo, costruisci un quadrato su un cateto. Disegna poi un rettangolo che abbia per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. Muovi gli elementi liberi della figura e verifica il primo teorema di Euclide.

Breve excursus didattico

DIMOSTRAZIONE

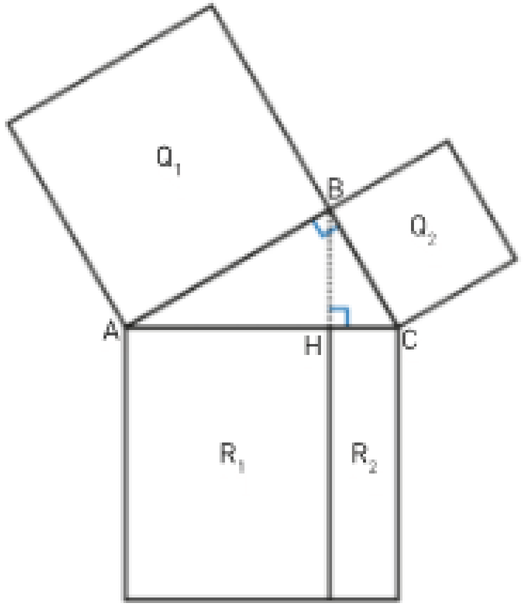
Tracciamo BH, altezza relativa all'ipotenusa, e la prolunghiamo in modo da dividere Q nei rettangoli R_1 e R_2, che hanno per basi le proiezioni AH e HC dei cateti sull'ipotenusa e per altezza l'ipotenusa stessa. Applichiamo il primo teorema di Euclide:

- il quadrato costruito su AB è equivalente al rettangolo con lati l'ipotenusa e la proiezione AH del cateto AB su AC: $Q_1 \doteq R_1$;
- il quadrato costruito su BC è equivalente al rettangolo con lati l'ipotenusa e la proiezione HC del cateto BC su AC: $Q_2 \doteq R_2$.

Sommando membro a membro le due equivalenze, otteniamo:

$$Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2,$$

da cui, essendo per costruzione $R_1 + R_2 \doteq Q$, otteniamo $Q_1 + Q_2 \doteq Q$.

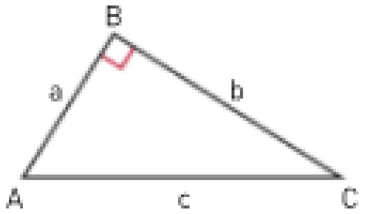


Se chiamiamo le misure dei cateti $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e quella dell'ipotenusa $\overline{AC} = c$, possiamo esprimere il teorema di Pitagora con l'uguaglianza:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Questa relazione permette di determinare un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2},\ b = \sqrt{c^2 - a^2},\ c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Vale anche il teorema inverso

VIDEO

Due dimostrazioni del teorema di Pitagora

Ancora grandezze incommensurabili: la prima crisi

Il teorema di Pitagora è un valido strumento per trovare infiniti esempi di grandezze incommensurabili. Per poterlo fare si serviremo dei due seguenti lemmi.

Lemma 4.1.
Se c è un quadrato perfetto, allora ogni numero primo presente nella fattorizzazione di c ha un esponente pari.
Dim.
Supponiamo che $c = n^2$ e che n si possa scomporre come

$$n = p_1^{n(1)}, \dots, p_s^{n(s)}$$

con $p_{1,} \dots, p_s$ primi.
Allora

$$c = n^2 = p_1^{2n(1)} \cdot p_s^{2n(s)}.$$

Supponiamo ad esempio che c = 122 = 144 allora essendo 12 $= 2^2 \cdot 3$, la fattorizzazione di 144 sarà $12^2 = 2^4 \cdot 3^2$

Ancora grandezze incommensurabili: la prima crisi

Lemma 4.2.
Sia p un numero primo, allora un quadrato perfetto non può essere p volte un altro quadrato perfetto, cioè l'equazione $p \cdot n^2 = m^2$ non ammette soluzioni intere.

Dim.
Supponiamo per assurdo che esistano due interi n ed m tali che $p \cdot n^2 = m^2$ e poniamo $c = p \cdot n^2 = m^2$ allora

- m^2 e quindi m è divisibile per p,
- dall'equazione $c = m^2$ si deduce che il fattore p compare in c un numero pari di volte
- dall'equazione $c = m^2$, tenendo conto del fatto che in n^2 il fattore p compare con esponente pari, si deduce che il fattore p è presente in c un numero dispari di volte.

Questa conclusione è un assurdo e quindi il lemma è provato.

Ancora grandezze incommensurabili: la prima crisi

Proposizione 4.3.
La radice di un numero primo non è un razionale.

Teorema 4.4. (Paradosso dell'esistenza di grandezze non commensurabili) Dato un triangolo rettangolo isoscele, qualunque sia l'unita di misura scelta, cateto e diagonale non possono avere entrambi misura intera.

Dim.
Supponiamo per assurdo che esista un segmento u (unità di misura) tale che sia il lato che la diagonale siano multipli, secondo gli interi n ed m, di u. In altri termini, supponiamo che il lato e la diagonale siano misurati tramite due numeri interi n ed m. Allora i quadrati costruiti sui cateti sono costituiti da n^2 quadratini unitari mentre il quadrato costruito sull'ipotenusa è costituito da m^2 quadratini unitari. Ne segue che per il teorema di Pitagora $n^2 + n^2 = m^2$ e quindi $2n^2 = m^2$. Ma ciò, come abbiamo visto nel lemma precedente, è assurdo.

Ancora grandezze incommensurabili: la prima crisi

Un altro modo di provare l'incommensurabilità è il seguente dove chiamiamo triangolo impossibile un triangolo rettangolo isoscele (con cateti uguali) con i tre lati interi.

Teorema 4.6. Dato un triangolo impossibile possiamo costruirne un altro con area dimezzata.

Dim.
Sia DBC un triangolo impossibile, chiamiamo con d la lunghezza dell'ipotenusa e con c quella dei cateti. Allora poiché per il teorema di Pitagora $d^2 = 2c^2$, d è pari. Ne segue che se D' è il punto di mezzo di DB, la lunghezza di D'B è un intero. Ne segue che D'BC è un triangolo impossibile.

Ancora grandezze incommensurabili: la prima crisi

Possiamo riformulare lo stesso teorema al modo seguente dove per quadrato impossibile si intende quadrato con lato intero e diagonale intera.

Teorema 4.7. Ogni quadrato impossibile si può tagliare in quattro quadrati impossibili.

Corollario 4.8. Non esistono triangoli o quadrati impossibili.

Dimostrare e dimostrare per assurdo

Nel teorema di Pitagora si prova qualcosa in positivo, precisamente che vale una certa equazione e la dimostrazione consiste nel mettere in evidenza che valgono una serie di uguaglianze. La dimostrazione della incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato è invece diversa e costituisce uno dei primi esempi di "dimostrazione per assurdo".

Ricordiamo che chiamiamo contraddizione l'affermazione di un fatto e la contemporanea negazione di tale fatto. Indicando con B una asserzione, con -B la sua negata, con ∧ la congiunzione logica "e", allora una contraddizione ha una forma del tipo B∧(-B) che si legge "B e non B". Naturalmente una contraddizione non può essere un'asserzione vera. Inoltre, poiché da asserzioni vere si deducono ancora asserzioni vere:
se da una asserzione A segue una contraddizione,
allora A non può essere vera,
pertanto : -A è vera.

Dimostrare e dimostrare per assurdo

In definitiva la struttura di una dimostrazione per assurdo di una proposizione -A è questa:

1. si suppone A
2. da tale ipotesi si ricava una contraddizione $B \wedge (-B)$,
3. si conclude che, non potendo valere A, vale -A.

Ad esempio, nel caso della dimostrazione di incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato,

- si suppone la commensurabilità,
- da tale ipotesi si ricava sia l'affermazione B = “ in c il fattore 2 è presente un numero pari di volte” sia l’affermazione -B = “ in c il fattore 2 è presente un numero dispari di volte”.
- si conclude che non sussiste la commensurabilità.

Talete

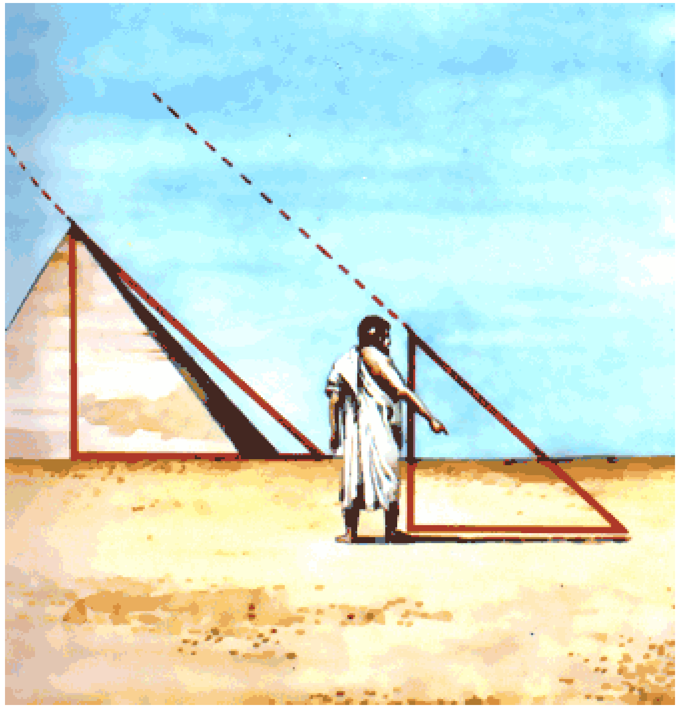
Fu studioso di geometria e di astronomia e a lui, in ambito greco, si fa risalire un atteggiamento scientifico radicalmente nuovo: l’indagine della natura non si risolve nel raccontare in forma poetica le origini del mondo o nel ricondurre la molteplicità del reale al mistero insondabile del Caos, ma si esplica nella ricerca di un principio razionale interno alla natura stessa, causa del suo stesso divenire

Diogene Laerzio, nelle sue Vite, racconta che Talete riuscì a determinare l’altezza della piramide di Cheope attraverso la misura dell’ombra da essa proiettata a quell’ora del giorno in cui l’ombra di un qualunque corpo è di lunghezza pari all’altezza del corpo che la proietta. Il suo nome è legato al teorema di Talete, la cui prima dimostrazione compare negli Elementi di Euclide (Libro v, prop. 2).

Talete

Proclo attribuisce a Talete anche cinque teoremi di geometria elementare:

1) Un cerchio è diviso in due superfici di uguale area da qualunque diametro;
2) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti;
3) Gli angoli opposti al vertice sono congruenti;
4) Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e i due angoli adiacenti congruenti;
5) Un triangolo iscritto in una semicirconferenza è rettangolo.



Sui numeri primi

Teorema 5.1. L'insieme P dei numeri primi
è infinito.

Dim.
Detto A l'enunciato "P è infinito" neghiamolo, cioè supponiamo per assurdo che l'insieme P dei numeri primi sia finito.
Posto $P = \{p_1, \dots p_n\}$, sia $q = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.
Vogliamo dimostrare che q è primo. Infatti se per assurdo q non fosse primo ammetterebbe un divisore primo $p \neq 1$. Poiché abbiamo supposto che $p_1, \dots p_n$ sono tutti i possibili numeri primi, p deve coincidere con un opportuno p_i. Allora p_i, dividendo sia q $p_1, \dots p_n$ dovrà dividere anche q $\cdot\, p_1, \dots p_n = 1$ cosa questa assurda. L'assurdo a cui siamo pervenuti prova che q è primo. D'altra parte q, essendo maggiore dei numeri $p_1, \dots p_n$ non appartiene a $\{p_1, \dots p_n\}$, in contrasto con l'ipotesi che $\{p_1, \dots p_n\}$, } è l'insieme di tutti i numeri primi.

Sui numeri primi

Teorema 5.2.
Dato un insieme finito $\{p_1, \dots p_n\}$, di numeri primi esiste un numero primo p che non appartiene a $\{p_1, \dots p_n\}$, Ne segue che l' insieme dei numeri primi è infinito.

Dim.
Consideriamo il numero $q \cdot p_1, \dots p_n = 1$ e sia p un divisore di q diverso da 1 (che potrebbe coincidere con q se q fosse primo). Se per assurdo $p \in \{p_1, \dots p_n\}$ allora p, dividendo sia q che
$p_1, \dots p_n = 1$, dividerebbe anche $q \cdot p_1, \dots p_n = 1$ e ciò è assurdo.

Il continuo geometrico per evitare l’infinito attuale

Il fatto che i numeri interi si rivelassero uno strumento inadeguato
a definire le grandezze geometriche poteva, da un punto di vista tecnico, essere risolto (almeno) in due modi diversi.

1. Si poteva ampliare il concetto di numero.
2. Si poteva decidere che la geometria non è riducibile all’algebra, cioè alla nozione di numero..

I Greci seguirono la seconda via. Il primo punto di vista sarà invece assunto, come vedremo nel seguito, dalla matematica moderna con la definizione dei numeri reali e la successiva loro utilizzazione per la costruzione del continuo geometrico (la famosa geometria analitica).

D'altra parte i Greci non potevano definire i reali perché non è possibile definirli a partire dagli interi senza coinvolgere la nozione di infinito attuale. Basta osservare che, come faremo in seguito, un numero reale si definisce come un insieme attualmente infinito di razionali (si veda il metodo delle sezioni) oppure come una successione attualmente infinita di cifre decimali.
Ma gli antichi greci rifiutavano l'infinito attuale

Il continuo geometrico per evitare l’infinito attuale

“. . . ché il numero è infinito in potenza, ma non in atto ... questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi (i matematici), allo stato presente, non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono) ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita ... “ (Aristotele).

“... che si può prendere sempre qualcosa di nuovo (in esso), e ciò che si prende è sempre finito ma sempre diverso. Sicché non bisogna prendere l'infinito come un singolo essere, per esempio un uomo o una cosa, ma nel senso in cui si parla di una giornata o di una lotta, il cui modo d'essere non è una sostanza ma un processo e che, se pure è finito, è incessantemente diverso.”

Paradosso di Achille e la tartaruga.

In questo paradosso si racconta di una sfida di una tartaruga (simbolo della lentezza) ad Achille (noto per la sua velocità) in una corsa. In tale sfida la tartaruga dichiara che purché gli siano dati dieci metri di vantaggio, non si sarebbe fatta raggiungere da Achille. Achille accetta la sfida, partono insieme ed Achille percorre quei dieci metri di vantaggio. Nel frattempo tuttavia la tartaruga percorre un metro; Achille non si scoraggia ed allora percorre quel metro, ma nel frattempo la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, ma nel frattempo la tartaruga percorre un centimetro . . . e così via all'infinito. In questo modo Achille può correre per sempre senza raggiungere mai la tartaruga

Attualmente tale paradosso viene "risolto" coinvolgendo la nozione di serie convergente. Infatti gli infiniti intervalli impiegati ogni volta da Achille per raggiungere la tartaruga diventano non solo sempre più piccoli ma il limite della loro somma converge. Di questa possibile soluzione (che comunque non è universalmente accettata ed anche a me non sembra centrare il problema) era convinto anche Cartesio